Dziury uogólnione

Anna Gierzkiewicz

Uniwersytet Jagielloński

anna.gierzkiewicz@uj.edu.pl

LXV SMP w Siedlcach
26–29 sierpnia 2022

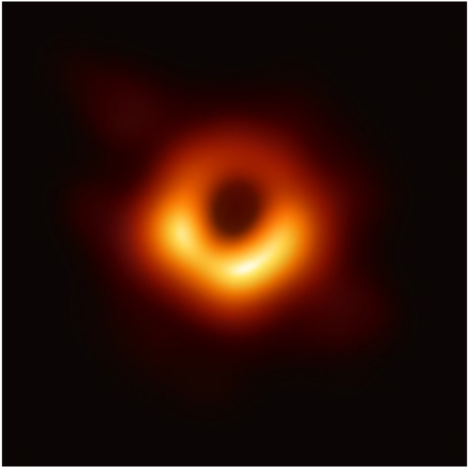
Dziura 1-wymiarowa (jak w okręgu $\mathbb{S}^1$):

castorama.pl

Dziury 2-wymiarowe (jak w sferze $\mathbb{S}^2$):

portalspozywczy.pl

Dziura 3-wymiarowa?



commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=77925953

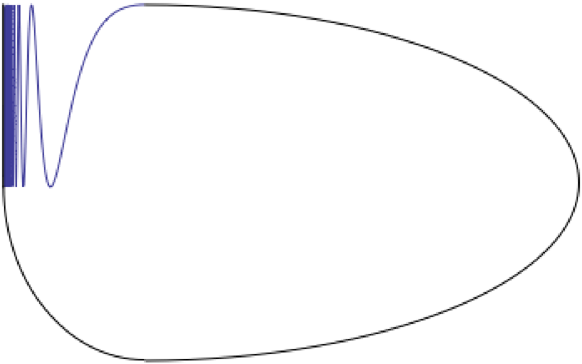
Dziura 0-wymiarowa (jak w $\mathbb{S}^0$):

`edition.cnn.com/travel/article/private-island-rentals`

A to nie jest dziura (topologiczna):

geodev.pl

Czy okrąg warszawski ma dziurę?



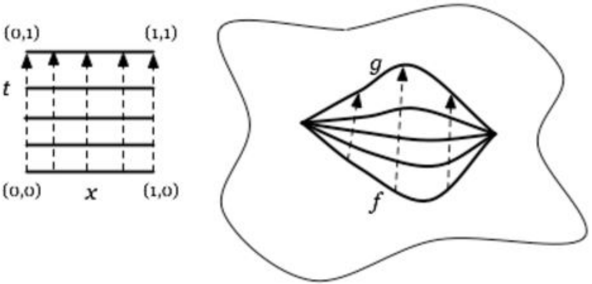
commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24485870

Homotopia pomiędzy ciągłymi funkcjami $f, g : X \to Y$:

ciągłe odwzorowanie $h : X \times [0,1] \to Y$ takie, że $\forall\, x \in X$

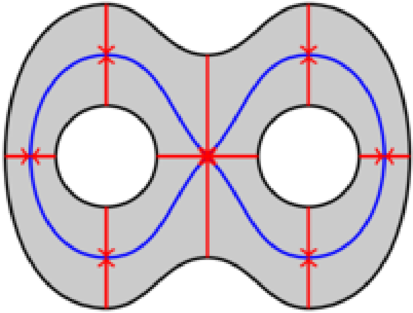
$$h(x,0) = f(x) \quad \text{oraz} \quad h(x,1) = g(x).$$

Stosujemy oznaczenie $f \sim g$.



https://ncatlab.org/nlab/show/homotopy

Idea wykrywania dziur jednowymiarowych: rzucamy „lassem” i ściągamy homotopijnie – czy ściągniemy do punktu?



http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahjde/tg/html/pi1~09.html

Ale jak policzyć dziury w przestrzeni? Jak je rozróżnić?

Przestrzenie X i Y są homotopijnie równoważne, jesli:

$\exists$ ciągłe odwzorowania $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ takie, że

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X \quad \text{oraz} \quad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y.$$

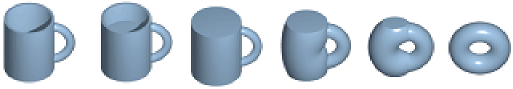
Będziemy stosować oznaczenie $\quad X \sim Y$.

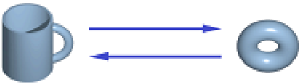
Przestrzenie X i Y są homotopijnie równoważne, jesli:

$\exists$ ciągłe odwzorowania $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ takie, że

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X \quad \text{oraz} \quad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y .$$

Będziemy stosować oznaczenie $X \sim Y$.





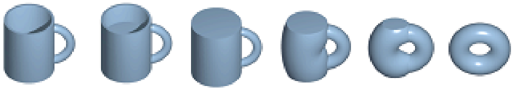
calculus123.com

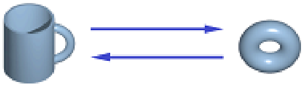
Przestrzenie X i Y są homotopijnie równoważne, jesli:

$\exists$ ciągłe odwzorowania $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ takie, że

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X \quad \text{oraz} \quad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y .$$

Będziemy stosować oznaczenie $X \sim Y$.





calculus123.com

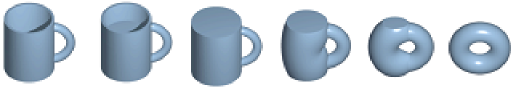
- relacja równoważności, szersza niż homeomorficzność

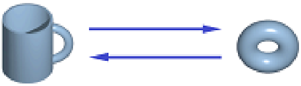
Przestrzenie X i Y są homotopijnie równoważne, jesli:

$\exists$ ciągłe odwzorowania $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ takie, że

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X \quad \text{oraz} \quad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y .$$

Będziemy stosować oznaczenie $X \sim Y$.





calculus123.com

- relacja równoważności, szersza niż homeomorficzność
- X – ściągalna, jeśli $X \sim \{p\}$.

Klasy homotopii literek alfabetu łacińskiego:

Klasy homotopii literek alfabetu łacińskiego:

1. A D O P Q R

Klasy homotopii literek alfabetu łacińskiego:

1. A D O P Q R
2. B

Klasy homotopii literek alfabetu łacińskiego:

1. A D O P Q R
2. B
3. C E F G H I J K L M N S T V W X Y Z

Klasy homotopii literek alfabetu łacińskiego:

1. A D O P Q R
2. B
3. C E F G H I J K L M N S T V W X Y Z

Klasy homotopii literek alfabetu łacińskiego:

1. A D O P Q R
2. B
3. C E F G H I J K L M N S T V W X Y Z

Klas homeomorfizmu jest znacznie więcej (ile?)

Idea konstrukcji grup homotopii przestrzeni X

- Wybieramy punkt bazowy $p \in X$ i tworzymy przestrzeń zamkniętych dróg (pętli, ciągłych obrazów $\mathbb{S}^1$ z wyróżnionym punktem);

Idea konstrukcji grup homotopii przestrzeni X

- Wybieramy punkt bazowy $p \in X$ i tworzymy przestrzeń zamkniętych dróg (pętli, ciągłych obrazów $\mathbb{S}^1$ z wyróżnionym punktem);
- utożsamiamy pętle przez homotopię;

Idea konstrukcji grup homotopii przestrzeni X

- Wybieramy punkt bazowy $p \in X$ i tworzymy przestrzeń zamkniętych dróg (pętli, ciągłych obrazów $\mathbb{S}^1$ z wyróżnionym punktem);
- utożsamiamy pętle przez homotopię;
- wyposażamy przestrzeń pętli w strukturę grupy $\pi_1(X)$:

Idea konstrukcji grup homotopii przestrzeni X

- Wybieramy punkt bazowy $p \in X$ i tworzymy przestrzeń zamkniętych dróg (pętli, ciągłych obrazów $\mathbb{S}^1$ z wyróżnionym punktem);
- utożsamiamy pętle przez homotopię;
- wyposażamy przestrzeń pętli w strukturę grupy $\pi_1(X)$:
  - pętle można sumować: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3$

Idea konstrukcji grup homotopii przestrzeni X

- Wybieramy punkt bazowy $p \in X$ i tworzymy przestrzeń zamkniętych dróg (pętli, ciągłych obrazów $\mathbb{S}^1$ z wyróżnionym punktem);
- utożsamiamy pętle przez homotopię;
- wyposażamy przestrzeń pętli w strukturę grupy $\pi_1(X)$:
  - pętle można sumować: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3$
  - pętlę można przebiec w drugą stronę: γ^{-1}

Idea konstrukcji grup homotopii przestrzeni X

- Wybieramy punkt bazowy $p \in X$ i tworzymy przestrzeń zamkniętych dróg (pętli, ciągłych obrazów $\mathbb{S}^1$ z wyróżnionym punktem);
- utożsamiamy pętle przez homotopię;
- wyposażamy przestrzeń pętli w strukturę grupy $\pi_1(X)$:
  - pętle można sumować: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3$
  - pętlę można przebiec w drugą stronę: γ^{-1}
  - jest pętla stała o obrazie $\{p\}$ = element neutralny

Idea konstrukcji grup homotopii przestrzeni X

- Wybieramy punkt bazowy $p \in X$ i tworzymy przestrzeń zamkniętych dróg (pętli, ciągłych obrazów $\mathbb{S}^1$ z wyróżnionym punktem);
- utożsamiamy pętle przez homotopię;
- wyposażamy przestrzeń pętli w strukturę grupy $\pi_1(X)$:
  - pętle można sumować: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3$
  - pętlę można przebiec w drugą stronę: γ^{-1}
  - jest pętla stała o obrazie $\{p\}$ = element neutralny
- liczbę generatorów tej grupy $\pi_1(X)$ możemy interpretować jako liczbę dziur (?).

Grupy podstawowe różnych przestrzeni topologicznych:

- $\pi_1(\{p\}) = \{0\}$ (jak i dowolnej przestrzeni ściągalnej)

Grupy podstawowe różnych przestrzeni topologicznych:

- $\pi_1(\{p\}) = \{0\}$ (jak i dowolnej przestrzeni ściągalnej)
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$

Grupy podstawowe różnych przestrzeni topologicznych:

- $\pi_1(\{p\}) = \{0\}$ (jak i dowolnej przestrzeni ściągalnej)
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ (jak i dowolne $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 2$)

Grupy podstawowe różnych przestrzeni topologicznych:

- $\pi_1(\{p\}) = \{0\}$ (jak i dowolnej przestrzeni ściągalnej)
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ (jak i dowolne $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 2$)
- $\pi_1(\infty) = F_2$ (grupa wolna o dwóch generatorach)

Grupy podstawowe różnych przestrzeni topologicznych:

- $\pi_1(\{p\}) = \{0\}$ (jak i dowolnej przestrzeni ściągalnej)
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ (jak i dowolne $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 2$)
- $\pi_1(\infty) = F_2$ (grupa wolna o dwóch generatorach)
- $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ (dwa generatory, ale przemienna)

Grupy podstawowe różnych przestrzeni topologicznych:

- $\pi_1(\{p\}) = \{0\}$ (jak i dowolnej przestrzeni ściągalnej)
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ (jak i dowolne $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 2$)
- $\pi_1(\infty) = F_2$ (grupa wolna o dwóch generatorach)
- $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ (dwa generatory, ale przemienna)
- $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$

Grupy podstawowe różnych przestrzeni topologicznych:

- $\pi_1(\{p\}) = \{0\}$ (jak i dowolnej przestrzeni ściągalnej)
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}$ (jak i dowolne $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 2$)
- $\pi_1(\infty) = F_2$ (grupa wolna o dwóch generatorach)
- $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ (dwa generatory, ale przemienna)
- $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$
- $\ldots$

Co z dziurami więcejwymiarowymi?

- zamiast pętli możemy zarzucać „płachtę” (ciągły obraz $\mathbb{S}^n$ z wyróżnionym punktem)

Co z dziurami więcejwymiarowymi?

- zamiast pętli możemy zarzucać „płachtę” (ciągły obraz $\mathbb{S}^n$ z wyróżnionym punktem)
- $\implies$ wyższe grupy homotopii $\pi_n(X)$, $n \geqslant 2$

Co z dziurami więcejwymiarowymi?

- zamiast pętli możemy zarzucać „płachtę" (ciągły obraz $\mathbb{S}^n$ z wyróżnionym punktem)
- $\implies$ wyższe grupy homotopii $\pi_n(X)$, $n \geqslant 2$
- pojawiają się kłopoty, gdy liczymy n-wymiarowe dziury sfer $\mathbb{S}^k$ dla $n > k$:

Co z dziurami więcejwymiarowymi?

- zamiast pętli możemy zarzucać „płachtę” (ciągły obraz $\mathbb{S}^n$ z wyróżnionym punktem)
- $\implies$ wyższe grupy homotopii $\pi_n(X)$, $n \geqslant 2$
- pojawiają się kłopoty, gdy liczymy n-wymiarowe dziury sfer $\mathbb{S}^k$ dla $n > k$:

Co z dziurami wielowymiarowymi?

- zamiast pętli możemy zarzucać „płachtę” (ciągły obraz $\mathbb{S}^n$ z wyróżnionym punktem)
- $\implies$ wyższe grupy homotopii $\pi_n(X)$, $n \geqslant 2$
- pojawiają się kłopoty, gdy liczymy n-wymiarowe dziury sfer $\mathbb{S}^k$ dla $n > k$:

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}
S^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	${\mathbb{Z}_2}^2$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{120}\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^5$
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{72}\times\mathbb{Z}_2$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{120}$

https://ncatlab.org/nlab/show/homotopy

Krótko o homologiach singularnych

Standardowy n-sympleks $\Delta_n \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta_n = [e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} r_i e_i, \,:\, r_i \geqslant 0,\, \sum_{i=0}^{n} r_i = 1 \right\}.$$

Standardowy n-sympleks $\Delta_n \in \mathbb{R}^{n+1}$

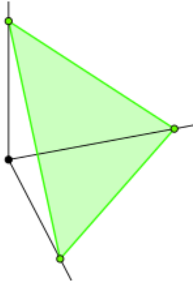
$$\Delta_n = [e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} r_i e_i, \, : r_i \geqslant 0, \, \sum_{i=0}^{n} r_i = 1 \right\}.$$

2-sympleks standardowy

Standardowy n-sympleks $\Delta_n \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta_n = [e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} r_i e_i, \, : r_i \geqslant 0, \, \sum_{i=0}^{n} r_i = 1 \right\}.$$

2-sympleks standardowy (zwany też trójkątem):



commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3214396

Konstruujemy teraz kolejno pojęcia:

- n-sympleks singularny w przestrzeni X: ciągłe $\sigma : \Delta_n \to X$

Konstruujemy teraz kolejno pojęcia:

- n-sympleks singularny w przestrzeni X: ciągłe $\sigma : \Delta_n \to X$
- n-łańcuch singularny: $\sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}$;

Konstruujemy teraz kolejno pojęcia:

- n-sympleks singularny w przestrzeni X: ciągłe $\sigma : \Delta_n \to X$
- n-łańcuch singularny: $\sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z};$
- wolną grupę abelową wszystkich n-łańcuchów singularnych: $S_n(X)$

Konstruujemy teraz kolejno pojęcia:

- n-sympleks singularny w przestrzeni X: ciągłe $\sigma : \Delta_n \to X$
- n-łańcuch singularny: $\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z};$
- wolną grupę abelową wszystkich n-łańcuchów singularnych: $S_n(X)$
- grupę z gradacją łańcuchów singularnych: $S(X) = \{S_i(X)\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Operator brzegu ∂ n-sympleksu singularnego σ

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_n]}$$

Operator brzegu ∂ n-sympleksu singularnego σ

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_n]}$$

- Operator ∂ rozszerzamy liniowo na całą grupę $S(X)$.

Operator brzegu ∂ n-sympleksu singularnego σ

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[e_0,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_n]}$$

- Operator ∂ rozszerzamy liniowo na całą grupę $S(X)$.
- $\partial : S_n \to S_{n-1}$ jest homomorfizmem grup.

Operator brzegu ∂ n-sympleksu singularnego σ

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[e_0,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n]}$$

- Operator ∂ rozszerzamy liniowo na całą grupę $S(X)$.
- $\partial : S_n \to S_{n-1}$ jest homomorfizmem grup.
- Można sprawdzić, że $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ (definicja?)

Operator brzegu ∂ n-sympleksu singularnego σ

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[e_0,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n]}$$

- Operator ∂ rozszerzamy liniowo na całą grupę $S(X)$.
- $\partial : S_n \to S_{n-1}$ jest homomorfizmem grup.
- Można sprawdzić, że $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ (definicja?)
- Parę $(S(X), \partial)$ nazywamy *kompleksem singularnym*.

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *cyklem*,

jeśli $\quad \partial c = 0.$

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *cyklem*,

jeśli $\quad \partial c = 0.$

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *brzegiem*,

jeśli $\quad \exists c' \in S(X)$ taki, że $\partial c' = c.$

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *cyklem*,

jeśli $\quad \partial c = 0$.

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *brzegiem*,

jeśli $\quad \exists c' \in S(X)$ taki, że $\partial c' = c$.

- n-cykle są podgrupą $S_n(X)$, oznaczamy ją $Z_n(X)$.

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *cyklem*,

jeśli $\quad \partial c = 0.$

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *brzegiem*,

jeśli $\quad \exists c' \in S(X)$ taki, że $\partial c' = c.$

- n-cykle są podgrupą $S_n(X)$, oznaczamy ją $Z_n(X)$.
- n-brzegi są podgrupą $S_n(X)$, oznaczamy ją $B_n(X)$.

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *cyklem*,

jeśli $\quad \partial c = 0$.

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *brzegiem*,

jeśli $\quad \exists c' \in S(X)$ taki, że $\partial c' = c$.

- n-cykle są podgrupą $S_n(X)$, oznaczamy ją $Z_n(X)$.
- n-brzegi są podgrupą $S_n(X)$, oznaczamy ją $B_n(X)$.
- $B_n(X)$ jest podgrupą $Z_n(X)$ (bo $\partial_{n-1}\partial_n = 0$).

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *cyklem*,

jeśli $\quad \partial c = 0$.

Łańcuch $c \in S(X)$ jest *brzegiem*,

jeśli $\quad \exists c' \in S(X)$ taki, że $\partial c' = c$.

- n-cykle są podgrupą $S_n(X)$, oznaczamy ją $Z_n(X)$.
- n-brzegi są podgrupą $S_n(X)$, oznaczamy ją $B_n(X)$.
- $B_n(X)$ jest podgrupą $Z_n(X)$ (bo $\partial_{n-1}\partial_n = 0$).
- $Z_n(X) = \ker \partial_n, \quad B_n(X) = \operatorname{im} \partial_{n+1}$.

Grupa homologii singularnych $H_n(X)$ (nad $\mathbb{Z}$)

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}.$$

Grupa homologii singularnych $H_n(X)$ (nad $\mathbb{Z}$)

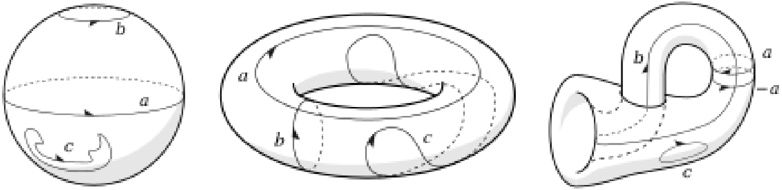
$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}.$$

Homologie – cykle, które nie są brzegami (dziury?)

Grupa homologii singularnych $H_n(X)$ (nad $\mathbb{Z}$)

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}.$$

Homologie – cykle, które nie są brzegami (dziury?)



commons.wikimedia.org

Grupy homologii różnych przestrzeni topologicznych (nad $\mathbb{Z}$):

- $H_*(\{p\}) = (\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$ (jak i dowolnej ściągalnej)

Grupy homologii różnych przestrzeni topologicznych (nad $\mathbb{Z}$):

- $H_*(\{p\}) = (\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$ (jak i dowolnej ściągalnej)
- $H_*(\mathbb{S}^n) = (\underset{(0)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots, 0, \underset{(n)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots,)$

Grupy homologii różnych przestrzeni topologicznych (nad $\mathbb{Z}$):

- $H_*(\{p\}) = (\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$ (jak i dowolnej ściągalnej)
- $H_*(\mathbb{S}^n) = (\underset{(0)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots, 0, \underset{(n)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots,)$
- $H_1(\infty) = \mathbb{Z}^2$ (już przemienna)

Grupy homologii różnych przestrzeni topologicznych (nad $\mathbb{Z}$):

- $H_*(\{p\}) = (\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$ (jak i dowolnej ściągalnej)
- $H_*(\mathbb{S}^n) = (\underset{(0)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots, 0, \underset{(n)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots,)$
- $H_1(\infty) = \mathbb{Z}^2$ (już przemienna)
- $H_*(\mathbb{T}^2) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, 0, \dots)$

Grupy homologii różnych przestrzeni topologicznych (nad $\mathbb{Z}$):

- $H_*(\{p\}) = (\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$ (jak i dowolnej ściągalnej)
- $H_*(\mathbb{S}^n) = (\underset{(0)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots, 0, \underset{(n)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots,)$
- $H_1(\infty) = \mathbb{Z}^2$ (już przemienna)
- $H_*(\mathbb{T}^2) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, 0, \dots)$
- $H_*(\mathbb{R}P^2) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, 0, \dots)$

Grupy homologii różnych przestrzeni topologicznych (nad $\mathbb{Z}$):

- $H_*(\{p\}) = (\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$ (jak i dowolnej ściągalnej)
- $H_*(\mathbb{S}^n) = (\underset{(0)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots, 0, \underset{(n)}{\mathbb{Z}}, 0, \dots,)$
- $H_1(\infty) = \mathbb{Z}^2$ (już przemienna)
- $H_*(\mathbb{T}^2) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}, 0, \dots)$
- $H_*(\mathbb{R}P^2) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, 0, \dots)$
- ...

Teoria homologii

Teoria homologii

Co jest esencją tej konstrukcji?

Teoria homologii

Co jest esencją tej konstrukcji?

- *kompleks łańcuchowy*: ciąg grup abelowych $\{S_i\}_{i=0}^{\infty}$,

Teoria homologii

Co jest esencją tej konstrukcji?

- *kompleks łańcuchowy*: ciąg grup abelowych $\{S_i\}_{i=0}^{\infty}$,
- *operator brzegu*: homomorfizm łańcuchowy $\partial : S_i \to S_{i-1}$ taki, że $\partial^2 = 0$.

Homologie Morse'a

Rozważamy gładką, zwartą, orientowalną rozmaitość n-wymiarową M i gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$.

$p \in M$ – *punkt krytyczny* funkcji f,

jeśli $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$.

Rozważamy gładką, zwartą, orientowalną rozmaitość n-wymiarową M i gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$.

$p \in M$ – *punkt krytyczny* funkcji f,

jeśli $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$.

$\mathrm{Crit}(f) \equiv$ zbiór punktów krytycznych f.

Rozważamy gładką, zwartą, orientowalną rozmaitość n-wymiarową M i gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$.

$p \in M$ – *punkt krytyczny* funkcji f,

jeśli $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$.

$\mathrm{Crit}(f) \equiv$ zbiór punktów krytycznych f.

$f : M \to \mathbb{R}$ – *funkcja Morse'a*, jeśli

$\forall p \in \mathrm{Crit}(f) \quad \mathrm{Hess}_f(p)$ jest niezdegenerowaną forma kwadratową.

Rozważamy gładką, zwartą, orientowalną rozmaitość n-wymiarową M i gładką funkcję $f : M \to \mathbb{R}$.

$p \in M$ – *punkt krytyczny* funkcji f,

jeśli $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$.

$\mathrm{Crit}(f) \equiv$ zbiór punktów krytycznych f.

$f : M \to \mathbb{R}$ – *funkcja Morse'a*, jeśli

$\forall p \in \mathrm{Crit}(f) \quad \mathrm{Hess}_f(p)$ jest niezdegenerowaną forma kwadratową.

Ograniczamy się od teraz do funkcji Morse'a (generyczne).

Indeks Morse'a punktu $p \in \mathsf{Crit}(f)$

$\mu(p) \equiv$ liczba ujemnych wartości własnych $\mathsf{Hess}_f(p)$.

Indeks Morse'a punktu $p \in \mathrm{Crit}(f)$

$\mu(p) \equiv$ liczba ujemnych wartości własnych $\mathrm{Hess}_f(p)$.

$\mathrm{Crit}_i(f) \equiv$ zbiór punktów krytycznych o indeksie $i \in \{0, \ldots, n\}$ (skończony!).

Indeks Morse'a punktu $p \in \mathrm{Crit}(f)$

$\mu(p) \equiv$ liczba ujemnych wartości własnych $\mathrm{Hess}_f(p)$.

$\mathrm{Crit}_i(f) \equiv$ zbiór punktów krytycznych o indeksie $i \in \{0, \ldots, n\}$ (skończony!).

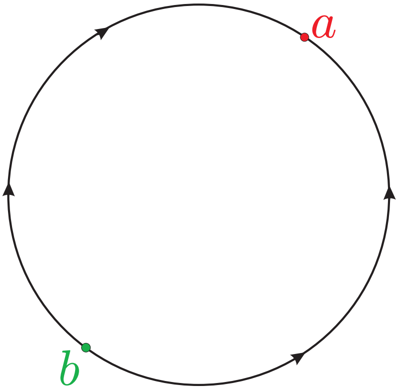
Kompleks łańcuchowy Morse'a: $C^M(f) = \{C_i^M(f)\}_{i=0}^n$,

gdzie $C_i^M(f) := \mathbb{Z} \otimes \mathrm{Crit}_i(f)$.

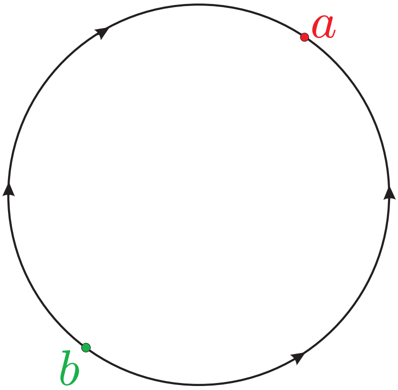
Rolę sympleksów pełnią punkty krytyczne, „wymiarem" jest indeks Morse'a!

W przykładach zamiast wykresu f rysujemy jej potok gradientowy na rozmaitości M:

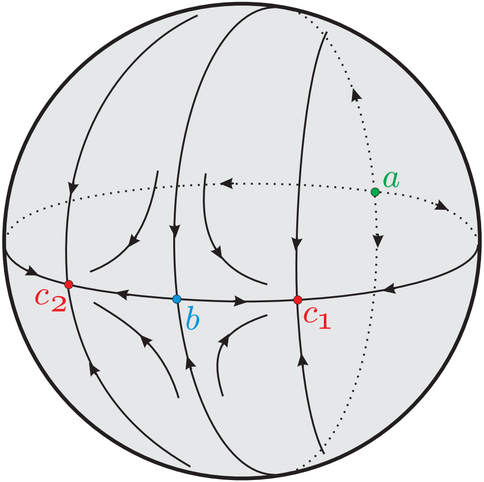
W przykładach zamiast wykresu f rysujemy jej potok gradientowy na rozmaitości M:

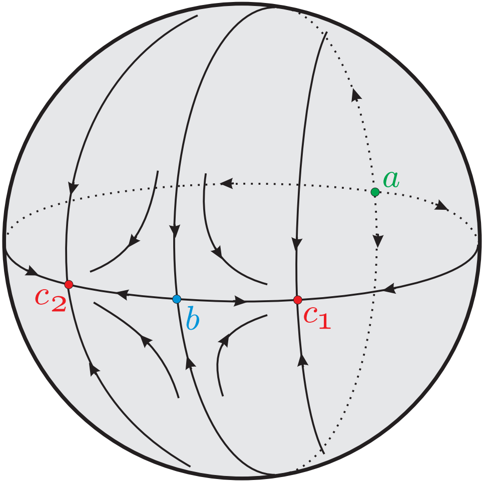


W przykładach zamiast wykresu f rysujemy jej potok gradientowy na rozmaitości M:



$n = 1$, $M = \mathbb{S}^1$, dwa punkty krytyczne:
maksimum a ($\mu(a) = 1$) i minimum b ($\mu(b) = 0$).


a
c_2
b
c_1



$n = 2$, $M = \mathbb{S}^2$, cztery punkty krytyczne:
minimum a ($\mu(a) = 0$), dwa maksima c_1, c_2 ($\mu(c_1) = \mu(c_2) = 2$)
oraz siodło b ($\mu(b) = 1$).

Operator brzegu dla punktu $p \in \mathrm{Crit}_i(f)$:

$$\partial(p) := \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} \#\mathcal{M}(p,q) \cdot q,$$

gdzie $\#\mathcal{M}(p,q)$ jest liczbą orbit potoku gradientowego łączących p z q, liczonych z orientacją.

Operator brzegu dla punktu $p \in \mathrm{Crit}_i(f)$:

$$\partial(p) := \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} \#\mathcal{M}(p,q) \cdot q,$$

gdzie $\#\mathcal{M}(p,q)$ jest liczbą orbit potoku gradientowego łączących p z q, liczonych z orientacją.

- dla funkcji Morse'a liczba ta jest zawsze skończona

Operator brzegu dla punktu $p \in \mathrm{Crit}_i(f)$:

$$\partial(p) := \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} \#\mathcal{M}(p, q) \cdot q,$$

gdzie $\#\mathcal{M}(p, q)$ jest liczbą orbit potoku gradientowego łączących p z q, liczonych z orientacją.

- dla funkcji Morse'a liczba ta jest zawsze skończona
- orientacja zgodna z orientacją M i rozmaitości stabilnych p i q

Operator brzegu dla punktu $p \in \mathrm{Crit}_i(f)$:

$$\partial(p) := \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} \#\mathcal{M}(p, q) \cdot q,$$

gdzie $\#\mathcal{M}(p, q)$ jest liczbą orbit potoku gradientowego łączących p z q, liczonych z orientacją.

- dla funkcji Morse'a liczba ta jest zawsze skończona
- orientacja zgodna z orientacją M i rozmaitości stabilnych p i q
- jest to rzeczywiście operator brzegu, czyli $\partial \circ \partial(p) = 0$

Operator brzegu dla punktu $p \in \mathrm{Crit}_i(f)$:

$$\partial(p) := \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} \#\mathcal{M}(p,q) \cdot q,$$

gdzie $\#\mathcal{M}(p,q)$ jest liczbą orbit potoku gradientowego łączących p z q, liczonych z orientacją.

- dla funkcji Morse'a liczba ta jest zawsze skończona
- orientacja zgodna z orientacją M i rozmaitości stabilnych p i q
- jest to rzeczywiście operator brzegu, czyli $\partial \circ \partial(p) = 0$
- definicję rozszerzamy liniowo na łańcuchy

Operator brzegu dla punktu $p \in \mathrm{Crit}_i(f)$:

$$\partial(p) := \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} \#\mathcal{M}(p,q) \cdot q,$$

gdzie $\#\mathcal{M}(p,q)$ jest liczbą orbit potoku gradientowego łączących p z q, liczonych z orientacją.

- dla funkcji Morse'a liczba ta jest zawsze skończona
- orientacja zgodna z orientacją M i rozmaitości stabilnych p i q
- jest to rzeczywiście operator brzegu, czyli $\partial \circ \partial(p) = 0$
- definicję rozszerzamy liniowo na łańcuchy

Operator brzegu dla punktu $p \in \mathrm{Crit}_i(f)$:

$$\partial(p) := \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{i-1}(f)} \#\mathcal{M}(p,q) \cdot q,$$

gdzie $\#\mathcal{M}(p,q)$ jest liczbą orbit potoku gradientowego łączących p z q, liczonych z orientacją.

- dla funkcji Morse'a liczba ta jest zawsze skończona
- orientacja zgodna z orientacją M i rozmaitości stabilnych p i q
- jest to rzeczywiście operator brzegu, czyli $\partial \circ \partial(p) = 0$
- definicję rozszerzamy liniowo na łańcuchy

Brzegiem punktu krytycznego p jest łańcuch połączonych z nim punktów o indeksie o 1 niższym!

Homologie Morse'a definiujemy jako homologie kompleksu łańcuchowego $(C_*^M(f), \partial)$:

$$H_*^M(f) := H_*(C^M(f), \partial) = \frac{\ker[\partial : C_*^M(f) \to C_{*-1}^M(f)]}{\operatorname{im}[\partial : C_{*+1}^M(f) \to C_*^M(f)]}.$$

Homologie Morse'a definiujemy jako homologie kompleksu łańcuchowego $(C_*^M(f), \partial)$:

$$H_*^M(f) := H_*(C^M(f), \partial) = \frac{\ker[\partial : C_*^M(f) \to C_{*-1}^M(f)]}{\operatorname{im}[\partial : C_{*+1}^M(f) \to C_*^M(f)]}.$$

- $H_*^M(f)$ nie zależą od wyboru funkcji Morse'a–Smale'a, a zatem możemy pisać $H_*^M(M)$.

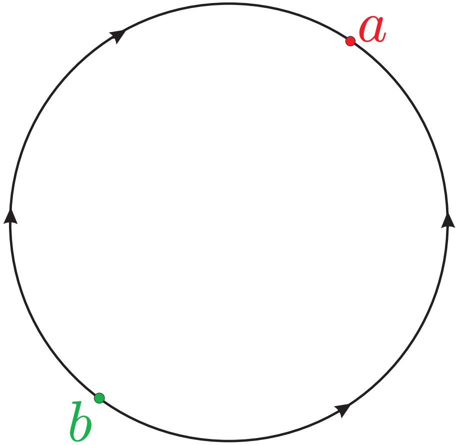
Homologie Morse'a definiujemy jako homologie kompleksu łańcuchowego $(C_*^M(f), \partial)$:

$$H_*^M(f) := H_*(C^M(f), \partial) = \frac{\ker[\partial : C_*^M(f) \to C_{*-1}^M(f)]}{\mathrm{im}[\partial : C_{*+1}^M(f) \to C_*^M(f)]}.$$

- $H_*^M(f)$ nie zależą od wyboru funkcji Morse'a–Smale'a, a zatem możemy pisać $H_*^M(M)$.
- $H_*^M(M)$ są kanonicznie izomorficzne z homologiami singularnymi.

Przykłady

$M = \mathbb{S}^1$, dwa punkty krytyczne (maksimum a i minimum b):



Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{b\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_1^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{a\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_{\geqslant 2}^M(f) = 0.$$

Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{b\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_1^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{a\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_{\geqslant 2}^M(f) = 0.$$

Operator brzegu ∂:

$$\partial_{\geqslant 2} = 0, \quad \partial_1(a) = b - b = 0, \quad \partial_0(b) = 0,$$

bo orbity łączące a i b mają przeciwne znaki.

Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{b\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_1^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{a\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_{\geqslant 2}^M(f) = 0.$$

Operator brzegu ∂:

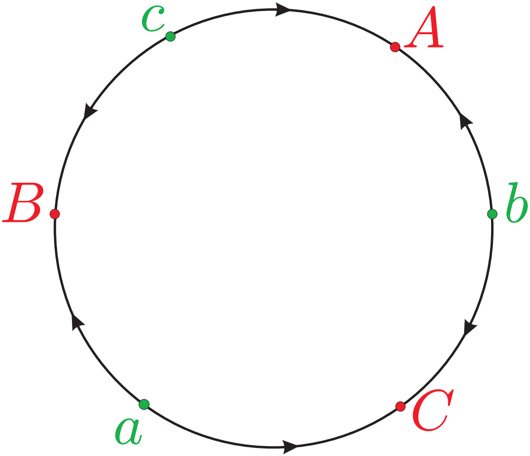
$$\partial_{\geqslant 2} = 0, \quad \partial_1(a) = b - b = 0, \quad \partial_0(b) = 0,$$

bo orbity łączące a i b mają przeciwne znaki.
Ostatecznie:

$$\begin{aligned} H_2^M(f) &= 0 \\ H_1^M(f) &= \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{0} \simeq \mathbb{Z} \\ H_0^M(f) &= \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{im} \partial_1} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{0} \simeq \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy wynik zgodny z homologiami singularnymi.

$M = \mathbb{S}^1$, sześć punktów krytycznych (maksima A, B, C i minima a, b, c):



Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z}\otimes\{a, b, c\} \simeq \mathbb{Z}^3 \simeq \mathbb{Z}\otimes\{A, B, C\} = C_1^M(f), \quad C_{\geqslant 2}^M(f) = 0.$$

Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z}\otimes\{a, b, c\} \simeq \mathbb{Z}^3 \simeq \mathbb{Z}\otimes\{A, B, C\} = C_1^M(f), \quad C_{\geqslant 2}^M(f) = 0.$$

Operator brzegu ∂:

$$\partial_{\geqslant 2} = 0, \quad \partial_0(a) = \partial_0(b) = \partial_0(c) = 0,$$

$$\partial_1(A) = b - c, \quad \partial_1(B) = c - a, \quad \partial_1(C) = a - b.$$

Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z}\otimes\{a, b, c\} \simeq \mathbb{Z}^3 \simeq \mathbb{Z}\otimes\{A, B, C\} = C_1^M(f), \quad C_{\geqslant 2}^M(f) = 0.$$

Operator brzegu ∂:

$$\partial_{\geqslant 2} = 0, \quad \partial_0(a) = \partial_0(b) = \partial_0(c) = 0,$$

$$\partial_1(A) = b - c, \quad \partial_1(B) = c - a, \quad \partial_1(C) = a - b.$$

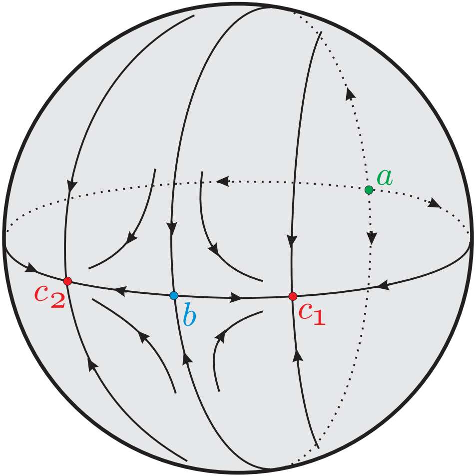
Ostatecznie znów ten sam wynik (nic dziwnego):

$$H_2^M(f) = 0$$

$$H_1^M(f) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} = \frac{(A + B + C) \times \mathbb{Z}}{0} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{0} \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_0^M(f) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{im} \partial_1} \simeq \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}^2} \simeq \mathbb{Z}.$$

$M = \mathbb{S}^2$. Cztery punkty krytyczne: minimum a, dwa maksima c_1, c_2 i siodło b:



Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{a\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_1^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{b\} \simeq \mathbb{Z},$$

$$C_2^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{c_1, c_2\} \simeq \mathbb{Z}^2, \quad C_{\geqslant 3}^M(f) = 0.$$

Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{a\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_1^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{b\} \simeq \mathbb{Z},$$

$$C_2^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{c_1, c_2\} \simeq \mathbb{Z}^2, \quad C_{\geqslant 3}^M(f) = 0.$$

Operator brzegu ∂:

$$\partial_{\geqslant 3} = 0, \quad \partial_1(b) = 0, \quad \partial_2(c_1) = -\partial_2(c_2) = b.$$

Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{a\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_1^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{b\} \simeq \mathbb{Z},$$

$$C_2^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{c_1, c_2\} \simeq \mathbb{Z}^2, \quad C_{\geqslant 3}^M(f) = 0.$$

Operator brzegu ∂:

$$\partial_{\geqslant 3} = 0, \quad \partial_1(b) = 0, \quad \partial_2(c_1) = -\partial_2(c_2) = b.$$

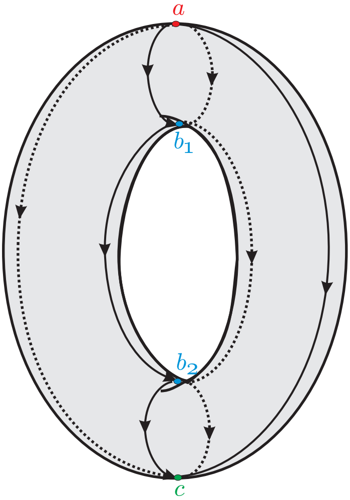
Dostajemy homologie sfery:

$$H_2^M(f) = \frac{\ker \partial_2}{\operatorname{im} \partial_3} = \frac{(c_1 + c_2) \times \mathbb{Z}}{0} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{0} \simeq \mathbb{Z}$$

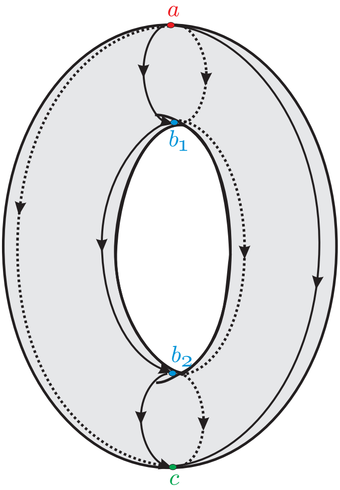
$$H_1^M(f) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = 0$$

$$H_0^M(f) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{im} \partial_1} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{0} \simeq \mathbb{Z}.$$

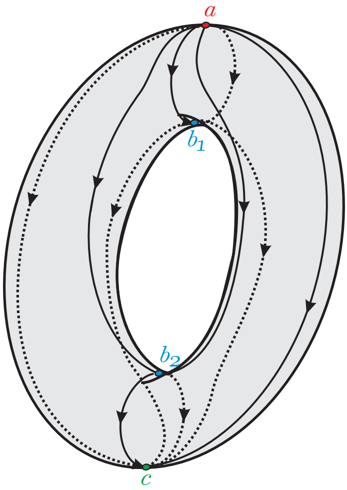
$M = \mathbb{T}^2$, f – funkcja wysokości z czterema punktami krytycznymi: maksimum a, dwa siodła b_1, b_2 i minimum c:



Trzeba lekko nachylić torus, żeby funkcja wysokości spełniała warunek Morse'a-Smale'a (nie było orbit łączących b_1 i b_2):



Trzeba lekko nachylić torus, żeby funkcja wysokości spełniała warunek Morse'a-Smale'a (nie było orbit łączących b_1 i b_2):



Kompleks łańcuchowy Morse'a dla tej funkcji:

$$C_0^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{c\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_1^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{b_1, b_2\} \simeq \mathbb{Z}^2,$$

$$C_2^M(f) = \mathbb{Z} \otimes \{a\} \simeq \mathbb{Z}, \quad C_{\geqslant 3}^M(f) = 0.$$

Operator brzegu ∂:

$$\partial_{\geqslant 3} = 0, \quad \partial_2(a) = b_1 - b_1 + b_2 - b_2 = 0,$$

$$\partial_1(b_1) = c - c = 0, \quad \partial_1(b_2) = c - c = 0.$$

Dostajemy homologie torusa:

$$H_2^M(f) = \frac{\ker \partial_2}{\operatorname{im} \partial_3} = \frac{\mathbb{Z}}{0} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{0} \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_1^M(f) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} \simeq \frac{\mathbb{Z}^2}{0} = \mathbb{Z}^2$$

$$H_0^M(f) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{im} \partial_1} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{0} \simeq \mathbb{Z}.$$

Zastosowanie

Liczby Bettiego β_i rozmaitości M (liczba dziur?)

$$\beta_i := \operatorname{rank} H_i(M, \mathbb{Z}), \quad \text{dla } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Liczby Bettiego β_i rozmaitości M (liczba dziur?)

$$\beta_i := \operatorname{rank} H_i(M, \mathbb{Z}), \quad \text{dla } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Twierdzenie. Słabe nierówności Morse'a

Dla każdego $i \in \{0, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność:

$$\# \operatorname{Crit}_i f \geqslant \beta_i.$$

Liczby Bettiego β_i rozmaitości M (liczba dziur?)

$$\beta_i := \operatorname{rank} H_i(M, \mathbb{Z}), \quad \text{dla } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Twierdzenie. Słabe nierówności Morse'a

Dla każdego $i \in \{0, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność:

$$\# \operatorname{Crit}_i f \geqslant \beta_i.$$

Dowód. Słabe nierówności Morse'a wynikają wprost z

$$c_i = \operatorname{rank} C_i^M(f) \geqslant \operatorname{rank} H_i^M(f) = \beta_i.$$

□

Wnioski

- Generyczna funkcja rzeczywista gładka na sferze $\mathbb{S}^n$ ma przynajmniej jedno maksimum i minimum (wiemy)

Wnioski

- Generyczna funkcja rzeczywista gładka na sferze $\mathbb{S}^n$ ma przynajmniej jedno maksimum i minimum (wiemy)
- Na torusie $\mathbb{T}^2$ muszą być przynajmniej dwa siodła (a ogólnie na $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$?

Twierdzenie. Dualność Poincarégo

Niech M będzie zwartą, orientowalną rozmaitością wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Wówczas następujące pary grup homologii singularnych są izomorficzne:

$$H_k(M) \simeq H_{n-k}(M)$$

dla wszystkich $k = 0, \ldots, n$.

Twierdzenie. Dualność Poincarégo

Niech M będzie zwartą, orientowalną rozmaitością wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Wówczas następujące pary grup homologii singularnych są izomorficzne:

$$H_k(M) \simeq H_{n-k}(M)$$

dla wszystkich $k = 0, \ldots, n$.

Dowód. W dowodzie wykorzystuje się oczywistą zależność

$$C_k^M(f) \simeq C_{n-k}^M(-f),$$

a następnie twierdzenie o izomorfizmie homologii Morse'a i homologii singularnych. □

Kohomologie de Rhama

- Moduły gładkich i-form różniczkowych na $\mathbb{R}^n$ (ogólniej: na rozmaitości M) tworzą kompleks (ko)łańcuchowy: $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{\Omega^i(\mathbb{R}^n)\}_{i=0}^{\infty}$

Kohomologie de Rhama

- Moduły gładkich i-form różniczkowych na $\mathbb{R}^n$ (ogólniej: na rozmaitości M) tworzą kompleks (ko)łańcuchowy: $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{\Omega^i(\mathbb{R}^n)\}_{i=0}^{\infty}$
  - $\Omega^0(\mathbb{R}^n) \ni f$ – funkcje gładkie na $\mathbb{R}^n$

Kohomologie de Rhama

- Moduły gładkich i-form różniczkowych na $\mathbb{R}^n$ (ogólniej: na rozmaitości M) tworzą kompleks (ko)łańcuchowy: $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{\Omega^i(\mathbb{R}^n)\}_{i=0}^{\infty}$
  - $\Omega^0(\mathbb{R}^n) \ni f$ – funkcje gładkie na $\mathbb{R}^n$
  - $\Omega^1(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x$ – 1-formy

Kohomologie de Rhama

- Moduły gładkich i-form różniczkowych na $\mathbb{R}^n$ (ogólniej: na rozmaitości M) tworzą kompleks (ko)łańcuchowy: $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{\Omega^i(\mathbb{R}^n)\}_{i=0}^{\infty}$
  - $\Omega^0(\mathbb{R}^n) \ni f$ – funkcje gładkie na $\mathbb{R}^n$
  - $\Omega^1(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x$ – 1-formy
  - $\Omega^2(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ – 2-formy itd.

Kohomologie de Rhama

- Moduły gładkich i-form różniczkowych na $\mathbb{R}^n$ (ogólniej: na rozmaitości M) tworzą kompleks (ko)łańcuchowy: $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{\Omega^i(\mathbb{R}^n)\}_{i=0}^{\infty}$
  - $\Omega^0(\mathbb{R}^n) \ni f$ – funkcje gładkie na $\mathbb{R}^n$
  - $\Omega^1(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x$ – 1-formy
  - $\Omega^2(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ – 2-formy itd.
- operator różniczkowania form d można traktować jak *operator kobrzegu*: $\mathrm{d}\colon \Omega^i(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{i+1}(\mathbb{R}^n)$

Kohomologie de Rhama

- Moduły gładkich i-form różniczkowych na $\mathbb{R}^n$ (ogólniej: na rozmaitości M) tworzą kompleks (ko)łańcuchowy: $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{\Omega^i(\mathbb{R}^n)\}_{i=0}^{\infty}$
  - $\Omega^0(\mathbb{R}^n) \ni f$ – funkcje gładkie na $\mathbb{R}^n$
  - $\Omega^1(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x$ – 1-formy
  - $\Omega^2(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ – 2-formy itd.
- operator różniczkowania form d można traktować jak *operator kobrzegu*: $\mathrm{d}\colon \Omega^i(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{i+1}(\mathbb{R}^n)$
- $(\Omega^*(\mathbb{R}^n), \mathrm{d}) \implies$ *kohomologie de Rhama*

Kohomologie de Rhama

- Moduły gładkich i-form różniczkowych na $\mathbb{R}^n$ (ogólniej: na rozmaitości M) tworzą kompleks (ko)łańcuchowy: $\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \{\Omega^i(\mathbb{R}^n)\}_{i=0}^{\infty}$
  - $\Omega^0(\mathbb{R}^n) \ni f$ – funkcje gładkie na $\mathbb{R}^n$
  - $\Omega^1(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x$ – 1-formy
  - $\Omega^2(\mathbb{R}^n) \ni f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ – 2-formy itd.
- operator różniczkowania form d można traktować jak *operator kobrzegu*: $\mathrm{d}\colon \Omega^i(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{i+1}(\mathbb{R}^n)$
- $(\Omega^*(\mathbb{R}^n), \mathrm{d}) \implies$ *kohomologie de Rhama*
- Twierdzenie Stokesa:

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega$$

mówi w istocie o dualności operatora d do operatora ∂.

W szczególności mamy:

- Podstawowe twierdzenie analizy w $\mathbb{R}$:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

- Twierdzenie Greena w $\mathbb{R}^2$:

$$\oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego w $\mathbb{R}^3$:

$$\oiint_{\partial V} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

- ...

Girl Genius Comic