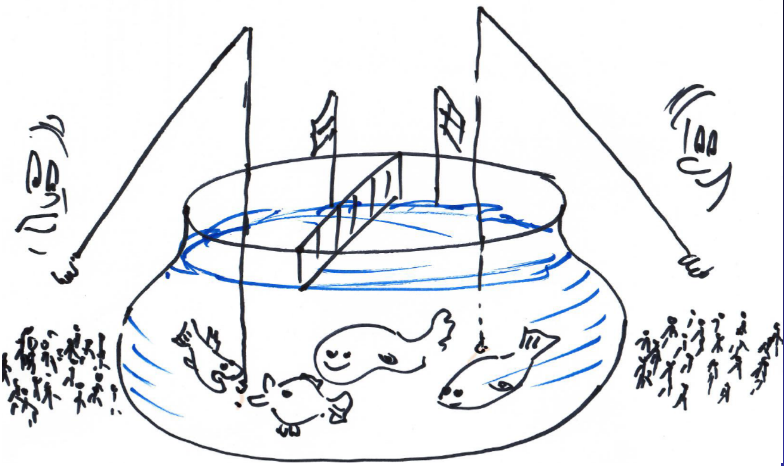
Gry, dynamika i „the tragedy of the commons”

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.pl

UNIVERSITY OF WARSAW
Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics
Institute of Applied Mathematics and Mechanics

29 września 2022,
Szkoła Matematyki Poglądowej, Siedlce

„The tragedy of the commons” czyli ”tragedia wspólnego zasobu” – przykład motywujący



Gra

- Nieformalnie, ”z życia”:
  Gra – dowolna sytuacja, w której mamy co najmniej 2 jednostki (gracze) podejmujące decyzje (tu uwaga!), każda kieruje się swoim własnym celem (zmaksymalizować wypłatę), przy czym wypłata gracza zależy także od decyzji podjętych przez pozostałych graczy.

Gra

- Nieformalnie, ”z życia”:
  Gra – dowolna sytuacja, w której mamy co najmniej 2 jednostki (gracze) podejmujące decyzje (tu uwaga!), każda kieruje się swoim własnym celem (zmaksymalizować wypłatę), przy czym wypłata gracza zależy także od decyzji podjętych przez pozostałych graczy.
- Półformalnie:
  Gra – dowolna sytuacja, w której każdy z co najmniej 2 graczy spośród dostępnych mu strategii wybiera taką, która maksymalizuje jego funkcję wypłaty, przy czym funkcje wypłaty graczy zależą od całego profilu strategii – wyboru decyzji wszystkich graczy.

Gra

- Nieformalnie, ”z życia”:
  Gra – dowolna sytuacja, w której mamy co najmniej 2 jednostki (gracze) podejmujące decyzje (tu uwaga!), każda kieruje się swoim własnym celem (zmaksymalizować wypłatę), przy czym wypłata gracza zależy także od decyzji podjętych przez pozostałych graczy.
- Półformalnie:
  Gra – dowolna sytuacja, w której każdy z co najmniej 2 graczy spośród dostępnych mu strategii wybiera taką, która maksymalizuje jego funkcję wypłaty, przy czym funkcje wypłaty graczy zależą od całego profilu strategii – wyboru decyzji wszystkich graczy.
- Strategia – określa, jakie decyzje będziemy podejmować we wszystkich możliwych sytuacjach podczas gry (przez cały jej przebieg).

Gra

- Nieformalnie, "z życia":
  Gra – dowolna sytuacja, w której mamy co najmniej 2 jednostki (gracze) podejmujące decyzje (tu uwaga!), każda kieruje się swoim własnym celem (zmaksymalizować wypłatę), przy czym wypłata gracza zależy także od decyzji podjętych przez pozostałych graczy.
- Półformalnie:
  Gra – dowolna sytuacja, w której każdy z co najmniej 2 graczy spośród dostępnych mu strategii wybiera taką, która maksymalizuje jego funkcję wypłaty, przy czym funkcje wypłaty graczy zależą od całego profilu strategii – wyboru decyzji wszystkich graczy.
- Strategia – określa, jakie decyzje będziemy podejmować we wszystkich możliwych sytuacjach podczas gry (przez cały jej przebieg).
- Strategia – funkcja przyporządkowująca każdej sytuacji w grze decyzję.

Gra

- Formalnie
  Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:
  - Zbiór graczy – najczęściej $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$,

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gra

- Formalnie
  Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:
  - Zbiór graczy – najczęściej $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$, ale czasem continuum $[0, 1]$ z miarą Lebesgue'a;

Gra

- Formalnie
  Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:
  - Zbiór graczy – najczęściej $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$, ale czasem continuum $[0, 1]$ z miarą Lebesgue'a;
  - Zbiory strategii graczy: $\mathbb{S}_i$;

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gra

- Formalnie
  Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:
  - Zbiór graczy – najczęściej $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$, ale czasem continuum $[0, 1]$ z miarą Lebesgue'a;
  - Zbiory strategii graczy: $\mathbb{S}_i$;
  - Funkcje wypłaty graczy $\Pi_i(S_1, \ldots, S_n)$.

Gra

- Formalnie
  Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:
  - Zbiór graczy – najczęściej $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$, ale czasem continuum $[0, 1]$ z miarą Lebesgue'a;
  - Zbiory strategii graczy: $\mathbb{S}_i$;
  - Funkcje wypłaty graczy $\Pi_i(S_1, \ldots, S_n)$.
- S – profil strategii;

Gra

- Formalnie
  Gra w postaci strategicznej jest definiowana przez:
  - Zbiór graczy – najczęściej $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n\}$, ale czasem continuum $[0, 1]$ z miarą Lebesgue'a;
  - Zbiory strategii graczy: $\mathbb{S}_i$;
  - Funkcje wypłaty graczy $\Pi_i(S_1, \ldots, S_n)$.
- S – profil strategii;
- Wprowadzimy wygodny inny zapis profilu, tak żeby podkreślić własny wybór gracza i
  $[s, S_{-i}]$ – profil S ze strategią gracza i zamienioną na s.

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- Formalnie: równowaga Nasha – taki profil strategii S, że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in \mathbb{S}_i$ $\Pi_i([s, S_{-i}]) \leq \Pi_i(S)$.

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- Formalnie: równowaga Nasha – taki profil strategii S, że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in \mathbb{S}_i$ $\Pi_i([s, S_{-i}]) \leq \Pi_i(S)$.
- Jedyny profil w strategii, jaki może utrzymać się w grze.

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- Formalnie: równowaga Nasha – taki profil strategii S, że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in \mathbb{S}_i$ $\Pi_i([s, S_{-i}]) \leq \Pi_i(S)$.
- Jedyny profil w strategii, jaki może utrzymać się w grze.
- Profil strategii $\bar{S}$ jest optymalny w sensie Pareto, jeśli nie istnieje profil S lepszy w sensie Pareto,

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- Formalnie: równowaga Nasha – taki profil strategii S, że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in \mathbb{S}_i$ $\Pi_i([s, S_{-i}]) \leq \Pi_i(S)$.
- Jedyny profil w strategii, jaki może utrzymać się w grze.
- Profil strategii $\bar{S}$ jest optymalny w sensie Pareto, jeśli nie istnieje profil S lepszy w sensie Pareto, czyli taki, który daje wyższą wypłatę co najmniej jednemu graczowi

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- Formalnie: równowaga Nasha – taki profil strategii S, że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in \mathbb{S}_i$ $\Pi_i([s, S_{-i}]) \leq \Pi_i(S)$.
- Jedyny profil w strategii, jaki może utrzymać się w grze.
- Profil strategii $\bar{S}$ jest optymalny w sensie Pareto, jeśli nie istnieje profil S lepszy w sensie Pareto, czyli taki, który daje wyższą wypłatę co najmniej jednemu graczowi ($\exists i \in \mathbb{I}\ \Pi_i(S) > \Pi_i(\bar{S})$), a niemniejszą wszystkim

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- Formalnie: równowaga Nasha – taki profil strategii S, że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in \mathbb{S}_i$ $\Pi_i([s, S_{-i}]) \leq \Pi_i(S)$.
- Jedyny profil w strategii, jaki może utrzymać się w grze.
- Profil strategii $\bar{S}$ jest optymalny w sensie Pareto, jeśli nie istnieje profil S lepszy w sensie Pareto, czyli taki, który daje wyższą wypłatę co najmniej jednemu graczowi ($\exists i \in \mathbb{I}\ \Pi_i(S) > \Pi_i(\bar{S})$), a niemniejszą wszystkim ($\forall i \in \mathbb{I}\ \Pi_i(S) \geq \Pi_i(\bar{S})$).

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- Formalnie: równowaga Nasha – taki profil strategii S, że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in \mathbb{S}_i$ $\Pi_i([s, S_{-i}]) \leq \Pi_i(S)$.
- Jedyny profil w strategii, jaki może utrzymać się w grze.
- Profil strategii $\bar{S}$ jest optymalny w sensie Pareto, jeśli nie istnieje profil S lepszy w sensie Pareto, czyli taki, który daje wyższą wypłatę co najmniej jednemu graczowi ($\exists i \in \mathbb{I}\ \Pi_i(S) > \Pi_i(\bar{S})$), a niemniejszą wszystkim ($\forall i \in \mathbb{I}\ \Pi_i(S) \geq \Pi_i(\bar{S})$).
- Czyli nie da się nikomu polepszyć nie pogarszając innym.

Równowaga Nasha i optymalność w sensie Pareto

- Równowaga Nasha – taki wybór strategii przez graczy, że żadnemu nie opłaca się zmienić strategii, jeśli pozostali nie zmienili swoich.
- Formalnie: równowaga Nasha – taki profil strategii S, że dla każdego gracza i i każdej strategii $s \in \mathbb{S}_i$ $\Pi_i([s, S_{-i}]) \leq \Pi_i(S)$.
- Jedyny profil w strategii, jaki może utrzymać się w grze.
- Profil strategii $\bar{S}$ jest optymalny w sensie Pareto, jeśli nie istnieje profil S lepszy w sensie Pareto, czyli taki, który daje wyższą wypłatę co najmniej jednemu graczowi ($\exists i \in \mathbb{I}\ \Pi_i(S) > \Pi_i(\bar{S})$), a niemniejszą wszystkim ($\forall i \in \mathbb{I}\ \Pi_i(S) \geq \Pi_i(\bar{S})$).
- Czyli nie da się nikomu polepszyć nie pogarszając innym.
- Bardzo słaba własność!

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

- Jak liczymy równowagę Nasha?

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

- Jak liczymy równowagę Nasha?
- Jako punkt stały odzworowanie najlepszej odpowiedzi $B : \Sigma \to \Sigma$ zdefiniowanego przez $B_i(S) = \mathrm{Argmax}_{s \in \mathbb{S}_i} \Pi_i([s, S_{-i}])$,

- Jak liczymy równowagę Nasha?
- Jako punkt stały odzworowanie najlepszej odpowiedzi $B : \Sigma \to \Sigma$ zdefiniowanego przez $B_i(S) = \mathrm{Argmax}_{s \in \mathbb{S}_i} \Pi_i([s, S_{-i}])$,
- czyli taki profil $\bar{S}$, że $\bar{S} \in B(\bar{S})$.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

- Jak liczymy równowagę Nasha?
- Jako punkt stały odzworowanie najlepszej odpowiedzi $B : \Sigma \to \Sigma$ zdefiniowanego przez $B_i(S) = \mathrm{Argmax}_{s \in \mathbb{S}_i} \Pi_i([s, S_{-i}])$,
- czyli taki profil $\bar{S}$, że $\bar{S} \in B(\bar{S})$.
- Powyższe sformułowanie ma ładny zwarty zapis, ale $B_i(S)$ zależy tylko od S_{-i}, więc pomijamy nieistotne kawałki i piszemy $\forall i\ \bar{S}_i \in B_i(S_{-i})$.

Proste gry statyczne

- Jak zapisać grę, w której jest 2 graczy i każdy ma kilka strategii?

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Proste gry statyczne

- Jak zapisać grę, w której jest 2 graczy i każdy ma kilka strategii?

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Strategie gracza 2} \downarrow \\
 & & \begin{array}{cccc} \quad a \quad & \quad b \quad & \quad c \quad & \quad d \quad \end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Strategie} \\ \text{gracza 1} \\ \rightarrow\end{array} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} (2,3) & (-1,5) & (5,1) & (3,6) \\ (4,1) & (17,2) & (2,1) & (1,1) \\ (4,5) & (1,7) & (0,15) & (0,2) \\ (3,6) & (1,7) & (0,12) & (-1,3) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Gra koordynacji

- Gra koordynacji, czyli którą stroną drogi jeździć

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad P \quad & \quad L \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ L \end{array} & \begin{bmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Gra koordynacji

- Gra koordynacji, czyli którą stroną drogi jeździć

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & L \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ L \end{array} & \begin{bmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Dwie równowagi Nasha (P, P) i (L, L).

Dylemat więźnia

- Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- Dostają od śledczego propozycję współpracy.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Dylemat więźnia

- Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- Dostają od śledczego propozycję współpracy.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S & NS \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ NS \end{array} & \begin{bmatrix} (-15,-15) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-3,-3) \end{bmatrix} \end{array}$$

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Dylemat więźnia

- Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- Dostają od śledczego propozycję współpracy.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S & NS \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ NS \end{array} & \begin{bmatrix} (-15,-15) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-3,-3) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.

Dylemat więźnia

- Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- Dostają od śledczego propozycję współpracy.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \color{blue}{S} & NS \end{array} \\
\begin{array}{c} \color{blue}{S} \\ NS \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \color{blue}{(-15,-15)} & (0,-20) \\ (-20,0) & (-3,-3) \end{array} \right]
\end{array}
$$

- Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.
- Jedyna równowaga Nasha to (S, S).

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Dylemat więźnia

- Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- Dostają od śledczego propozycję współpracy.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S & NS \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ NS \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (-15,-15) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-3,-3) \end{array}\right] \end{array}$$

- Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.
- Jedyna równowaga Nasha to (S, S).
- A przecież $-15 < -3$! Brak optymalności w sensie Pareto.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Dylemat więźnia

- Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- Dostają od śledczego propozycję współpracy.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S & NS \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ NS \end{array} & \begin{bmatrix} (-15,-15) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-3,-3) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.
- Jedyna równowaga Nasha to (S, S).
- A przecież $-15 < -3$! Brak optymalności w sensie Pareto.
- A dylemat więźnia, to nie tylko ta jedna konkretna gra, ale opis wielu sytuacji podejmowania decyzji na codzień.

Dylemat więźnia

- Dwóch kryminalistów, złapanych w kradzionym samochodzie, który był użyty do napadu na bank, zamkniętych w osobnych celach.
- Dostają od śledczego propozycję współpracy.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S & NS \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ NS \end{array} & \begin{bmatrix} (-15,-15) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-3,-3) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Cokolwiek zrobi drugi z graczy, mnie opłaca się sypać.
- Jedyna równowaga Nasha to (S, S).
- A przecież $-15 < -3$! Brak optymalności w sensie Pareto.
- A dylemat więźnia, to nie tylko ta jedna konkretna gra, ale opis wielu sytuacji podejmowania decyzji na codzień.
- Większość norm prawnych i kulturowych powstała, żeby wymuszać rozwiązanie kooperacyjne w dylematach więźnia lub ustalać, którą z równowag wybrać w grach kooperacji.

"Chicken " lub walka o terytorium

- Gra w tchórza, walka o terytorium albo jastrzębie i gołębie
  Gra nastolatków z dwoma samochodami jadącymi naprzeciwko siebie.

"Chicken " lub walka o terytorium

- Gra w tchórza, walka o terytorium albo jastrzębie i gołębie
  Gra nastolatków z dwoma samochodami jadącymi naprzeciwko siebie.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Z & NZ \end{array} \\ \begin{array}{c} Z \\ NZ \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (1,1) & (0,2) \\ (2,0) & (-1,-1) \end{array}\right] \end{array}$$

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

"Chicken " lub walka o terytorium

- Gra w tchórza, walka o terytorium albo jastrzębie i gołębie
  Gra nastolatków z dwoma samochodami jadącymi naprzeciwko siebie.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Z & NZ \end{array} \\ \begin{array}{c} Z \\ NZ \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (1,1) & (0,2) \\ (2,0) & (-1,-1) \end{array}\right] \end{array}$$

- Dwie równowagi Nasha: (Z, NZ) i (NZ, Z).

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

"Matching pennies"

- *Matching pennies* czyli Zgaduj-zgadula, w której ręce złota kula

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} O & R \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ R \end{array} & \begin{bmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

"Matching pennies"

- *Matching pennies* czyli Zgaduj-zgadula, w której ręce złota kula

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} O & R \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ R \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{array}\right] \end{array}$$

- Nie ma równowagi Nasha.

Wspólne łowisko/pastwisko po raz pierwszy

- Pięciu rybaków z Jastarni, z których każdy ma po 2 kutry, sprzedaje swój połow na wspólnym targu.
- Każdy użyty kuter wyławia 1 tonę śledzia.
- Cena, po której mogą sprzedać ryby to $13 - q$ za tonę, gdzie q to łączna liczba wyłowionych ton ryb.
- Koszty pracy każdego statku to 1.

Wspólne łowisko/pastwisko po raz pierwszy

- Pięciu rybaków z Jastarni, z których każdy ma po 2 kutry, sprzedaje swój połow na wspólnym targu.
- Każdy użyty kuter wyławia 1 tonę śledzia.
- Cena, po której mogą sprzedać ryby to $13 - q$ za tonę, gdzie q to łączna liczba wyłowionych ton ryb.
- Koszty pracy każdego statku to 1.
- Wypłata gracza i to zatem $(13 - (S_1 + \cdots + S_5)) \cdot S_i - 1 \cdot S_i$, gdzie S_i to liczba jego kutrów wysłanych na połów.

Wspólne łowisko/pastwisko po raz pierwszy

- Pięciu rybaków z Jastarni, z których każdy ma po 2 kutry, sprzedaje swój połow na wspólnym targu.
- Każdy użyty kuter wyławia 1 tonę śledzia.
- Cena, po której mogą sprzedać ryby to $13 - q$ za tonę, gdzie q to łączna liczba wyłowionych ton ryb.
- Koszty pracy każdego statku to 1.
- Wypłata gracza i to zatem $(13 - (S_1 + \cdots + S_5)) \cdot S_i - 1 \cdot S_i$, gdzie S_i to liczba jego kutrów wysłanych na połów.
- Wypłata każdego z graczy jest ściśle rosnąca względem liczby własnych statków przy dowolnej osiągalnej liczbie innych statków.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Wspólne łowisko/pastwisko po raz pierwszy

- Pięciu rybaków z Jastarni, z których każdy ma po 2 kutry, sprzedaje swój połow na wspólnym targu.
- Każdy użyty kuter wyławia 1 tonę śledzia.
- Cena, po której mogą sprzedać ryby to $13 - q$ za tonę, gdzie q to łączna liczba wyłowionych ton ryb.
- Koszty pracy każdego statku to 1.
- Wypłata gracza i to zatem $(13 - (S_1 + \cdots + S_5)) \cdot S_i - 1 \cdot S_i$, gdzie S_i to liczba jego kutrów wysłanych na połów.
- Wypłata każdego z graczy jest ściśle rosnąca względem liczby własnych statków przy dowolnej osiągalnej liczbie innych statków.
- Jedyna równowaga Nasha $(2, 2, 2, 2, 2)$ dająca wypłatę 4 każdemu graczowi, podczas gdy profil $(1, 1, 1, 1, 1)$ daje wypłaty 7!

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$,

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- w pewnym systemie, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- w pewnym systemie, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera decyzję ze zbioru $\mathbb{D}_i$.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- w pewnym systemie, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera decyzję ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$,

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- w pewnym systemie, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera decyzję ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- w pewnym systemie, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera decyzję ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Wypłata ma postać $\Pi_i(S) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} P_i(S(t), X(t))\delta^t (+G(X(T+1)\delta_i^{T+1})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T P_i(S(t), X(t))\delta^t dt (+G(X(T))\delta_i^T)$ przy czasie ciągłym;

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- w pewnym systemie, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera decyzję ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Wypłata ma postać $\Pi_i(S) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} P_i(S(t), X(t))\delta^t(+G(X(T+1)\delta_i^{T+1})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T P_i(S(t), X(t))\delta^t dt(+G(X(T))\delta_i^T)$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- w pewnym systemie, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera decyzję ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Wypłata ma postać $\Pi_i(S) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} P_i(S(t), X(t))\delta^t (+G(X(T+1)\delta_i^{T+1})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T P_i(S(t), X(t))\delta^t dt (+G(X(T))\delta_i^T)$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$ ($\bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{\text{czas po } T\}$) jest zdefiniowane przez równania
  - $X(t+1) = \phi(X(t), S(t))$ przy czasie dyskretnym $t \in \mathbb{T}$,
  - $\dot{X}(t) = \phi(X(t), S(t))$ przy czasie ciągłym

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu

- rozgrywane w czasie $\mathbb{T}$, dyskretnym $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ lub ciągłym $\mathbb{T} = [0, T]$ dla T skończonego lub nieskończonego;
- w pewnym systemie, o zbiorze stanów $\mathbb{X}$.
- Gracz i w każdej chwili $\mathbb{T}$ wybiera decyzję ze zbioru $\mathbb{D}_i$.
- A więc strategie $\mathbb{S}_i$ – funkcje z $\mathbb{T}$ w $\mathbb{D}_i$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Wypłata ma postać $\Pi_i(S) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} P_i(S(t), X(t))\delta^t (+G(X(T+1)\delta_i^{T+1})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T P_i(S(t), X(t))\delta^t dt (+G(X(T))\delta_i^T)$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$ ($\bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{\text{czas po } T\}$) jest zdefiniowane przez równania
  - $X(t+1) = \phi(X(t), S(t))$ przy czasie dyskretnym $t \in \mathbb{T}$,
  - $\dot{X}(t) = \phi(X(t), S(t))$ przy czasie ciągłym (p.w.!);
  - z warunkiem początkowym $X(0) = x_0$.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu cd.

- Powiązanie ze stopą procentową $r_i \geq 0$
  - przy czasie dyskretnym, $\delta_i = \frac{1}{1+r_i}$
  - przy czasie ciągłym $\delta_i = e^{-r_i}$;

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu cd.

- Powiązanie ze stopą procentową $r_i \geq 0$
  - przy czasie dyskretnym, $\delta_i = \frac{1}{1+r_i}$
  - przy czasie ciągłym $\delta_i = e^{-r_i}$;
- Obliczenie równowagi Nasha w grze dynamicznej – równoczesne rozwiązanie problemów optymalizacji dynamicznej dla wszystkich graczy

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu cd.

- Powiązanie ze stopą procentową $r_i \geq 0$
  - przy czasie dyskretnym, $\delta_i = \frac{1}{1+r_i}$
  - przy czasie ciągłym $\delta_i = e^{-r_i}$;
- Obliczenie równowagi Nasha w grze dynamicznej – równoczesne rozwiązanie problemów optymalizacji dynamicznej dla wszystkich graczy – każdy względem swojej strategii.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu cd.

- Powiązanie ze stopą procentową $r_i \geq 0$
  - przy czasie dyskretnym, $\delta_i = \frac{1}{1+r_i}$
  - przy czasie ciągłym $\delta_i = e^{-r_i}$;
- Obliczenie równowagi Nasha w grze dynamicznej – równoczesne rozwiązanie problemów optymalizacji dynamicznej dla wszystkich graczy – każdy względem swojej strategii.
- W grach dynamicznych obliczanie równowagi Nasha łączy ze sobą optymalizację dynamiczną

Gry dynamiczne w najprostszym ujęciu cd.

- Powiązanie ze stopą procentową $r_i \geq 0$
  - przy czasie dyskretnym, $\delta_i = \frac{1}{1+r_i}$
  - przy czasie ciągłym $\delta_i = e^{-r_i}$;
- Obliczenie równowagi Nasha w grze dynamicznej – równoczesne rozwiązanie problemów optymalizacji dynamicznej dla wszystkich graczy – każdy względem swojej strategii.
- W grach dynamicznych obliczanie równowagi Nasha łączy ze sobą optymalizację dynamiczną z szukaniem punktu stałego odwzorowania najlepszej odpowiedzi w przestrzeni profili strategii (przestrzeń funkcyjna).

Gry dynamiczne cd.

Gry dynamiczne cd.

- Tzw. struktura informacyjna ma znaczenie tzn. możemy rozważać strategie jako funkcje stanu (bieżącego)

Gry dynamiczne cd.

- Tzw. struktura informacyjna ma znaczenie tzn. możemy rozważać strategie jako funkcje stanu (bieżącego), stanu i czasu

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gry dynamiczne cd.

- Tzw. struktura informacyjna ma znaczenie tzn. możemy rozważać strategie jako funkcje stanu (bieżącego), stanu i czasu, stanu i historii posunięć graczy...

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gry dynamiczne cd.

- Tzw. struktura informacyjna ma znaczenie tzn. możemy rozważać strategie jako funkcje stanu (bieżącego), stanu i czasu, stanu i historii posunięć graczy...
- Zapis gry powyżej oznacza strukturę informacyjną/strategie otwartej pętli.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Gry dynamiczne cd.

- Tzw. struktura informacyjna ma znaczenie tzn. możemy rozważać strategie jako funkcje stanu (bieżącego), stanu i czasu, stanu i historii posunięć graczy...
- Zapis gry powyżej oznacza strukturę informacyjną/strategie otwartej pętli.
- Dla innych struktur informacyjnych zamiast $S(t)$ mamy $S(X(t))$, $S(X(t), t)$ itd.

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$,

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Maksymalizowana wypłata ma postać $\Pi(u) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0}(+G(X(T+1)\delta^{T+1-t_0})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0} dt(+G(X(T))\delta^{T-t_0}$ przy czasie ciągłym;

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Maksymalizowana wypłata ma postać $\Pi(u) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0}(+G(X(T+1)\delta^{T+1-t_0})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0} dt(+G(X(T))\delta^{T-t_0}$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Maksymalizowana wypłata ma postać $\Pi(u) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0}(+G(X(T+1)\delta^{T+1-t_0})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0} dt(+G(X(T))\delta^{T-t_0}$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$ ($\bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{\text{czas po } T\}$) jest zdefiniowane przez równania
  - $X(t+1) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie dyskretnym $t \in \mathbb{T}$,

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Maksymalizowana wypłata ma postać $\Pi(u) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0}(+G(X(T+1)\delta^{T+1-t_0})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0} dt(+G(X(T))\delta^{T-t_0}$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$ ($\bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{\text{czas po } T\}$) jest zdefiniowane przez równania
  - $X(t+1) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie dyskretnym $t \in \mathbb{T}$,
  - $\dot{X}(t) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie ciągłym

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Maksymalizowana wypłata ma postać $\Pi(u) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0}(+G(X(T+1)\delta^{T+1-t_0})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0} dt(+G(X(T))\delta^{T-t_0}$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$ ($\bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{\text{czas po } T\}$) jest zdefiniowane przez równania
  - $X(t+1) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie dyskretnym $t \in \mathbb{T}$,
  - $\dot{X}(t) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie ciągłym (p.w.!);

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Maksymalizowana wypłata ma postać $\Pi(u) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0}(+G(X(T+1)\delta^{T+1-t_0})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0} dt(+G(X(T))\delta^{T-t_0}$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$ ($\bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{\text{czas po } T\}$) jest zdefiniowane przez równania
  - $X(t+1) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie dyskretnym $t \in \mathbb{T}$,
  - $\dot{X}(t) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie ciągłym (p.w.!);
  - z warunkiem początkowym $X(t_0) = x_0$.
- Powiązanie ze stopą procentową $r \geq 0$
  - przy czasie dyskretnym, $\delta = \frac{1}{1+r}$

Optymalizacja dynamiczna

- Jeden podejmujący decyzje.
- Czas $\mathbb{T}$, system o zbiorze stanów $\mathbb{X}$, wybór ze zbioru parametrów sterujących $\mathbb{U}$.
- Sterowania w najprostszym ujęciu – otwartej pętli $\mathcal{U}^{OL}$ – funkcje z $u : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$, mierzalne w przypadku czasu ciągłego.
- Maksymalizowana wypłata ma postać $\Pi(u) =$
  - $= \sum_{t=0}^{T} g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0}(+G(X(T+1)\delta^{T+1-t_0})$ przy czasie dyskretnym,
  - $= \int_0^T g(U(t), X(t), t)\delta^{t-t_0} dt(+G(X(T))\delta^{T-t_0}$ przy czasie ciągłym;
- gdzie $X : \bar{\mathbb{T}} \to \mathbb{X}$ ($\bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{\text{czas po } T\}$) jest zdefiniowane przez równania
  - $X(t+1) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie dyskretnym $t \in \mathbb{T}$,
  - $\dot{X}(t) = \phi(X(t), U(t), t)$ przy czasie ciągłym (p.w.!);
  - z warunkiem początkowym $X(t_0) = x_0$.
- Powiązanie ze stopą procentową $r \geq 0$
  - przy czasie dyskretnym, $\delta = \frac{1}{1+r}$

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym);

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym); ozn. $\mathcal{U}^{CL}$.

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym); ozn. $\mathcal{U}^{CL}$.
  - w postaci sprzężenia zwrotnego (feedback) znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym); ozn. $\mathcal{U}^{CL}$.
  - w postaci sprzężenia zwrotnego (feedback) znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym)

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym); ozn. $\mathcal{U}^{CL}$.
  - w postaci sprzężenia zwrotnego (feedback) znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym) , ale nie musimy znać stanu początkowego;

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym); ozn. $\mathcal{U}^{CL}$.
  - w postaci sprzężenia zwrotnego (feedback) znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym) , ale nie musimy znać stanu początkowego; ozn $\mathcal{U}^{F}$.

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym); ozn. $\mathcal{U}^{CL}$.
  - w postaci sprzężenia zwrotnego (feedback) znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym) , ale nie musimy znać stanu początkowego; ozn $\mathcal{U}^{F}$.
- Konieczne dodatkowe założenia, żeby zagwarantować istnienie i jednoznaczność trajektorii dla ustalonego warunku początkowego

Struktura informacyjna

- Powyżej – otwartej pętli (bo najprostszy zapis)
- Inne struktury informacyjne (jaką wiedzą dysponujemy przy konstrukcji strategii)
  - zamkniętej pętli: znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym); ozn. $\mathcal{U}^{CL}$.
  - w postaci sprzężenia zwrotnego (feedback) znamy obecny stan systemu $u : \mathbb{X} \to \mathbb{U}$ lub znamy obecny stan systemu i czas $u : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ (przy T skończonym) , ale nie musimy znać stanu początkowego; ozn $\mathcal{U}^{F}$.
- Konieczne dodatkowe założenia, żeby zagwarantować istnienie i jednoznaczność trajektorii dla ustalonego warunku początkowego
- Jak to działa, to nieważne, jakiej struktury informacyjnej używamy – bo mamy równoważność.

Struktura informacyjna – gry

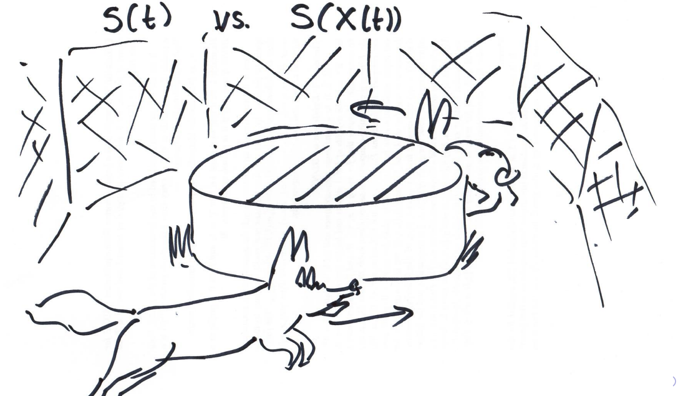
- A w grach dynamicznych przy innych strukturach informacyjnych dojdziemy przeważnie do innych równowag Nasha!

Struktura informacyjna – gry

- A w grach dynamicznych przy innych strukturach informacyjnych dojdziemy przeważnie do innych równowag Nasha!
- I różne metody szukania sterowania optymalnego prowadzą do różnych równowag

Struktura informacyjna – gry

- A w grach dynamicznych przy innych strukturach informacyjnych dojdziemy przeważnie do innych równowag Nasha!
- I różne metody szukania sterowania optymalnego prowadzą do różnych równowag



Rozwiązywanie optymalizacji dynamicznej

- Mnożniki Lagrange'a i ich ciągły odpowiednik –

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Rozwiązywanie optymalizacji dynamicznej

- Mnożniki Lagrange'a i ich ciągły odpowiednik – zasada maksimum Pontriagina

Rozwiązywanie optymalizacji dynamicznej

- Mnożniki Lagrange'a i ich ciągły odpowiednik – zasada maksimum Pontriagina
  - Obliczają optymalne sterowanie w postaci otwartej pętli...

Rozwiązywanie optymalizacji dynamicznej

- Mnożniki Lagrange'a i ich ciągły odpowiednik – zasada maksimum Pontriagina
  - Obliczają optymalne sterowanie w postaci otwartej pętli... i można przy ich pomocy liczyć równowagi otwartej pętli.
  - Równanie Bellmana lub Bellmana-Hamiltona-Jacobiego, HJB
    - Obliczają optymalne sterowanie w postaci sprzężenia zwrotnego ...

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Rozwiązywanie optymalizacji dynamicznej

- Mnożniki Lagrange'a i ich ciągły odpowiednik – zasada maksimum Pontriagina
  - Obliczają optymalne sterowanie w postaci otwartej pętli... i można przy ich pomocy liczyć równowagi otwartej pętli.
  - Równanie Bellmana lub Bellmana-Hamiltona-Jacobiego, HJB
    - Obliczają optymalne sterowanie w postaci sprzężenia zwrotnego ... i można przy ich pomocy liczyć równowagi w postaci sprzężenia zwrotnego.

Czas dyskretny – równanie Bellmana – skończony horyzont

- ”Mamy rozwiązać zagadnienie dla ustalonego warunku początkowego (x_0, t_0),

Czas dyskretny – równanie Bellmana – skończony horyzont

- "Mamy rozwiązać zagadnienie dla ustalonego warunku początkowego (x_0, t_0), ale po co się ograniczać – zróbmy dla dowolnego $(x, t) \in \mathbb{X} \times \bar{\mathbb{T}}$".
- Definiujemy $\bar{V}(x, t) = \sup_{U \in \mathcal{U}^F} \Pi(U, x, t)$ funkcja wartości.

Czas dyskretny – równanie Bellmana – skończony horyzont

- ”Mamy rozwiązać zagadnienie dla ustalonego warunku początkowego (x_0, t_0), ale po co się ograniczać – zróbmy dla dowolnego $(x, t) \in \mathbb{X} \times \bar{\mathbb{T}}$”.
- Definiujemy $\bar{V}(x, t) = \sup_{U \in \mathcal{U}^F} \Pi(U, x, t)$ funkcja wartości.
- Równanie Bellmana (RB) dla każdego $x \in \mathbb{X}$, $t \in \mathbb{T}$
$V(x, t) = \sup_{u \in \mathbb{U}} g(x, u, t) + \delta V(\phi(x, u, t), t + 1)$
- z warunkiem końcowym (WK) dla każdego $x \in \mathbb{X}$
$V(x, T + 1) = G(x)$.

Czas dyskretny – równanie Bellmana – skończony horyzont

- "Mamy rozwiązać zagadnienie dla ustalonego warunku początkowego (x_0, t_0), ale po co się ograniczać – zróbmy dla dowolnego $(x,t) \in \mathbb{X} \times \bar{\mathbb{T}}$".
- Definiujemy $\bar{V}(x,t) = \sup_{U \in \mathcal{U}^F} \Pi(U,x,t)$ funkcja wartości.
- Równanie Bellmana (RB) dla każdego $x \in \mathbb{X}$, $t \in \mathbb{T}$ $V(x,t) = \sup_{u \in \mathbb{U}} g(x,u,t) + \delta V(\phi(x,u,t), t+1)$
- z warunkiem końcowym (WK) dla każdego $x \in \mathbb{X}$ $V(x, T+1) = G(x)$.

Twierdzenie Funkcja $V : \mathbb{X} \times \bar{\mathbb{T}}$ spełnia (RB) i (WK) wtedy i tylko wtedy gdy $V = \bar{V}$.
Sterowanie $\bar{U}$ spełnia
$\bar{U}(x,t) \in \mathrm{Argmax}_{u \in \mathbb{U}}\, g(x,u) + \delta \bar{V}(\phi(x,u), t+1)\ \forall (x,u)$ (IB)
wtedy i tylko wtedy gdy jest sterowaniem optymalnym.

Czas dyskretny – równanie Bellmana – nieskończony horyzont

- Równanie Bellmana j.w.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Czas dyskretny – równanie Bellmana – nieskończony horyzont

- Równanie Bellmana j.w.
- Jeśli g, ϕ niezależne od t, to $\bar{V}$ i optymalne sterowanie też.

Czas dyskretny – równanie Bellmana – nieskończony horyzont

- Równanie Bellmana j.w.
- Jeśli g, ϕ niezależne od t, to $\bar{V}$ i optymalne sterowanie też.
- Warunek końcowy (standardowy) (WK∞) $\limsup_{t\to\infty} V(X(t))\delta^t = 0$ $\forall X$ osiągalnej.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Czas dyskretny – równanie Bellmana – nieskończony horyzont

- Równanie Bellmana j.w.
- Jeśli g, ϕ niezależne od t, to $\bar{V}$ i optymalne sterowanie też.
- Warunek końcowy (standardowy) (WK∞) $\limsup_{t \to \infty} V(X(t))\delta^t = 0 \ \forall X$ osiągalnej.
- (RB)+(WK∞)+(IB) $\Rightarrow V = \bar{V}$ i $\bar{U}$ jest sterowaniem optymalnym.

Wspólne łowisko po raz drugi

- Teraz nasi gracze to kraje nadbałtyckie

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Wspólne łowisko po raz drugi

- Teraz nasi gracze to kraje nadbałtyckie, które mają możliwość wpływu na stan populacji.

Wspólne łowisko po raz drugi

- Teraz nasi gracze to kraje nadbałtyckie, które mają możliwość wpływu na stan populacji.
- Decyzje graczy to nadal $\{0, 1, 2\}$, teraz „statek” to intensywność połowu.
- Gra toczy się przez dwa okresy (0 i 1), czynnikiem dyskontowym jest $\delta = \frac{1}{2}$.
- Początkowy stan populacji to 1.
  - Łączna intensywność do 5 włącznie nie zmienia stanu populacji ryb.

Wspólne łowisko po raz drugi

- Teraz nasi gracze to kraje nadbałtyckie, które mają możliwość wpływu na stan populacji.
- Decyzje graczy to nadal $\{0, 1, 2\}$, teraz „statek” to intensywność połowu.
- Gra toczy się przez dwa okresy (0 i 1), czynnikiem dyskontowym jest $\delta = \frac{1}{2}$.
- Początkowy stan populacji to 1.
  - Łączna intensywność do 5 włącznie nie zmienia stanu populacji ryb.
  - Jeśli łączna intensywność przekroczy 5, ale nie przekroczy 7, stan populacji ryb zmniejsza się o połowę,

Wspólne łowisko po raz drugi

- Teraz nasi gracze to kraje nadbałtyckie, które mają możliwość wpływu na stan populacji.
- Decyzje graczy to nadal $\{0, 1, 2\}$, teraz „statek” to intensywność połowu.
- Gra toczy się przez dwa okresy (0 i 1), czynnikiem dyskontowym jest $\delta = \frac{1}{2}$.
- Początkowy stan populacji to 1.
  - Łączna intensywność do 5 włącznie nie zmienia stanu populacji ryb.
  - Jeśli łączna intensywność przekroczy 5, ale nie przekroczy 7, stan populacji ryb zmniejsza się o połowę,
  - a jeśli przekroczy 7, to stan zmniejsza się do pewnego małego $\epsilon > 0$.
- Przy stanie x każdy „statek” łowi x jednostek ryb, ponadto koszty rosną $\frac{1}{x}$ razy. ϵ jest na tyle małe, że w tym stanie bieżąca wypłata dla dodatnich połowów jest zawsze ujemna.
- Wypłata końcowa 0.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

Wspólne łowisko – równowaga w postaci sprzężenia zwrotnego

- Zaczynamy od $t = 2$. $V_i(x, 2) \equiv 0$, dla każdego gracza i, bo wypłata końcowa to zero.
- Liczymy najpierw $\bar{V}_i(x, 1)$ dla $x \in \{\epsilon, \frac{1}{2}, 1\}$ z $(\mathrm{RB})_i$, znając $V_i(y, 2)$ dla każdego możliwego y, rozwiązując układ równań na $S_i(x, 1)$ z $(\mathrm{IB})_i$ (równocześnie dla wszystkich graczy)

Wspólne łowisko – równowaga w postaci sprzężenia zwrotnego

- Zaczynamy od $t = 2$. $V_i(x, 2) \equiv 0$, dla każdego gracza i, bo wypłata końcowa to zero.
- Liczymy najpierw $\bar{V}_i(x, 1)$ dla $x \in \{\epsilon, \frac{1}{2}, 1\}$ z $(\mathrm{RB})_i$, znając $V_i(y, 2)$ dla każdego możliwego y, rozwiązując układ równań na $S_i(x, 1)$ z $(\mathrm{IB})_i$ (równocześnie dla wszystkich graczy)
  - Tak jakbyśmy się liczyli zwykłą r. Nasha dla gry z wypłatą równą funkcji po prawej stronie (RB)
  - $S_i(1, 1) = 2$ i $V_i(1, 1) = 4$;

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.

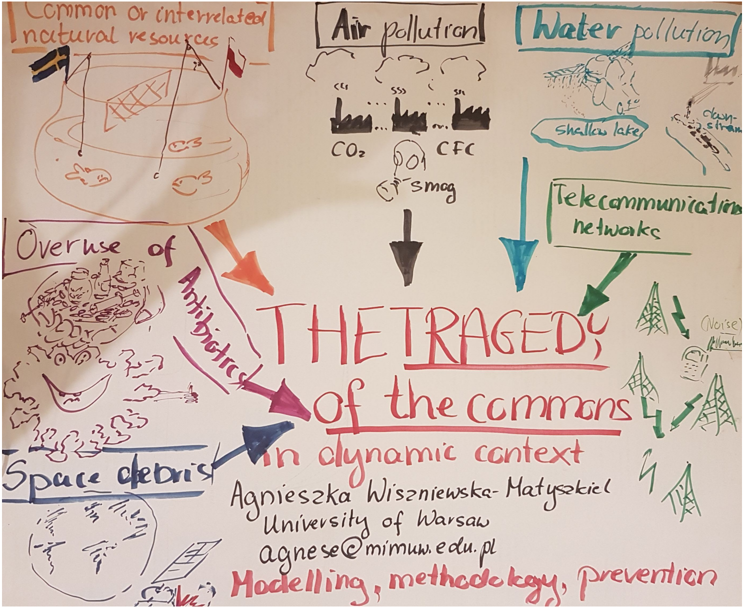
Wspólne łowisko – równowaga w postaci sprzężenia zwrotnego

- Zaczynamy od $t = 2$. $V_i(x, 2) \equiv 0$, dla każdego gracza i, bo wypłata końcowa to zero.
- Liczymy najpierw $\bar{V}_i(x, 1)$ dla $x \in \{\epsilon, \frac{1}{2}, 1\}$ z $(\mathrm{RB})_i$, znając $V_i(y, 2)$ dla każdego możliwego y, rozwiązując układ równań na $S_i(x, 1)$ z $(\mathrm{IB})_i$ (równocześnie dla wszystkich graczy)
  - Tak jakbyśmy się liczyli zwykłą r. Nasha dla gry z wypłatą równą funkcji po prawej stronie (RB)
  - $S_i(1, 1) = 2$ i $V_i(1, 1) = 4$; $S_i(\frac{1}{2}, 1) = 2$ lub $S_i(\frac{1}{2}, 1) = 1$ z $\sum S_i(\frac{1}{2}, 1) \geq 9$;

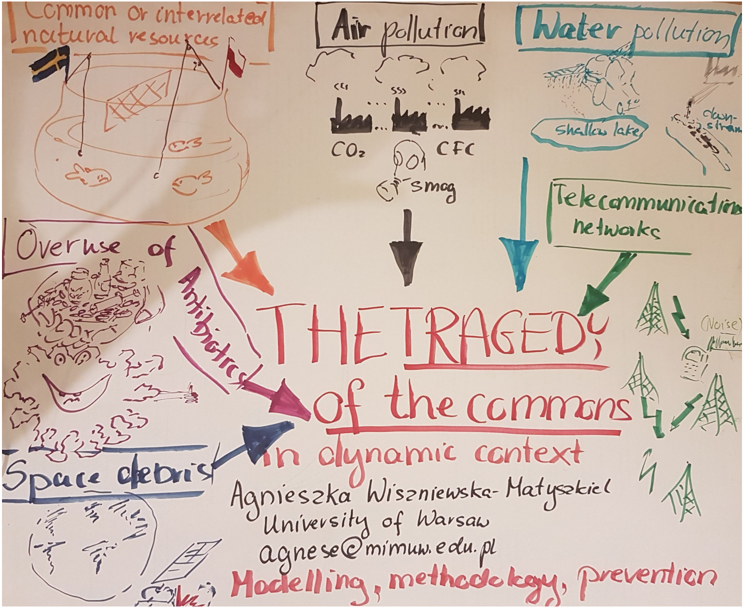
Wspólne łowisko – równowaga w postaci sprzężenia zwrotnego

- Zaczynamy od $t = 2$. $V_i(x, 2) \equiv 0$, dla każdego gracza i, bo wypłata końcowa to zero.
- Liczymy najpierw $\bar{V}_i(x, 1)$ dla $x \in \{\epsilon, \frac{1}{2}, 1\}$ z $(\mathrm{RB})_i$, znając $V_i(y, 2)$ dla każdego możliwego y, rozwiązując układ równań na $S_i(x, 1)$ z $(\mathrm{IB})_i$ (równocześnie dla wszystkich graczy)
  - Tak jakbyśmy się liczyli zwykłą r. Nasha dla gry z wypłatą równą funkcji po prawej stronie (RB)
  - $S_i(1, 1) = 2$ i $V_i(1, 1) = 4$; $S_i(\frac{1}{2}, 1) = 2$ lub $S_i(\frac{1}{2}, 1) = 1$ z $\sum S_i(\frac{1}{2}, 1) \geq 9$; $V_i(\frac{1}{2}, 1) = 2$ w równowadze symetrycznej, $V_i(\frac{1}{2}, 1) = 4$ lub 2, odpowiednio, w niesymetrycznej; $V_i(\epsilon, 1) = 0$.
- Przechodzimy do okresu 0, z układu równań $(\mathrm{IB})_i$ z obliczonymi $V_i(y, 1)$ równowagi Nasha, otrzymujemy $S_i(x, 0)$.
- Początkowy stan populacji to 1, a więc w okresie początkowym wszyscy gracze wybiorą $S_i(1, 0) = 2$, mimo że oznacza to zero połowów w przyszłości.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
agnese@mimuw.edu.



Common or interrelated natural resources
Air pollution
Water pollution
CO_2
CFC
smog
shallow lake
down-stream
Telecommunication networks
Overuse of
Antibiotics
(Noise)
THE TRAGEDY
of the commons
in dynamic context
Space debris
Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel
University of Warsaw
agnese@mimuw.edu.pl
Modelling, methodology, prevention



Dziękuję za uwagę!