O ciągach równomiernie rozmieszczonych

Adam Gregosiewicz

65. Szkoła Matematyki Poglądowej

26–29 sierpnia 2022 r., Siedlce

Zbieżny czy rozbieżny?

Zbieżny czy rozbieżny?

- $\rightsquigarrow$ $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
- $\rightsquigarrow$ $$\frac{\sin n}{n}$$
- $\rightsquigarrow$ $$(-1)^n$$
- $\rightsquigarrow$ $$\sin n$$

Zbieżny czy rozbieżny?

- $\rightsquigarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

- $\rightsquigarrow$ $\dfrac{\sin n}{n}$

- $\rightsquigarrow$ $(-1)^n$

- $\rightsquigarrow$ $\sin n$

Zbieżny czy rozbieżny?

$\rightsquigarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$\rightsquigarrow$ $\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$

$\rightsquigarrow$ $(-1)^n$

$\rightsquigarrow$ $\sin n$

Zbieżny czy rozbieżny?

$\rightsquigarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$\rightsquigarrow$ $\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$

$\rightsquigarrow$ $(-1)^n \quad \nearrow \searrow$

$\rightsquigarrow$ $\sin n$

Zbieżny czy rozbieżny?

$\rightsquigarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$\rightsquigarrow$ $\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$

$\rightsquigarrow$ $(-1)^n$ $\nearrow$ $(-1)^{2n} = 1$, $\searrow$ $(-1)^{2n+1} = -1$

$\rightsquigarrow$ $\sin n$

Zbieżny czy rozbieżny?

$\rightsquigarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$\rightsquigarrow$ $\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$

$\rightsquigarrow$ $(-1)^n$ $\nearrow$ $(-1)^{2n} = 1$, $\searrow$ $(-1)^{2n+1} = -1$

$\rightsquigarrow$ $\sin n$ $\nearrow$ $\searrow$

Zbieżny czy rozbieżny?

$\rightsquigarrow$ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$

$\rightsquigarrow$ $(-1)^n$ $\nearrow$ $(-1)^{2n} = 1$, $\searrow$ $(-1)^{2n+1} = -1$

$\rightsquigarrow$ $\sin n$ $\nearrow$?, $\searrow$?

Ciąg $(\sin n)$ jest rozbieżny

Ciąg $(\sin n)$ jest rozbieżny

$\rightsquigarrow$ Przypuśćmy, że $(\sin n)$ jest zbieżny.

Ciąg $(\sin n)$ jest rozbieżny

- $\rightsquigarrow$ Przypuśćmy, że $(\sin n)$ jest zbieżny.
- $\rightsquigarrow$ Wtedy $(\sin(n+2) - \sin n)$ dąży do 0.

Ciąg $(\sin n)$ jest rozbieżny

- $\rightsquigarrow$ Przypuśćmy, że $(\sin n)$ jest zbieżny.
- $\rightsquigarrow$ Wtedy $(\sin(n+2) - \sin n)$ dąży do 0.
- $\rightsquigarrow$ $\sin(n+2) - \sin n = 2 \sin 1 \cdot \cos(n+1)$, więc $(\cos n)$ dąży do 0.

Ciąg $(\sin n)$ jest rozbieżny

- $\rightsquigarrow$ Przypuśćmy, że $(\sin n)$ jest zbieżny.
- $\rightsquigarrow$ Wtedy $(\sin(n+2) - \sin n)$ dąży do 0.
- $\rightsquigarrow$ $\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1)$, więc $(\cos n)$ dąży do 0.
- $\rightsquigarrow$ $\cos(n+2) - \cos n = -2\sin 1 \cdot \sin(n+1)$, więc $(\sin n)$ dąży do 0

Ciąg $(\sin n)$ jest rozbieżny

- $\rightsquigarrow$ Przypuśćmy, że $(\sin n)$ jest zbieżny.
- $\rightsquigarrow$ Wtedy $(\sin(n+2) - \sin n)$ dąży do 0.
- $\rightsquigarrow$ $\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1)$, więc $(\cos n)$ dąży do 0.
- $\rightsquigarrow$ $\cos(n+2) - \cos n = -2\sin 1 \cdot \sin(n+1)$, więc $(\sin n)$ dąży do 0
- $\rightsquigarrow$ Ostatecznie

$$1 \qquad = \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\sin^2 n + \cos^2 n\right) \qquad = \qquad 0.$$

Zbiór wartości $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

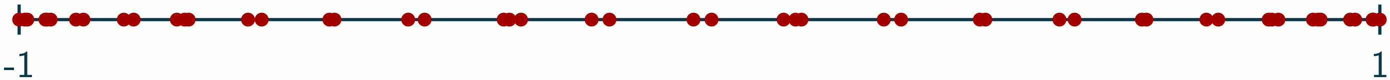
Zbiór wartości $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

$n = 1, \ldots, 10$

Zbiór wartości $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

$n = 1, \ldots, 10$

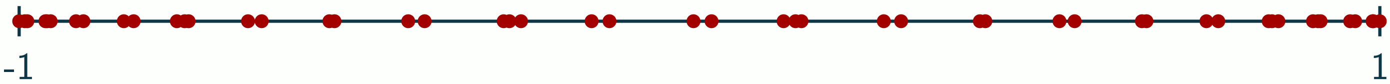
$n = 1, \ldots, 50$



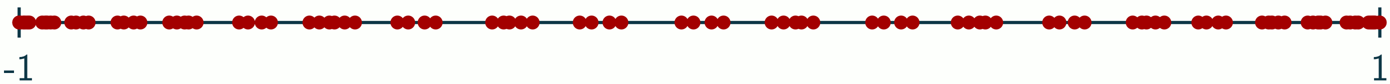
Zbiór wartości $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

$n = 1, \ldots, 10$

$n = 1, \ldots, 50$



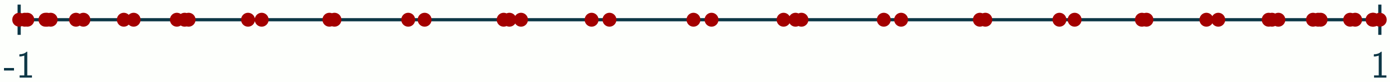
$n = 1, \ldots, 100$



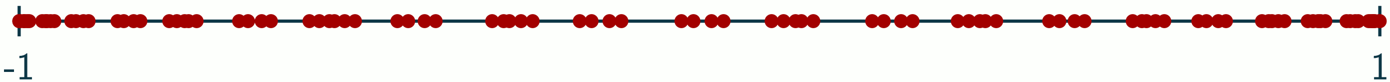
Zbiór wartości $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

$n = 1, \ldots, 10$

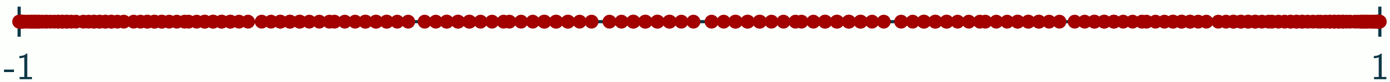
$n = 1, \ldots, 50$



$n = 1, \ldots, 100$



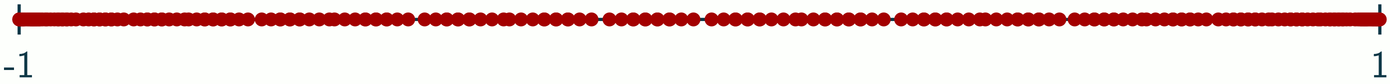
$n = 1, \ldots, 250$



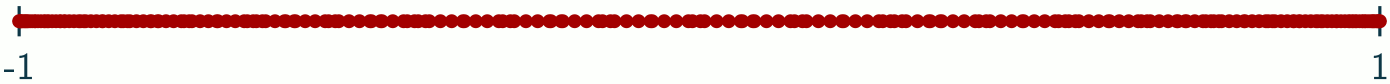
Zbiór wartości $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

Zbiór wartości $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

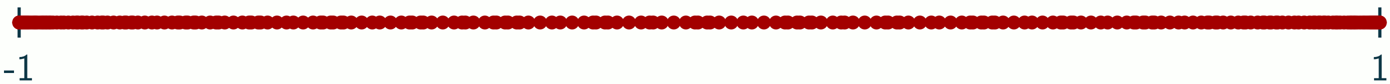
$n = 1, \ldots, 250$



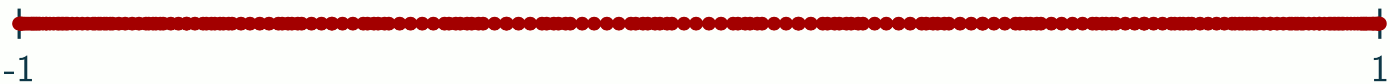
$n = 500, \ldots, 750$



$n = 1000, \ldots, 1250$



$n = 10000, \ldots, 10250$



Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

- $\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

- $\rightsquigarrow$ $\sin x \stackrel{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

  Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}, \{2 \cdot 2\pi\}, \{3 \cdot 2\pi\}, \dots$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}, \{2\cdot 2\pi\}, \{3\cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad$ [$\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$]

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}$, $\{2\cdot 2\pi\}$, $\{3\cdot 2\pi\}$, ... $[\ \{t\} = t - \lfloor t\rfloor\ ]$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi\colon\ n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}$, $\{2 \cdot 2\pi\}$, $\{3 \cdot 2\pi\}$, ... $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi\colon\ n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}$, $\{2\cdot 2\pi\}$, $\{3\cdot 2\pi\}$, ... $[\ \{t\} = t - \lfloor t\rfloor\ ]$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}$, $\{2\cdot 2\pi\}$, $\{3\cdot 2\pi\}$, $\ldots$ $\qquad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

⇝ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

⇝ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi \colon n,k\in\mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}, \{2\cdot 2\pi\}, \{3\cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t\rfloor\ ]$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \stackrel{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}$, $\{2 \cdot 2\pi\}$, $\{3 \cdot 2\pi\}$, ... $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}, \{2 \cdot 2\pi\}, \{3 \cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$

Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi \colon n,k\in\mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}, \{2\cdot 2\pi\}, \{3\cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad$ $[\ \{t\} = t - \lfloor t\rfloor\ ]$

Twierdzenie

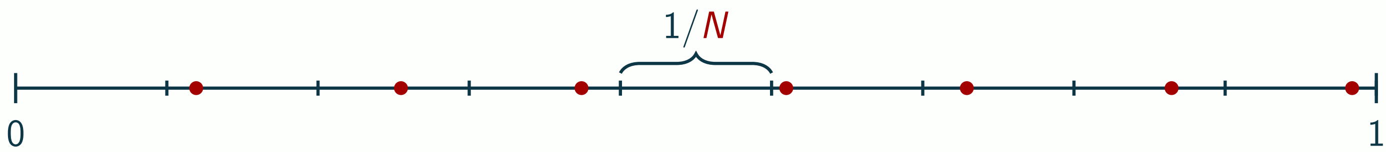
Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}, \{2 \cdot 2\pi\}, \{3 \cdot 2\pi\}, \ldots$ $[\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$



Twierdzenie

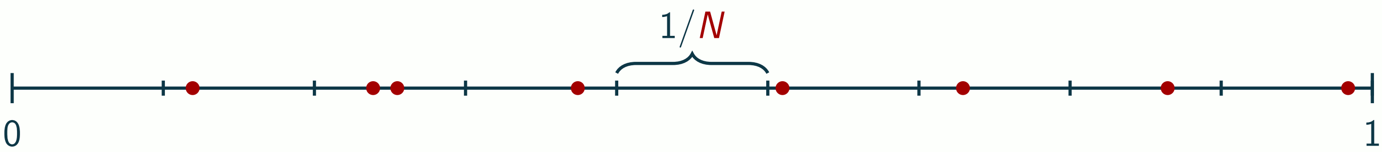
Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi :\ n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}$, $\{2\cdot 2\pi\}$, $\{3\cdot 2\pi\}$, $\ldots$ $\quad$ $[\ \{t\} = t - \lfloor t\rfloor\ ]$



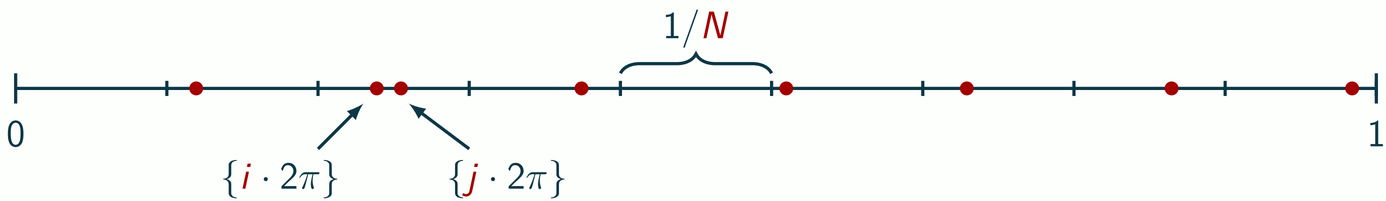
Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

- $\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}, \{2\cdot 2\pi\}, \{3\cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t\rfloor\ ]$



Twierdzenie

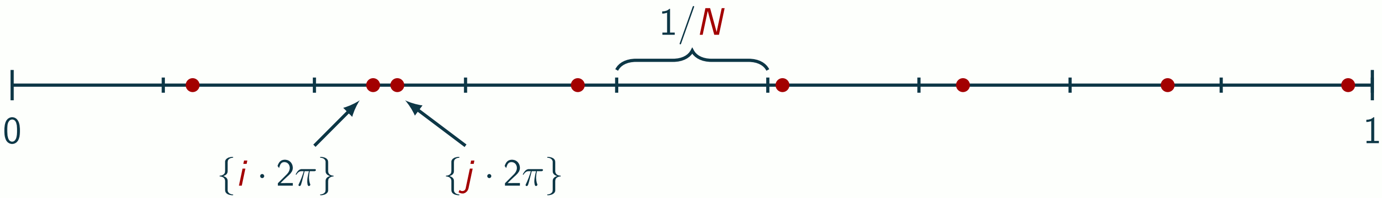
Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

⇝ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.

⇝ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}, \{2 \cdot 2\pi\}, \{3 \cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$



$$\big|\{i \cdot 2\pi\} - \{j \cdot 2\pi\}\big|$$

Twierdzenie

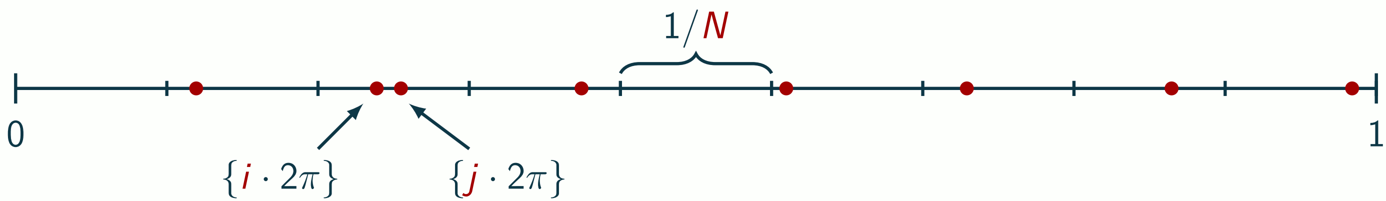
Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi : n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}, \{2 \cdot 2\pi\}, \{3 \cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$



$$\left|\{i \cdot 2\pi\} - \{j \cdot 2\pi\}\right| = \left|\lfloor j \cdot 2\pi \rfloor - \lfloor i \cdot 2\pi \rfloor - (j - i) \cdot 2\pi\right|$$

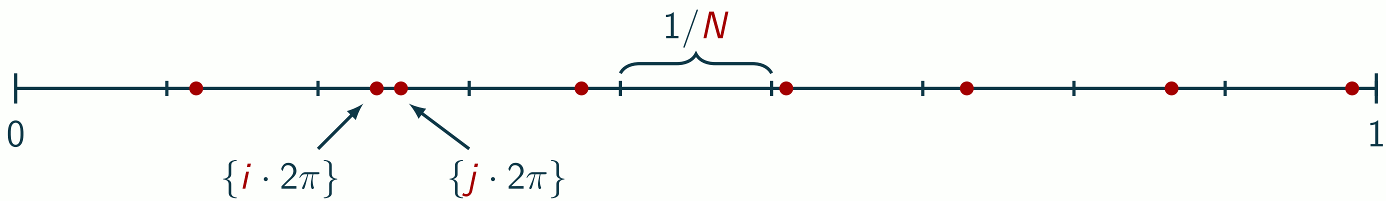
Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

- $\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}$, $\{2\cdot 2\pi\}$, $\{3\cdot 2\pi\}$, ... $\quad$ [$\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$]



$$\Big|\{i\cdot 2\pi\} - \{j\cdot 2\pi\}\Big| = \Big|\lfloor j\cdot 2\pi\rfloor - \lfloor i\cdot 2\pi\rfloor - (j-i)\cdot 2\pi\Big| = |n - k\cdot 2\pi|$$

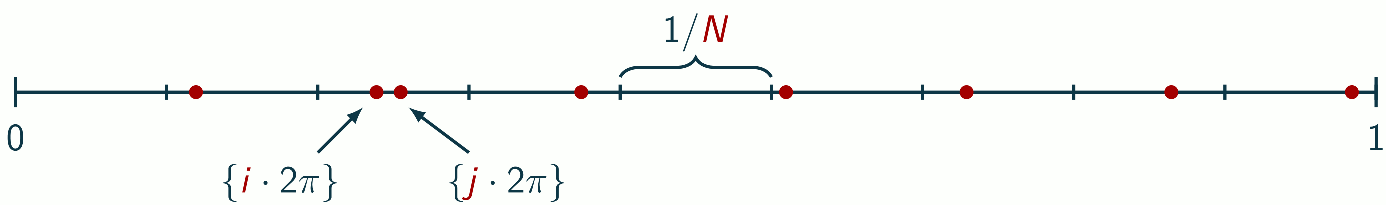
Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

- $\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi : n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}, \{2 \cdot 2\pi\}, \{3 \cdot 2\pi\}, \dots$ $\qquad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$



$$\Big|\{i \cdot 2\pi\} - \{j \cdot 2\pi\}\Big| = \Big|\lfloor j \cdot 2\pi \rfloor - \lfloor i \cdot 2\pi \rfloor - (j - i) \cdot 2\pi\Big| = |n - k \cdot 2\pi| < 1/N$$

Twierdzenie

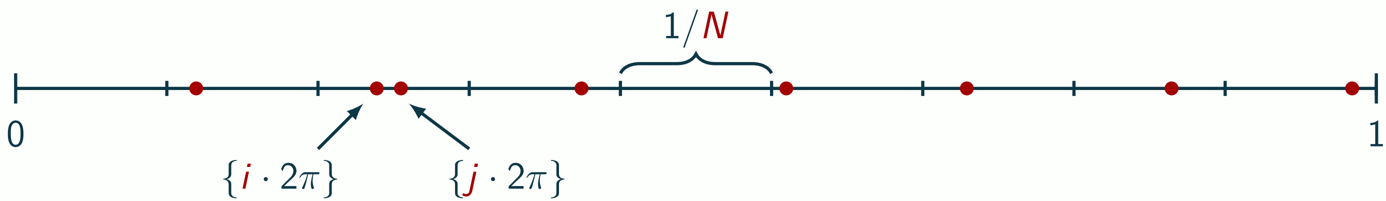
Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi : n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}, \{2\cdot 2\pi\}, \{3\cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad$ $[\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$



$$\Big|\{i\cdot 2\pi\} - \{j\cdot 2\pi\}\Big| = \Big|\lfloor j\cdot 2\pi\rfloor - \lfloor i\cdot 2\pi\rfloor - (j-i)\cdot 2\pi\Big| = |\underbrace{n - k\cdot 2\pi}_{\rho}| < 1/N$$

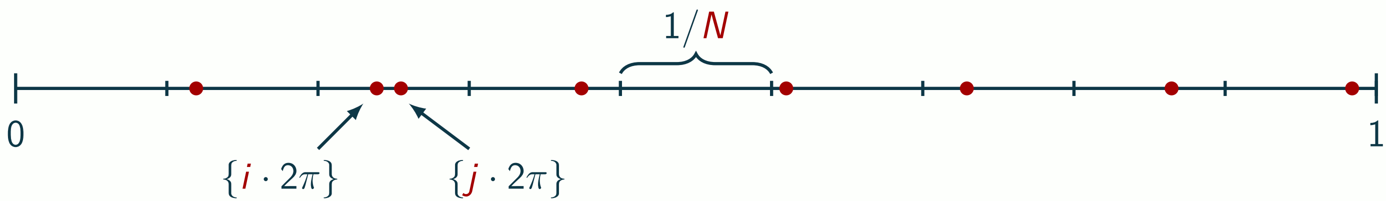
Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

- $\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi : n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}$, $\{2\cdot 2\pi\}$, $\{3\cdot 2\pi\}$, $\ldots$ $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$



$$\Big|\{i\cdot 2\pi\} - \{j\cdot 2\pi\}\Big| = \Big|\lfloor j\cdot 2\pi\rfloor - \lfloor i\cdot 2\pi\rfloor - (j-i)\cdot 2\pi\Big| = |\underbrace{n - k\cdot 2\pi}_{\rho}| < 1/N$$

Twierdzenie

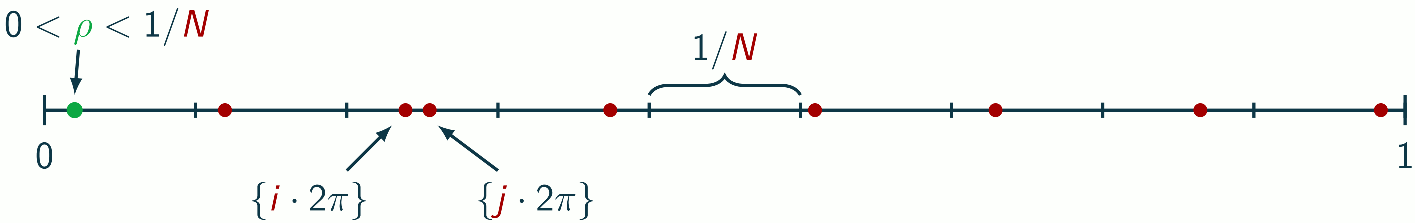
Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}, \{2 \cdot 2\pi\}, \{3 \cdot 2\pi\}, \dots$ $\qquad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$



$$\Big|\{i \cdot 2\pi\} - \{j \cdot 2\pi\}\Big| = \Big|\lfloor j \cdot 2\pi \rfloor - \lfloor i \cdot 2\pi \rfloor - (j - i) \cdot 2\pi\Big| = |\underbrace{n - k \cdot 2\pi}_{\rho}| < 1/N$$

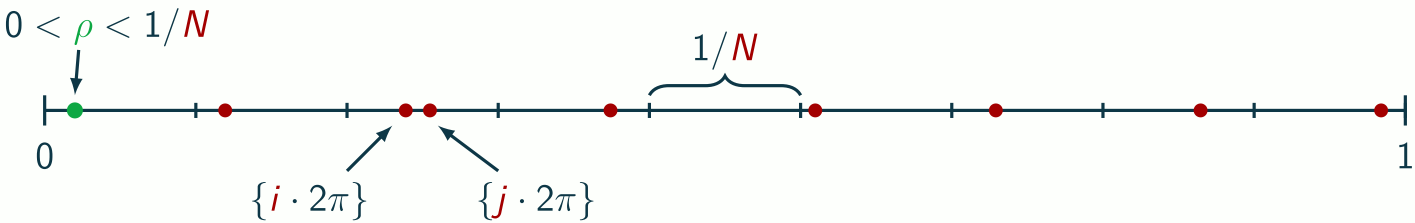
Twierdzenie

Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1, 1]$.

Szkic dowodu

- $\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k \cdot 2\pi)$.
- $\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k \cdot 2\pi \colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1 \cdot 2\pi\}, \{2 \cdot 2\pi\}, \{3 \cdot 2\pi\}, \ldots$ $\quad [\ \{t\} = t - \lfloor t \rfloor\ ]$



$$\Big|\{i \cdot 2\pi\} - \{j \cdot 2\pi\}\Big| = \Big|\lfloor j \cdot 2\pi \rfloor - \lfloor i \cdot 2\pi \rfloor - (j - i) \cdot 2\pi\Big| = |\underbrace{n - k \cdot 2\pi}_{\rho}| < 1/N$$

- $\rightsquigarrow$ Wystarczy teraz dobrać takie $m \in \mathbb{N}$, że $x - 1/N < m\rho < x + 1/N$.

Twierdzenie

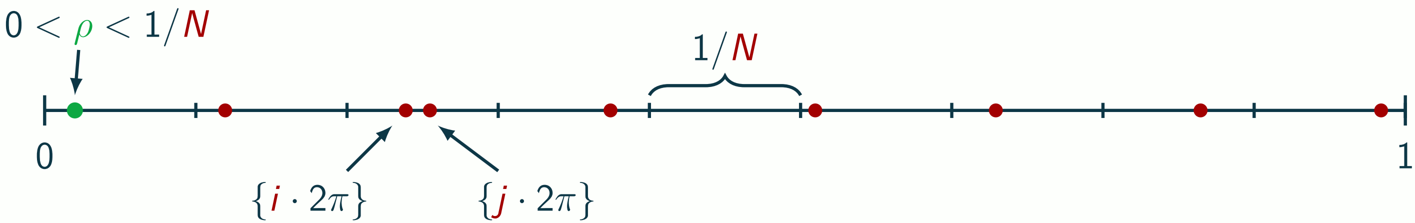
Zbiór wartości ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[-1,1]$.

Szkic dowodu

$\rightsquigarrow$ $\sin x \overset{?}{\approx} \sin n = \sin(n - k\cdot 2\pi)$.

$\rightsquigarrow$ Zbiór $\{n - k\cdot 2\pi : n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$!

Części ułamkowe: $\{1\cdot 2\pi\}, \{2\cdot 2\pi\}, \{3\cdot 2\pi\}, \ldots$ $\qquad [\ \{t\} = t - \lfloor t\rfloor\ ]$



$$\Big|\{i\cdot 2\pi\} - \{j\cdot 2\pi\}\Big| = \Big|\lfloor j\cdot 2\pi\rfloor - \lfloor i\cdot 2\pi\rfloor - (j-i)\cdot 2\pi\Big| = |\underbrace{n - k\cdot 2\pi}_{\rho}| < 1/N$$

$\rightsquigarrow$ Wystarczy teraz dobrać takie $m\in\mathbb{N}$, że $x - 1/N < m\rho < x + 1/N$.

Kluczowa rola **niewymierności** 2π!

Twierdzenie (Lemat Kroneckera)

Jeżeli α jest liczbą **niewymierną**, to zbiór wartości ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}, \ldots$$

jest gęsty w przedziale $[0, 1]$.

Twierdzenie (Lemat Kroneckera)

Jeżeli α jest liczbą **niewymierną**, to zbiór wartości ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}, \ldots$$

jest gęsty w przedziale $[0, 1]$.

$$\{ne\}$$

Twierdzenie (Lemat Kroneckera)

Jeżeli α jest liczbą **niewymierną**, to zbiór wartości ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}, \ldots$$

jest gęsty w przedziale $[0, 1]$.

$$\{ne\}$$

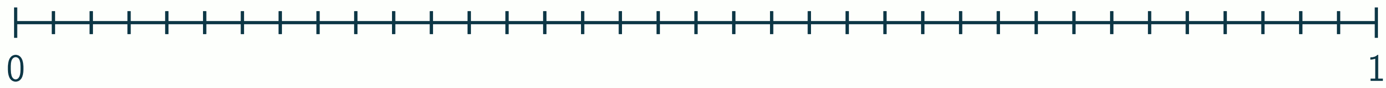
Twierdzenie (Lemat Kroneckera)

Jeżeli α jest liczbą **niewymierną**, to zbiór wartości ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}, \ldots$$

jest gęsty w przedziale $[0, 1]$.

$$\{ne\}$$



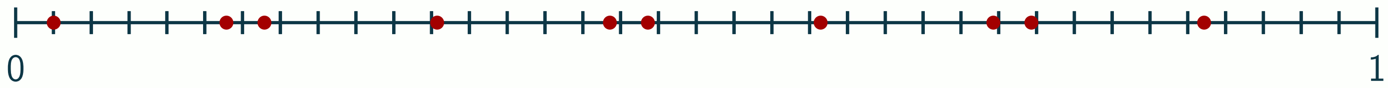
Twierdzenie (Lemat Kroneckera)

Jeżeli α jest liczbą **niewymierną**, to zbiór wartości ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}, \ldots$$

jest gęsty w przedziale $[0, 1]$.

$$\{ne\}$$



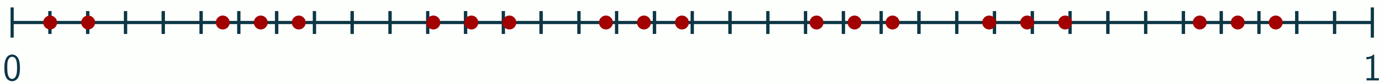
Twierdzenie (Lemat Kroneckera)

Jeżeli α jest liczbą **niewymierną**, to zbiór wartości ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}, \ldots$$

jest gęsty w przedziale $[0, 1]$.

$$\{ne\}$$



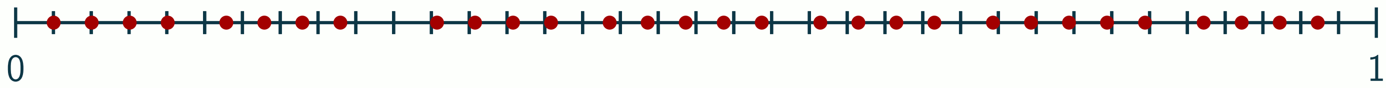
Twierdzenie (Lemat Kroneckera)

Jeżeli α jest liczbą **niewymierną**, to zbiór wartości ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}, \ldots$$

jest gęsty w przedziale $[0, 1]$.

$$\{ne\}$$



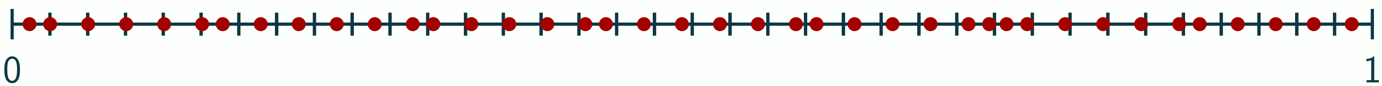
Twierdzenie (Lemat Kroneckera)

Jeżeli α jest liczbą **niewymierną**, to zbiór wartości ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}, \ldots$$

jest gęsty w przedziale $[0, 1]$.

$\{ne\}$



Trzy długości

Trzy długości

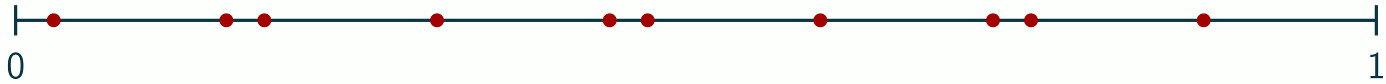
$\{ne\}$

Trzy długości

$\{ne\}$

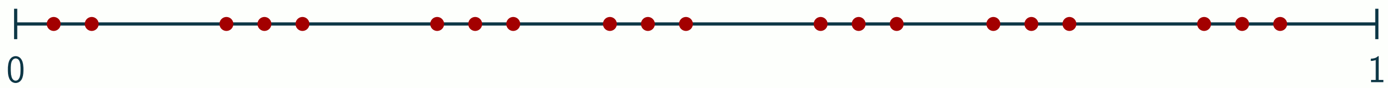
Trzy długości

$\{ne\}$



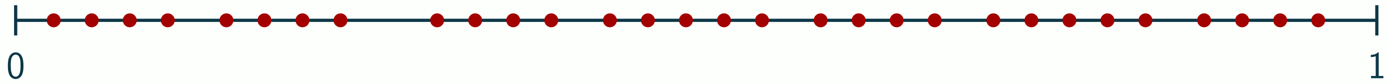
Trzy długości

$$\{ne\}$$



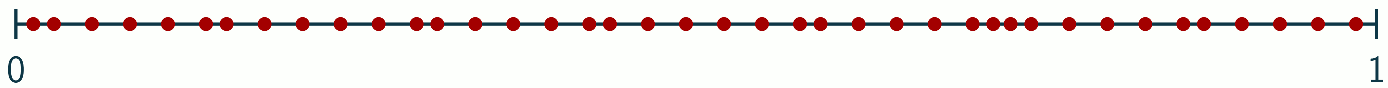
Trzy długości

$\{ne\}$



Trzy długości

$\{ne\}$



Trzy długości

Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0, 1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.

Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0, 1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.

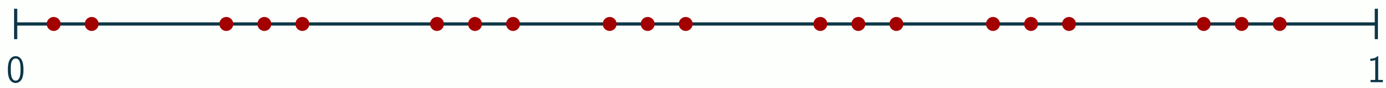
Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0, 1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.



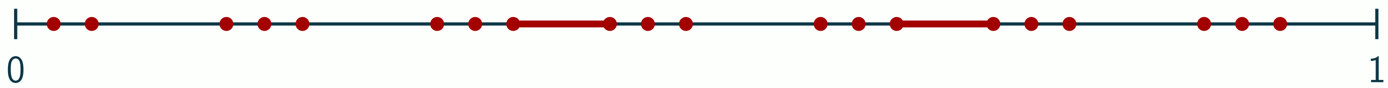
Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0, 1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.



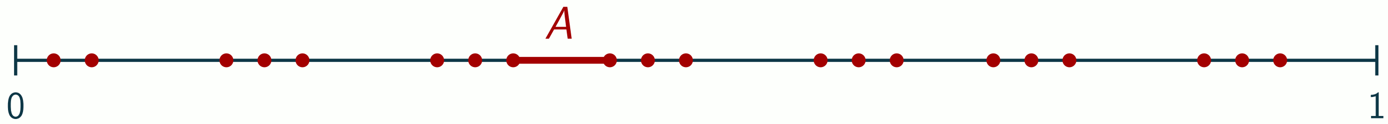
Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0,1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.



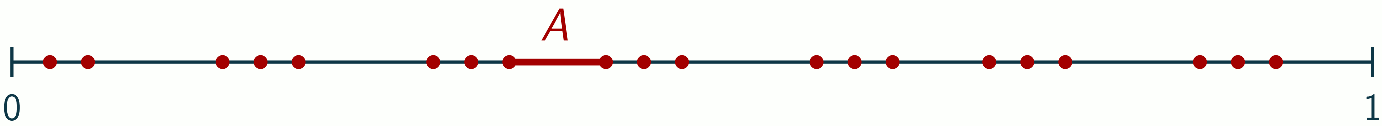
Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0,1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.



$\rightsquigarrow$ Wybierzmy ostatnią przerwę A ustalonej długości ($A + \alpha$ nie jest przerwą).

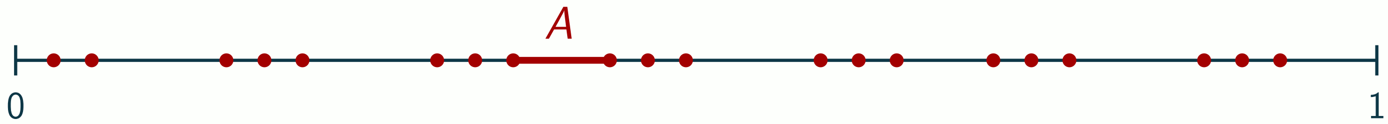
Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0,1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.



$\rightsquigarrow$ Wybierzmy ostatnią przerwę A ustalonej długości ($A + \alpha$ nie jest przerwą).

- $\rightsquigarrow$ Jeden z końców A to $\{n\alpha\}$.

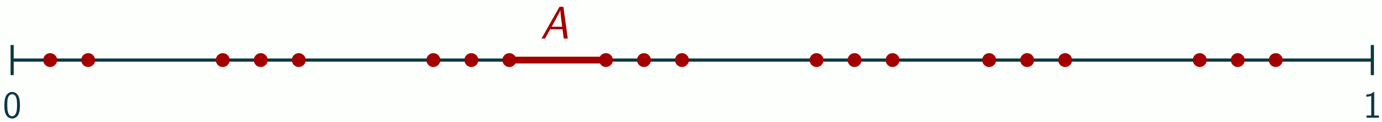
Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0, 1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.



$\rightsquigarrow$ Wybierzmy ostatnią przerwę A ustalonej długości ($A + \alpha$ nie jest przerwą).

$\rightsquigarrow$ Jeden z końców A to $\{n\alpha\}$.

LUB

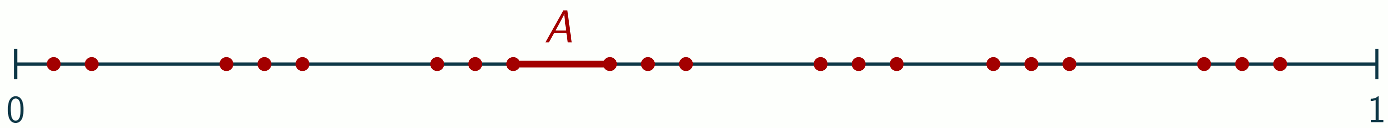
Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0, 1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.



⇝ Wybierzmy ostatnią przerwę A ustalonej długości ($A + \alpha$ nie jest przerwą).

- ⇝ Jeden z końców A to $\{n\alpha\}$.

  LUB

- ⇝ Wewnątrz $A + \alpha$ jest jakiś element $\{k\alpha\}$.

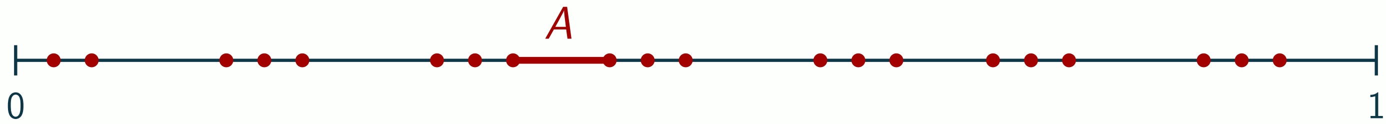
Trzy długości

Twierdzenie (Three-gap Theorem, Steinhaus Conjecture)

Przerwy w przedziale $[0,1]$ utworzone przez wyrazy ciągu

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}$$

mogą mieć **co najwyżej trzy różne długości**.



$\rightsquigarrow$ Wybierzmy ostatnią przerwę A ustalonej długości ($A+\alpha$ nie jest przerwą).

- $\rightsquigarrow$ Jeden z końców A to $\{n\alpha\}$.

  LUB

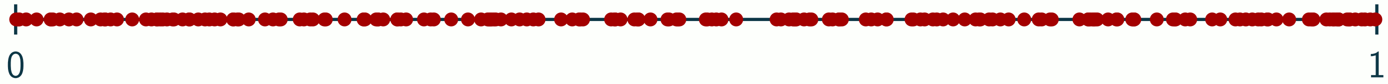
- $\rightsquigarrow$ Wewnątrz $A+\alpha$ jest jakiś element $\{k\alpha\}$.

  $\Longrightarrow \quad k=1$

Ciągi równomiernie rozmieszczone

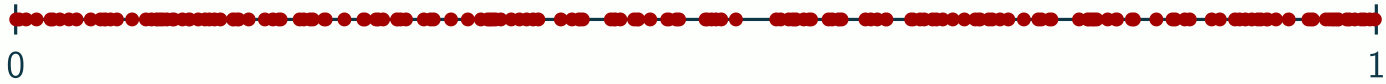
Ciągi równomiernie rozmieszczone

$$\{\sin n\} \qquad n = 1, \dots, 200$$

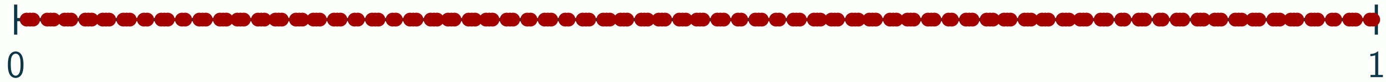


Ciągi równomiernie rozmieszczone

$\{\sin n\} \qquad n = 1, \ldots, 200$

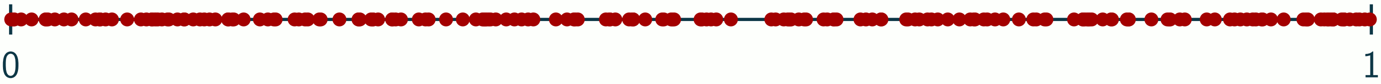


$\{ne\} \qquad n = 1, \ldots, 200$

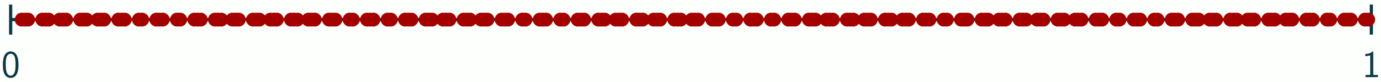


Ciągi równomiernie rozmieszczone

$$\{\sin n\} \qquad n = 1, \ldots, 200$$



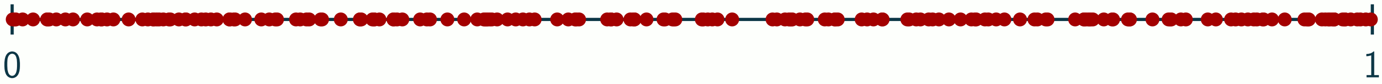
$$\{ne\} \qquad n = 1, \ldots, 200$$



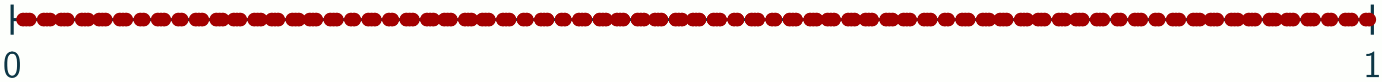
Ciąg równomiernie rozmieszczony (equidistributed sequence)

Ciągi równomiernie rozmieszczone

$$\{\sin n\} \qquad n = 1, \dots, 200$$



$$\{ne\} \qquad n = 1, \dots, 200$$

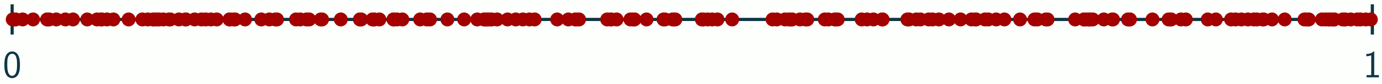


Ciąg równomiernie rozmieszczony (equidistributed sequence)

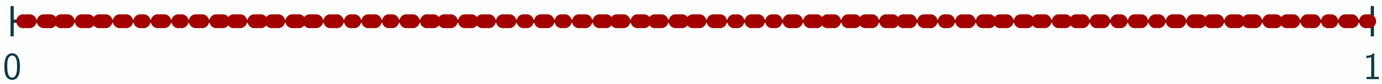
$$\{a_n\} \qquad n = 1, 2, \dots$$

Ciągi równomiernie rozmieszczone

$$\{\sin n\} \qquad n = 1, \ldots, 200$$



$$\{ne\} \qquad n = 1, \ldots, 200$$

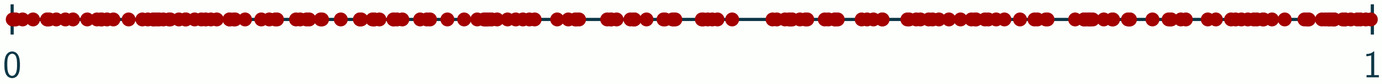


Ciąg równomiernie rozmieszczony (equidistributed sequence)

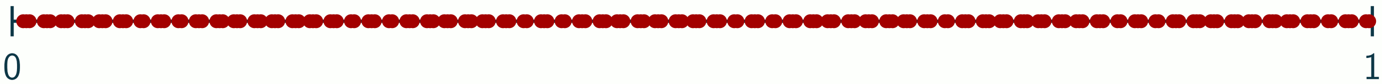
$$\{a_n\} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ciągi równomiernie rozmieszczone

$\{\sin n\} \qquad n = 1, \ldots, 200$



$\{ne\} \qquad n = 1, \ldots, 200$

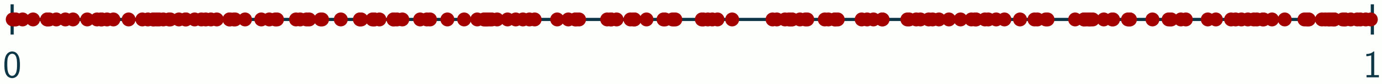


Ciąg równomiernie rozmieszczony (equidistributed sequence)

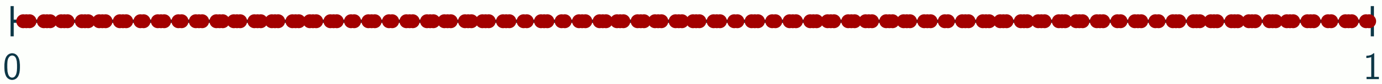
$\{a_n\} \qquad n = 1, 2, \ldots$

Ciągi równomiernie rozmieszczone

$\{\sin n\} \qquad n = 1, \ldots, 200$

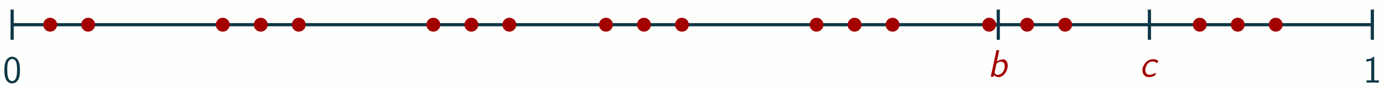


$\{ne\} \qquad n = 1, \ldots, 200$



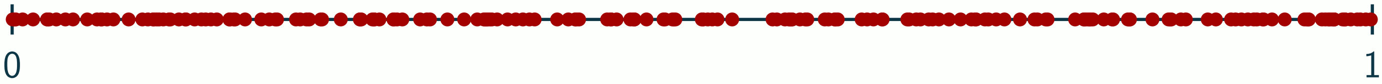
Ciąg równomiernie rozmieszczony (equidistributed sequence)

$\{a_n\} \qquad n = 1, 2, \ldots$

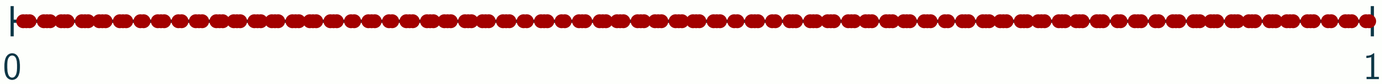


Ciągi równomiernie rozmieszczone

$\{\sin n\} \qquad n = 1, \ldots, 200$

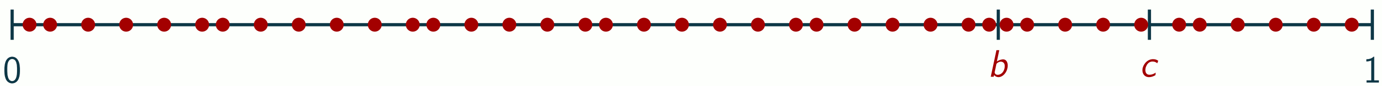


$\{ne\} \qquad n = 1, \ldots, 200$



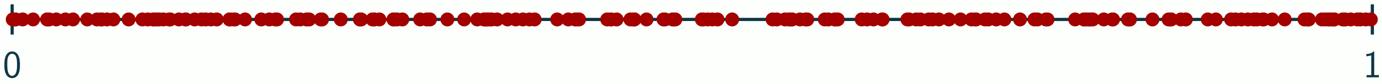
Ciąg równomiernie rozmieszczony (equidistributed sequence)

$\{a_n\} \qquad n = 1, 2, \ldots$

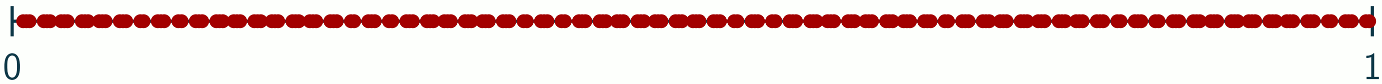


Ciągi równomiernie rozmieszczone

$\{\sin n\} \qquad n = 1, \ldots, 200$

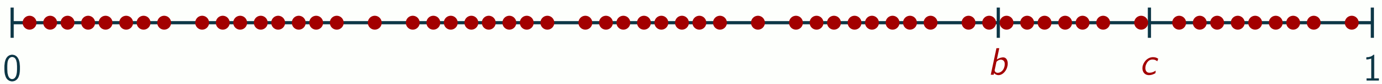


$\{ne\} \qquad n = 1, \ldots, 200$



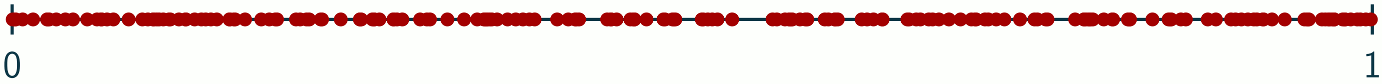
Ciąg równomiernie rozmieszczony (equidistributed sequence)

$\{a_n\} \qquad n = 1, 2, \ldots$

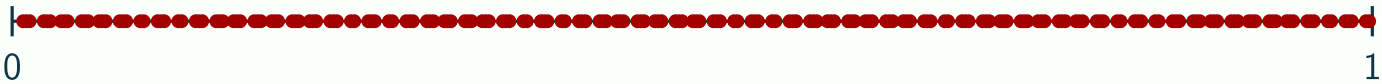


Ciągi równomiernie rozmieszczone

$$\{\sin n\} \qquad n = 1, \ldots, 200$$

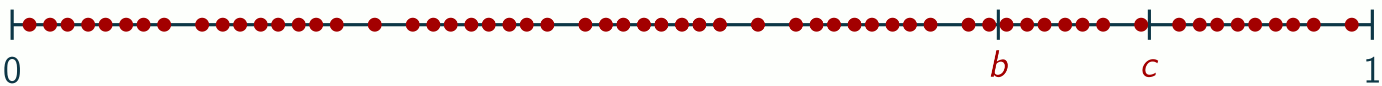


$$\{ne\} \qquad n = 1, \ldots, 200$$



Ciąg równomiernie rozmieszczony (equidistributed sequence)

$$\{a_n\} \qquad n = 1, 2, \ldots$$



$$\frac{\#\{1 \leqslant n \leqslant N \colon \{a_n\} \in (b, c)\}}{N} \qquad \xrightarrow{N} \qquad c - b$$

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

$\rightsquigarrow$ Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

- Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.
- Ciąg

$$\alpha,\ 2\alpha,\ \dots,\ n\alpha,\ \dots,\ N\alpha$$

podzielmy na podciągi arytmetyczne względem n modulo k:

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

- Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.
- Ciąg

$$\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ n\alpha,\ \ldots,\ N\alpha$$

podzielmy na podciągi arytmetyczne względem n modulo k:

$$\alpha$$

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

⇝ Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.

⇝ Ciąg

$$\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ n\alpha,\ \ldots,\ N\alpha$$

podzielmy na podciągi arytmetyczne względem n modulo k:

$$\alpha \qquad\qquad \alpha + k\alpha \qquad\qquad \alpha + 2k\alpha \qquad\qquad \cdots$$

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

- $\rightsquigarrow$ Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.
- $\rightsquigarrow$ Ciąg

$$\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ n\alpha,\ \ldots,\ N\alpha$$

podzielmy na podciągi arytmetyczne względem n modulo k:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \alpha + k\alpha & \alpha + 2k\alpha & \cdots \\ 2\alpha & & & \end{array}$$

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

- Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.
- Ciąg

$$\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ n\alpha,\ \ldots,\ N\alpha$$

podzielmy na podciągi arytmetyczne względem n modulo k:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \alpha + k\alpha & \alpha + 2k\alpha & \cdots \\ 2\alpha & 2\alpha + k\alpha & 2\alpha + 2k\alpha & \cdots \end{array}$$

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

- $\rightsquigarrow$ Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.
- $\rightsquigarrow$ Ciąg

$$\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ n\alpha,\ \ldots,\ N\alpha$$

podzielmy na podciągi arytmetyczne względem n modulo k:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \alpha + k\alpha & \alpha + 2k\alpha & \cdots \\ 2\alpha & 2\alpha + k\alpha & 2\alpha + 2k\alpha & \cdots \\ & \vdots & & \end{array}$$

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

- $\rightsquigarrow$ Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.
- $\rightsquigarrow$ Ciąg

$$\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ n\alpha,\ \ldots,\ N\alpha$$

podzielmy na podciągi arytmetyczne względem n modulo k:

$$\begin{array}{rrrc}
\alpha & \alpha + k\alpha & \alpha + 2k\alpha & \cdots \\
2\alpha & 2\alpha + k\alpha & 2\alpha + 2k\alpha & \cdots \\
 & & \vdots & \\
(k-1)\alpha & (k-1)\alpha + k\alpha & (k-1)\alpha + 2k\alpha & \cdots \\
k\alpha & k\alpha + k\alpha & k\alpha + 2k\alpha & \cdots
\end{array}$$

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu (Weyl, Sierpiński, Bohl)

Dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg

$$\{n\alpha\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest równomiernie rozmieszczony.

Dowód

- Wybierzmy takie k, że $\rho := \{k\alpha\}$ jest małe.
- Ciąg

$$\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ n\alpha,\ \ldots,\ N\alpha$$

podzielmy na podciągi arytmetyczne względem n modulo k:

$$\begin{array}{rrrc}
\alpha & \alpha + k\alpha & \alpha + 2k\alpha & \cdots \\
2\alpha & 2\alpha + k\alpha & 2\alpha + 2k\alpha & \cdots \\
 & & \vdots & \\
(k-1)\alpha & (k-1)\alpha + k\alpha & (k-1)\alpha + 2k\alpha & \cdots \\
k\alpha & k\alpha + k\alpha & k\alpha + 2k\alpha & \cdots
\end{array}$$

- Wystarczy sprawdzić, że każdy z nich jest równomiernie rozmieszony.

Dowód c.d.

Dowód c.d.

$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$

Dowód c.d.

$$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} =$$

Dowód c.d.

$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\})\Big\}$$

Dowód c.d.

$$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j\big(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\}\big)\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\}$$

Dowód c.d.

$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j\big(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\}\big)\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

Dowód c.d.

$$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\})\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Dowód c.d.

$$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j\big(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\}\big)\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

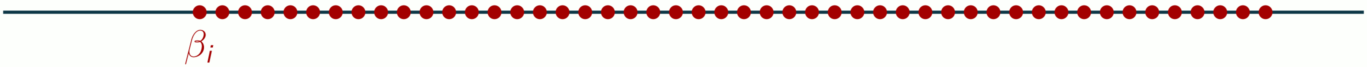
$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Dowód c.d.

$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j\big(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\}\big)\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$

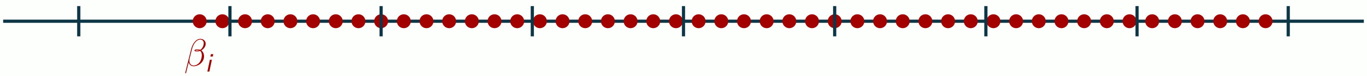


Dowód c.d.

$$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\})\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$

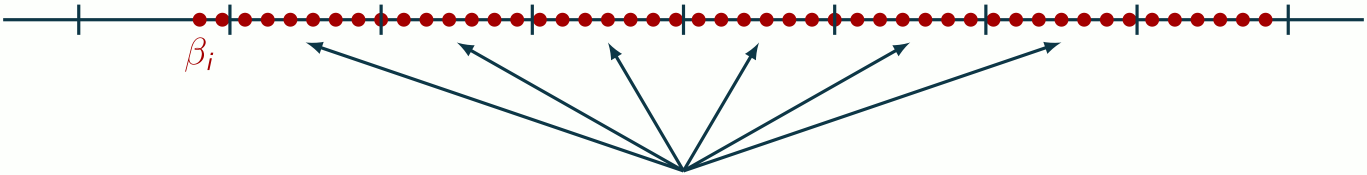


Dowód c.d.

$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\})\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$

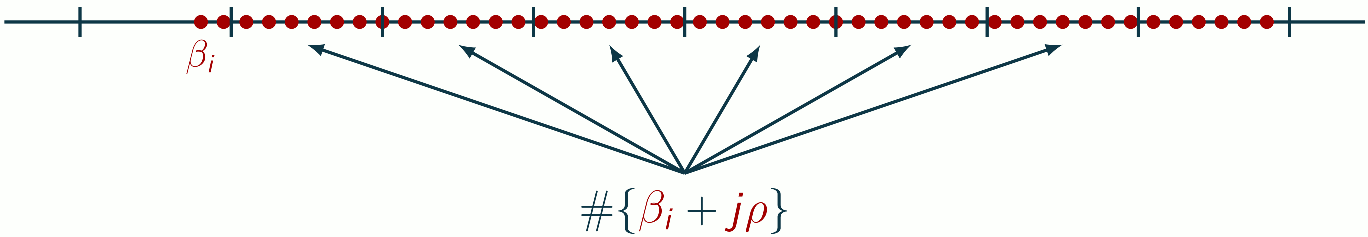


Dowód c.d.

$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\})\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$

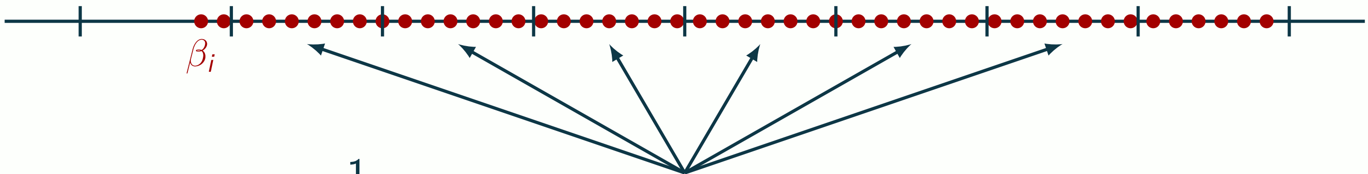


Dowód c.d.

$$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\})\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$



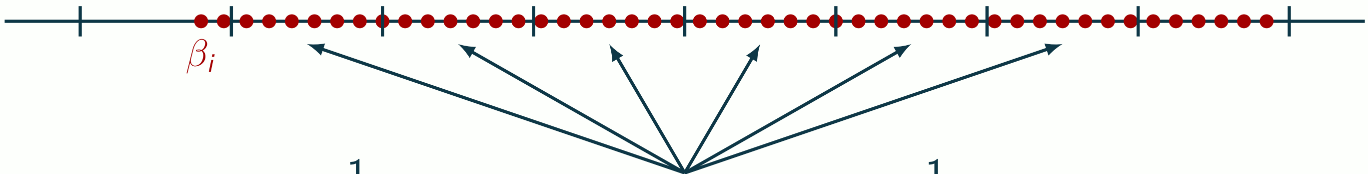
$$\frac{1}{\rho} - 1 \leqslant \qquad \#\{\beta_i + j\rho\}$$

Dowód c.d.

$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\})\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$



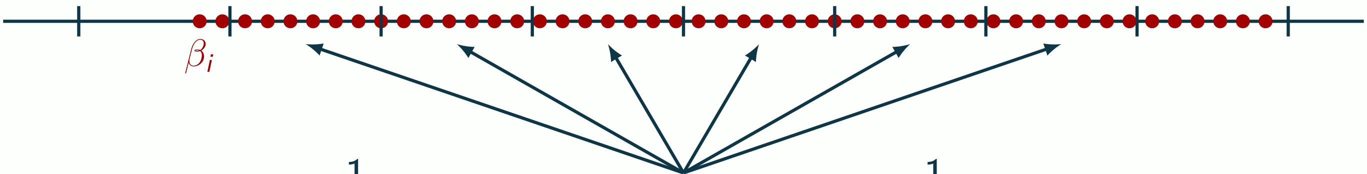
$$\frac{1}{\rho} - 1 \leqslant \quad \#\{\beta_i + j\rho\} \quad \leqslant \frac{1}{\rho} + 1$$

Dowód c.d.

$$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha \rfloor + \{k\alpha\})\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$



$$\frac{1}{\rho} - 1 \leqslant \quad \#\{\beta_i + j\rho\} \quad \leqslant \frac{1}{\rho} + 1$$

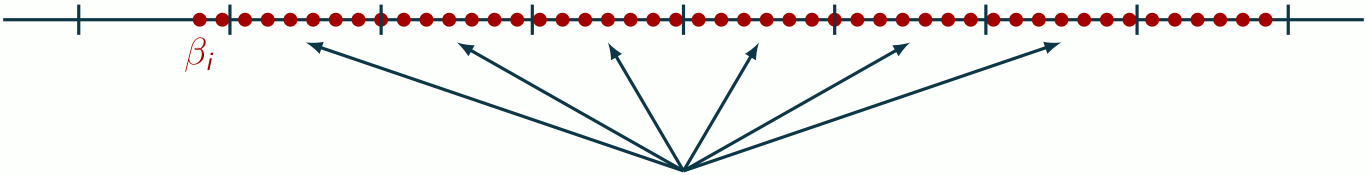
$$\frac{c-b}{\rho} - 1 \leqslant \quad \#\{\beta_i + j\rho \in (b, c)\} \quad \leqslant \frac{c-b}{\rho} + 1$$

Dowód c.d.

$i\alpha \qquad i\alpha + k\alpha \qquad i\alpha + 2k\alpha \qquad \cdots \qquad i\alpha + jk\alpha \qquad \cdots$

$$\{i\alpha + jk\alpha\} = \Big\{i\alpha + j(\lfloor k\alpha\rfloor + \{k\alpha\})\Big\} = \Big\{i\alpha + j\{k\alpha\}\Big\} = \{\beta_i + j\rho\}$$

$$\beta_i + j\rho \qquad j = 0, 1, \ldots$$



$$\frac{c - b + \rho}{1 - \rho} \leqslant \frac{\#\{\beta_i + j\rho \in (b, c)\}}{\#\{\beta_i + j\rho\}} \leqslant \frac{c - b - \rho}{1 + \rho}$$

Co jeszcze wiadomo?

Co jeszcze wiadomo?

- $\{n\alpha\}$
- $\{n^k\alpha\}$
- $\{p_\alpha(n)\}$
- $\{\sqrt{n}\}$
- $\{a^n\}$
- $\{\log n\}$
- $\{p_n\}$

Co jeszcze wiadomo?

- $\rightsquigarrow$ $\{n\alpha\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{n^k\alpha\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{p_\alpha(n)\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{\sqrt{n}\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{a^n\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{\log n\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{p_n\}$

Co jeszcze wiadomo?

- $\rightsquigarrow$ $\{n\alpha\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{n^k\alpha\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{p_\alpha(n)\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{\sqrt{n}\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{a^n\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{\log n\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{p_n\}$

Co jeszcze wiadomo?

- $\{n\alpha\}$ **TAK**
- $\{n^k\alpha\}$ **TAK**
- $\{p_\alpha(n)\}$ **TAK**
- $\{\sqrt{n}\}$
- $\{a^n\}$
- $\{\log n\}$
- $\{p_n\}$

Co jeszcze wiadomo?

$\rightsquigarrow$ $\{n\alpha\}$	**TAK**
$\rightsquigarrow$ $\{n^k\alpha\}$	**TAK**
$\rightsquigarrow$ $\{p_\alpha(n)\}$	**TAK**
$\rightsquigarrow$ $\{\sqrt{n}\}$	**NIE**
$\rightsquigarrow$ $\{a^n\}$	
$\rightsquigarrow$ $\{\log n\}$	
$\rightsquigarrow$ $\{p_n\}$	

Co jeszcze wiadomo?

- $\rightsquigarrow$ $\{n\alpha\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{n^k\alpha\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{p_\alpha(n)\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{\sqrt{n}\}$ **NIE**
- $\rightsquigarrow$ $\{a^n\}$ **TAK**, dla prawie wszystkich $a > 1$
- $\rightsquigarrow$ $\{\log n\}$
- $\rightsquigarrow$ $\{p_n\}$

Co jeszcze wiadomo?

- $\leadsto$ $\{n\alpha\}$ **TAK**
- $\leadsto$ $\{n^k\alpha\}$ **TAK**
- $\leadsto$ $\{p_\alpha(n)\}$ **TAK**
- $\leadsto$ $\{\sqrt{n}\}$ **NIE**
- $\leadsto$ $\{a^n\}$ **TAK**, dla prawie wszystkich $a > 1$
- $\leadsto$ $\{\log n\}$ **NIE**, prawo Benforda
- $\leadsto$ $\{p_n\}$

Co jeszcze wiadomo?

- $\rightsquigarrow$ $\{n\alpha\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{n^k\alpha\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{p_\alpha(n)\}$ **TAK**
- $\rightsquigarrow$ $\{\sqrt{n}\}$ **NIE**
- $\rightsquigarrow$ $\{a^n\}$ **TAK**, dla prawie wszystkich $a > 1$
- $\rightsquigarrow$ $\{\log n\}$ **NIE**, prawo Benforda
- $\rightsquigarrow$ $\{p_n\}$ **TAK!**

Kryterium Weyla

Kryterium Weyla

Twierdzenie

Ciąg $(\{a_n\})_n$ jest równomiernie rozmieszczony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{N}\left(e^{2\pi i k a_1} + e^{2\pi i k a_2} + e^{2\pi i k a_3} \cdots + e^{2\pi i k a_N}\right) \qquad \xrightarrow{N} \qquad 0$$

dla dowolnego $k \neq 0$.