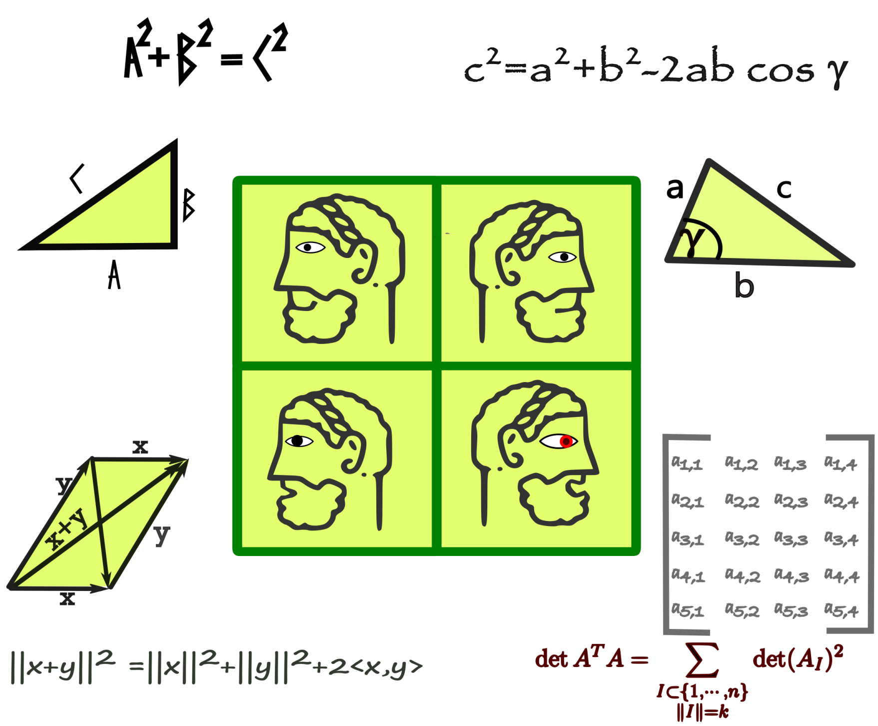
65. Szkoła Matematyki Poglądowej
Uogólnienia

Ośrodek Kultury Matematycznej

OKM

26-29 sierpnia 2022, Siedlce



Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Nie byłoby zbytnią przesadą stwierdzenie, że uogólnienia są kwintesencją matematyki. Zazwyczaj bardziej interesujące i przydatne są twierdzenia, które mówią coś o całej klasie obiektów, niż o pojedynczym jej reprezentancie. Najważniejsze twierdzenia podają własności liczb pierwszych, a nie tylko liczby 631, rozmaitości, a nie tylko sfery, funkcji ciągłych, a nie tylko funkcji rzeczywistej danej wzorem $f(x) = \sin x + 5$. Dzięki temu, pozornie bardzo odległe zastosowania mogą być wyprowadzone z pojedynczej teorii matematycznej (a czasem pojedynczego twierdzenia): własności wartości i wektorów własnych wynikające z twierdzenia Frobeniusa-Perrona są kluczowe zarówno w konstrukcji mostów, układów elektrycznych, jak i tworzeniu przeglądarek internetowych; wyznaczanie odpowiedniego stanu równowagi Nasha pozwala na wyjaśnianie mechanizmów ewolucji w świecie przyrody, ale też zachowań inwestorów na giełdzie lub uczestników ruchu drogowego; twierdzenia teorii liczb można wykorzystać równie dobrze w kryptografii, w zaawansowanej fizyce teoretycznej, jak i w komponowaniu muzyki, a równanie falowe opisuje równie dobrze dynamikę płynu, co rozchodzenie się dźwięku.

Jednak, z drugiej strony, teorie matematyczne prawie nigdy nie powstają w swojej najbardziej ogólnej formie. Różne procesy fizyczne trzeba było rozważać w oderwaniu od siebie, zanim zostały opisane rachunkiem różniczkowym, potem uogólnionym w równaniach różniczkowych cząstkowych i równaniach stochastycznych. Do zdefiniowania struktur algebraicznych zapewne by nie doszło, gdyby nie wcześniejsze badania zbiorów liczb całkowitych, rzeczywistych, czy zespolonych. Analizę geometrii rozmaitości musiały poprzedzić wieki zmagań z geometrią płaszczyzny i stereometrią.

Co było motywacją takich przejść od pojedynczych obiektów do coraz ogólniejszych teorii? Najczęściej potrzeba rozwiązania problemu bardziej ogólnego, niż rozważany dotychczas: gdy okazało się, że rozwiązania co bardziej skomplikowanych równań różniczkowych nie chcą się zachowywać „porządnie”, trzeba było się zająć teorią chaosu, odkrycia dotyczące zaskakującej struktury wszechświata dały impuls do rozwoju geometrii różniczkowej, a konieczność uwzględnienia w kalkulacjach ekonomicznych braku pewności co do przyszłych wydarzeń wymagała modeli opartych na teorii prawdopodobieństwa i statystyce. Czasami jednak, stary problem łatwiej można było rozwiązać po jego uogólnieniu: matematyczni olimpijczycy nieraz spotykali się z zadaniami, w których pewną własność danej, bardzo dużej liczby naturalnej najłatwiej było dowieść za pomocą indukcji matematycznej jako twierdzenie o całym podzbiorze liczb naturalnych; włoscy renesansowi matematycy odkryli, że aby rozwiązać rzeczywiste równania wielomianowe niezbędne jest uogólnienie liczb rzeczywistych do zespolonych; w końcu słynne Wielkie Twierdzenie Fermata zostało udowodnione w postaci znacznie ogólniejszego Twierdzenia Shimury-Taniyamy-Weila. Wreszcie, uogólnienia rzucają wyzwanie naszej intuicji, często błędnie ukształtowanej na prostszych przykładach: na zbiorach o mocy nieskończonej można wykonywać operacje paradoksalne z punktu widzenia intuicji dotyczącej zbiorów skończonych; topologia przestrzeni nieskończenie wymiarowych nie jest prostym przeniesieniem zasad otrzymywanych przy założeniu wymiaru skończonego, a dynamika płynu przy założeniu niewielkiej lepkości niekoniecznie jest podobna do dynamiki płynu przy założeniu lepkości zerowej.

Podsumowując, Uogólnienia jako tytuł LXV Szkoły Matematyki Poglądowej oznacza, że usłyszymy między innymi o następujących zagadnieniach:

- Jak jedno twierdzenie lub jedna teoria uogólnia kilka prostszych zjawisk?
- Jaka motywacja lub historia stoi za uogólnieniem danej teorii?
- Jakie problemy pojawiają się przy próbach generalizacji?
- W jaki sposób uogólnienie może być prostsze od przypadku szczególnego? A kiedy staje się znacząco bardziej skomplikowane?

Patronaty:

Rektor Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego w Siedlcach

Politechnika Warszawska

Polskie Towarzystwo Matematyczne

Polska Akademia Nauk

Dyrektor Instytutu Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

65. Szkoła Matematyki Poglądowej

Uogólnienia

26-29 sierpnia 2022, `www.smp.uph.edu.pl`

	piątek, 26 sierpnia prowadzący: Anna Gierzkiewicz-Pieniążek
8:50–9:00	otwarcie Szkoły
9:00–9:45	Jarosław Grytczuk *Wykład Laureata Medalu kAbela 64 SMP: Sprawa Warmusa*
10:00–10:45	Michał Szostakiewicz *Fraktale: od IFSów do Mandelbrota*
10:45–11:15	przerwa
11:15–12:00	Olena Karpel *Entropia w teorii układów dynamicznych*
12:15–13:00	Grzegorz Kosiorowski *Czy uczenie się powoduje chaos komunikacyjny?*
13:00–16:00	przerwa
16:15–17:00	Anna Gierzkiewicz-Pieniążek *Dziury uogólnione*
17:15–18:00	Adam Bobrowski *Oryginałowie i oryginały*
18:00–19:30	przerwa
19:30–20:30	Przemysław Biecek *Matematyka w komiksie*

	sobota, 27 sierpnia prowadzący: Michał Skrzypczak
9:00–9:45	Karol Gryszka *Tetracje*
10:00–10:45	Jakub Banaśkiewicz *Co to jest algebra geometryczna i czego jest uogólnieniem*
10:45–11:15	przerwa
11:15–12:00	Bartłomiej Pawlik *Jak (i po co) stworzyć nowy ciąg?*
12:15–13:00	Marek Kaluba *O dodatniości, sumach kwadratów i tematach pokrewnych*
13:00–16:00	przerwa
16:15–17:00	Filip Mazowiecki *Sieci Petriego – czy to potrzebne?*
17:15–18:00	Michał Skrzypczak *Jaką zwartość ma wartość?*

	niedziela, 28 sierpnia prowadzący: Ryszard Rudnicki
9:30–11:00	Małgorzata Mikolajczyk *Gra terenowa*
11:15–12:00	Ryszard Rudnicki *O naszych wspólnych przodkach i ewolucji DNA*
12:15–13:00	Katarzyna Pichór *Odwieczne prawa dziedziczenia*
13:00–15:45	przerwa
15:45–16:00	Zdzisław Pogoda *„Matematyka z różnych stron widziana”*
16:15–17:00	Andrzej Tomski *Od procesu urodzin i śmierci do dynamiki na gęstościach*
17:15–18:00	Krzysztof Argasiński *Logistyczny model wzrostu populacji, jego wady i wynikające z nich całkowicie błędne wnioski*
18:00–19:30	przerwa
19:30–22:00	*uroczysta kolacja*

	poniedziałek, 29 sierpnia prowadzący: Grzegorz Kosiorowski
9:00–9:45	Adam Gregosiewicz *O ciągach równomiernie rozmieszczonych*
10:00–10:45	Bartłomiej Bzdęga *Zliczanie punktów kratowych*
10:45–11:15	przerwa
11:15–12:00	Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel *Gry, dynamika i tragedia wspólnego zasobu*
12:15–13:00	Łukasz Mioduszewski *To samo w różnej skali*
13:00–13:15	Małgorzata Misztal *Konkurs na Wzorowego Słuchacza*
13:15–13:30	przerwa i głosowanie na laureata Medalu Filca
13:30–14:00	*zakończenie Szkoły*

Sprawa Warmusa

Jarosław Grytczuk

W słynnej książce Hugona Steinhausa pt. „Sto zadań" znajduje się intrygujący problem dotyczący równomiernego rozmieszczenia punktów w odcinku. Wiąże się z nim ciekawa historia, w której występuje kilku sławnych matematyków oraz nieco mniej znana, aczkolwiek kluczowa, postać tytułowego bohatera. Niedawno pojawiły się nowe wątki w tej sprawie, o których również opowiem.

Fraktale: od IFSów do Mandelbrota

Michał Szostakiewicz

W czasie odczytu spróbuję – nieco ahistorycznie – przejść od iterowanych układów funkcyjnych do dynamiki holomorficznej i zbiorów Fatou, Julii i Mandelbrota.

Entropia w teorii układów dynamicznych

Olena Karpel

W czasie wykładu omówimy pojęcie entropii i jego zastosowania w teorii układów dynamicznych, szczególnie w teorii ergodycznej i dynamice topologicznej.

Czy uczenie się powoduje chaos komunikacyjny?

Grzegorz Kosiorowski

W Poglądowie dwie drogi prowadzą z dzielnicy mieszkalnej do centrum. Co rano, setki poglądowian wsiadają do samochodów by dojechać z domów do zakładów pracy. Przed nimi – konieczność wyboru. Może by tak pojechać najprostszą drogą, która jednak jest również kusząca dla pozostałych kierowców, więc zapewne utkwimy w korku? A może pojechać objazdem, próbując uniknąć tłoku? Ale co, jeśli inni pomyślą tak samo jak my i staniemy w korku na dłuższej drodze?

Sytuacje podobne do dylematu poglądowian matematycznie opisują tak zwane gry zagęszczeniowe (ang. congestion games). Nawet w wersji klasycznej posiadają one zaskakujące własności matematyczne (np. występowanie słynnego paradoksu Braessa). Jednak przede wszystkim postaram się na ich przykładzie zaprezentować w jaki sposób (i dlaczego) w teorii gier można modelować proces uczenia się jej uczestników – zarówno w postaci najbardziej naiwnej, jak i bardziej realistycznej (co wymaga pewnych uogólnień). Zobaczymy, że zwłaszcza gdy gracze bardzo szybko dostosowują swoje strategie do nowych informacji, rezultaty gry mogą być bardzo zaskakujące.

Dziury uogólnione

Anna Gierzkiewicz-Pieniążek

Gdy liczymy dziury różnego wymiaru w rozmaitościach, niezawodnie pojawia się teoria (ko)homologii. Wprowadzimy homologie singularne możliwie intuicyjnie, a następnie, przy pewnej dozie zaufania od słuchaczy, zobaczymy dwa ciekawe uogólnienia tej teorii. Jedno wytłumaczy nam, czy funkcje gładkie na rozmaitościach muszą mieć minima pomiędzy maksimami. Drugie zaprowadzi aż do całek, podstawowego twierdzenia analizy, a nawet do twierdzenia Stokesa.

Adam Bobrowski

Oryginałowie i oryginały

Opowiem (krótką) historię twierdzeń o istnieniu oryginałów dla transformat Laplace'a funkcji o wartościach wektorowych, której głównymi bohaterami są twórczy matematyczni oryginałowie. Bo czy można stworzyć twierdzenie wprowadzające nową jakość lub pokazujące nową perspektywę, a nie tylko technikalia, jeśli nie myśli się – nazwijmy to – niestandardowo? Być może przy okazji uda się też podyskutować o tym, które uogólnienia są warte uwagi, a które nie.

Matematyka w komiksie

Przemysław Biecek

Podczas prezentacji przedstawię kilka książek wykorzystujących komiks do mówienia o statystyce i matematyce. W oparciu o ten przegląd przedstawię książko-komiks „Gra w chaos”, który powstaje w ramach programu „Komiksowa matematyka”.

Tetracje

Karol Gryszka

Tetracja to czwarta operacja uogólniająca operacje brania następnika. Sama tetracja może zostać również uogólniona na tak zwane wieże potęgowe. W związku z tym uogólnieniem tworzy się szereg naturalnych pytań i problemów, których odpowiednikiem dla prostszych operacji może być na przykład pytanie: która z liczb jest większa $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 65$ czy $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$? Tetracje ponadto zakładają, że rozważa się skończenie wiele operacji. A co by było, gdybyśmy przeszli do nieskończenie wielu?

Co to jest algebra geometryczna i czego jest uogólnieniem

Jakub Banaśkiewicz

W swoim referacie opowiem o algebrze geometrycznej zwanej inaczej algebrą Clifforda. Zobaczymy jak uogólnia ona liczby zespolone i kwaterniony, oraz pozwala na opisywanie obrotów w przestrzeni w dowolnym wymiarze. Powiem także czemu nie lubię iloczynu wektorowego i jak można go zastąpić przez iloczyn zewnętrzny, przy okazji uogólniając go do dowolnego wymiaru.

Jak (i po co) stworzyć nowy ciąg?

Bartłomiej Pawlik

Jednym z miejsc, w których matematyka rekreacyjna spotyka się z tą bardziej poważną, jest niewątpliwie OEIS. Swoista „wikipedia" poświęcona ciągom liczb całkowitych zrzesza zarówno pasjonatów zabaw matematycznych, jak i poszukiwaczy specjalistycznych wyzwań. Na wykładzie omówimy pewne zagadnienia związane z OEIS, a także spróbujemy odpowiedzieć na kilka pytań. Na przykład: Jak można stworzyć nowy ciąg? No i po co mielibyśmy tworzyć nowe ciągi? A tak w ogóle, to co znaczy „stworzyć nowy ciąg"?

O dodatniości, sumach kwadratów i tematach pokrewnych

Marek Kaluba

Często mówiąc o wielomianach mieszamy definicje – wielomianu jako obiektu algebraicznego i funkcji wielomianowej, która posiada dziedzinę i zbiór wartości. Kiedy mówimy o dodatniości wielomianu intuicja nam podpowiada, że mamy na myśli funkcję. Ale czy słusznie? Czy może istnieje również „dodatniość algebraiczna"? Ta dwoista natura nurtowała Dawida Hilberta, który początkowo przypuszczał że dodatnie wielomiany przyjmują formę „niewątpliwie dodatnią" – są sumami kwadratów. Jednak już w 1888 roku sam roku obalił te przypuszczenia i nie mogąc znaleźć odpowiedniej charakteryzacji wzbogacił listę problemów na XX wiek o dodatkową pozycję. Problem algebraicznego opisu dodatnich wielomianów (znany obecnie jako 17 problem Hilberta) został rozwiązany przez Emila Artina w 1927 za pomocą funkcji wymiernych. Czy to jednak koniec historii?

Na wykładzie prócz przywołania tej fascynującej historii opowiem o reformulacji problemu dodatniości w języku optymalizacji, która pozwala zajmować się przykładami nie mieszczącymi się na kartce papieru. Ten język umożliwia również pytania o dodatniość wyrażeń wielomianowych o zmiennych nieprzemiennych. Dodatniość takich wyrażeń jeszcze szczególnie ważna gdy rozważamy kwantową naturę świata, czy przy opisie struktury symetrii wszystkich symetrii.

Sieci Petriego – czy to potrzebne?

Filip Mazowiecki

Przedstawię jeden z popularniejszych modeli w formalnej weryfikacji: sieci Petriego. Intuicyjnie jest to graf, gdzie w każdym wierzchołku jest pewna liczba żetonów, a zamiast krawędzi mamy tranzycje które mówią jak się zmienia układ żetonów. Na przykład żetony mogą być procesami wykonującymi równolegle jakiś program. Wtedy wierzchołki, w których się znajdują, odpowiadają liniom kodu w programie. Natomiast tranzycje opisują na przykład kiedy procesy mogą przejść do kolejnej linii kodu. Często się mówi, że sieci Petriego są przydatne w praktyce. Na znanych mi przykładach spróbuję się do tego odnieść.

Jaką zwartość ma wartość?

Michał Skrzypczak

Zwartość stanowi jedną z fundamentalnych własności topologicznych. Zwykle myśli się o niej jako o odpowiedniku skończoności czy ograniczoności. Intuicje te są dość czytelne w odniesieniu do prostych przestrzeni, jednak przestają być jasne w bardziej ogólnych przypadkach (vide tw. Banacha-Alaoglu). Sprawa staje się jeszcze ciekawsza, gdy zacznie się uogólniać to pojęcie poza ramy topologiczne. Celem mojego referatu będzie omówienie pojęcia zwartości widzianego z różnych perspektyw – od prostej własności topologicznej, przez czysto kombinatoryczny Lemat Königa, po zwartość w logice.

O naszych wspólnych przodkach i ewolucji DNA

Ryszard Rudnicki

Badanie pokrewieństwa w danej grupie osobników lub gatunków wymaga obserwacji populacji, gdy czas biegnie wstecz. Przedstawimy fragment teorii koalescencja Kingmana, dzięki której można było ustalić kiedy żyła mitochondrialna Ewa – kobieta, od której wywodzą się wszyscy współcześni ludzie. Przedstawimy również metody ustalania pokrewieństwa gatunków w oparcie o badanie różnic w ich DNA.

Odwieczne prawa dziedziczenia

Katarzyna Pichór

Zaczniemy od praw Mendla (1866), a potem je nieco uogólnimy. Opowiemy o rozkładzie genotypów w dużej i małej populacji i o tym, co na ten temat sądzili G. H. Hardy i W. Weinberg (1908) oraz S. G. Wright (1921) i R. A. Fisher (1922). Pokażemy w jaki sposób można wykorzystać podstawy rachunku prawdopodobieństwa i teorię skończonych łańcuchów Markowa do opisu modeli dotyczących dziedziczenia. Na koniec zajmiemy się zjawiskiem losowego dryfu genetycznego.

Od procesu urodzin i śmierci do dynamiki na gęstościach

Andrzej Tomski

Referat będzie obrazował krótką historię uogólnień modeli probabilistycznych w biologii od prostego procesu urodzin i śmierci cząsteczek do badania ich dynamiki na gęstościach. Pokażemy kilka intuicji stojących za asymptotyką tych procesów i jak w badaniu ich dynamiki pomaga komputer.

Logistyczny model wzrostu populacji, jego wady i wynikające z nich całkowicie błędne wnioski

Krzysztof Argasiński

Model logistyczny jest jednym z najstarszych przykładów nieliniowych równań różniczkowych. W referacie zostanie przedstawiona historia debaty na temat jego interpretacji i wyciąganych z niej (błędnych i nie uzasadnionych) wniosków w ekologii i biologii ewolucyjnej. Cześć z tych wniosków, jak na przykład tzw. koncepcja doboru r i K ma w zasadzie magiczny charakter. Przedstawione problemy pokazują że w przypadku zastosowań matematyki do opisu zjawisk przyrodniczych, łatwo utracić kontakt z rzeczywistością i dlatego bardzo ważne jest sensowne osadzenie abstrakcyjnych pojęć matematycznych w realnym świecie.

O ciągach równomiernie rozmieszczonych

Adam Gregosiewicz

Dość łatwo można uzasadnić, że ciąg utworzony z wartości funkcji sinus dla argumentów będących kolejnymi liczbami naturalnymi nie jest zbieżny. Trochę trudniej wykazać, że elementy tego ciągu tworzą zbiór gęsty w przedziale $(-1,1)$. Przydatny w tym kontekście jest następujący, interesujący sam w sobie, wynik: dla dowolnej liczby niewymiernej α zbiór utworzony z części ułamkowych liczb postaci $(n\alpha)$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest gęsty w przedziale $(0,1)$. Okazuje się jednak, że zbiór ten jest nie tylko gęsty, ale również *równomiernie rozmieszczony* – frakcja jego elementów należących do dowolnie ustalonego podprzedziału przedziału $(0,1)$ jest równa długości tego podprzedziału. Opowiem o różnych dowodach tego faktu oraz pokażę jego piękne uogólnienia.

Zliczanie punktów kratowych

Bartłomiej Bzdęga

Wzoru Picka, który pojawiał się wiele razy na Szkołach Matematyki Poglądowej, nijak – niestety – na wielościany uogólnić się nie da. Ściśle rzecz biorąc, nie istnieje stała kombinacja liniowa liczb punktów kratowych w wierzchołkach, na krawędziach, na ścianach i wewnątrz wielościanów o wierzchołkach w punktach kratowych. Można sobie jednak z tym poradzić, używając nieco bardziej subtelnych narzędzi – na przykład... analizy zespolonej.

Gry, dynamika i tragedia wspólnego zasobu

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel

Matematycznie gra jest obiektem służącym do opisu interakcji co najmniej dwóch racjonalnych jednostek (graczy), z których każdy dąży do własnego celu, ale decyzje podjęte przez innych mają wpływ na realizację jego celu. Bardziej formalnie: każdy z graczy wybiera z dostępnego sobie zbioru strategii taką, by zmaksymalizować pewną funkcję (wypłaty), przy czym wypłata każdego z graczy jest funkcją wyborów strategii przez wszystkich graczy. Tak więc teoria gier łączy w sobie teorię optymalizacji z teorią punktu stałego, a przy modelach z continuum graczy także nietrywialne problemy z teorii miary. Gry dynamiczne to natomiast gry toczące się w więcej niż jednej chwili czasu, w których dodatkowo występują zmienne stanu, zmieniające się w sposób opisany równaniem różniczkowym lub różnicowym w odpowiedzi na profil strategii, które w tym ujęciu należą do pewnych przestrzeni funkcyjnych, a optymalizacja każdego z graczy staje się optymalizacją dynamiczną. Jest to więc naturalne narzędzie do modelowania zagadnień typu eksploatacja wspólnych lub współzależnych zasobów odnawialnych, jak np. połowy w Bałtyku.Z racji złożoności gier dynamicznych, ich teoria ciągle jest rozwijana, a klasa problemów, dla których znane są rozwiązania, jest bardzo niewielka. Za najlepiej poznane i zbadane uchodzą gry liniowo-kwadratowe (o liniowej funkcji transformacji zmiennych stanu i co najwyżej kwadratowej funkcji wypłaty) bez ograniczeń. W modelowaniu więc takie gry są często stosowane, nawet jeśli problem jest naturalnie ograniczony (np. nieujemność ilości ryb czy ograniczenie bieżącego połowu przez aktualnie dostępną w łowisku ilość ryb).

Opowiem o trudnościach i niespodziankach, jakie mogą trafić się,kiedy w przypadku dynamicznym przechodzimy od jednego do co najmniej dwóch podejmujących decyzje, czyli kiedy od zagadnienia optymalizacji dynamicznej przechodzimy do analogicznej gry i pokażę przykłady, jak nasze intuicje wywodzące się z optymalizacji dynamicznej przestają działać. Wyjaśnię, co to jest słynne „the tragedy of the commons" (tłumaczenie wprost „tragegia wspólnego pastwiska" ale istota to „tragedia wspólnego zasobu"), jak się komplikuje w ujęciu dynamicznym, w jakich nieoczekiwanych życiowych zagadnieniach występuje oraz jak ją można rozwiązać.

Łukasz Mioduszewski

To samo w różnej skali

Co łączy częstość występowania słów, amplitudy trzęsień ziemi i rozmiar kraterów na księżycu? Rozkłady ich wszystkich opisywane są prawami potęgowymi. Postaramy się zrozumieć skąd te prawa się biorą i dlaczego łączy się to z samopodobieństwem. Zahaczymy także o problem renormalizacji teorii fizycznych.
