Osobliwości algebraiczne

czyli wyjątkowe punkty rozmaitości algebraicznych

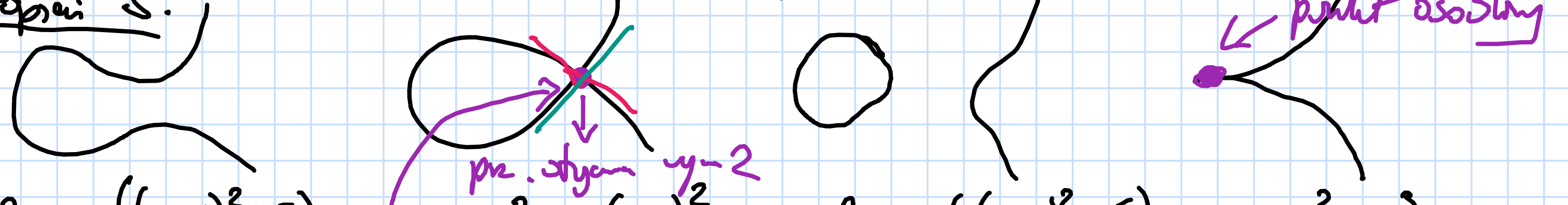
osobliwe = = niegładkie = : tam, gdzie przestrzeń styczna jest za duża (dim pr. stycznej > > dim rozmaitości)

(lokalnie) zbiory zer wielomianów (układy równań wielomianowych skończenie wielu zmiennych)

[możemy sklejać zbiory zer układów równań]

$x^2+y^2=1$ ○ $y=x^2$ $xy=1$ $xy=0$ — punkt osobliwy

stopień 3:



$y^2=x((x-1)^2+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ — gładka

$y^2=x(x-1)^2$ — pr. styczna wym. 2 — punkt osobliwy

$y^2=x((x-1)^2-\varepsilon)$ — gładka

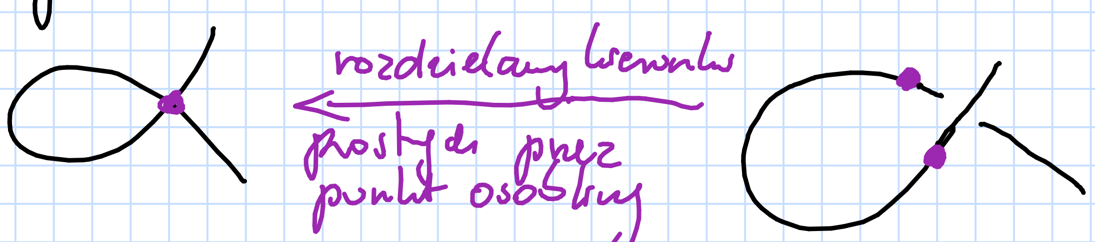
$y^2=x^3$
$y^2-x^3=0$
$(-3x^2 \;\; 2y)$
w $(0,0)$ to jest $(0,0)$
$\Rightarrow$ pr. styczna w „dołości" ma wymiar 2

Dygresja / ogólny kontekst:

- gdzie leżą zbiory algebraiczne?
  - w $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{F}_q^n$ — char $k>0$
  - czasem chcemy myśleć o zbiorach alg. w prz. rzutowej
    np. $x^3-y^2=0 \rightsquigarrow x^3-y^2z=0$ – rów. we wsp. jednorodnych $[x:y:z]$
- co jeśli ciało nie pozwala na obliczenie pr. stycznej „analitycznie"?
  pr. styczną można też zdefiniować algebraicznie
  układ równań $f_1,\dots,f_n$ $\rightsquigarrow I=\langle f_1,\dots,f_n\rangle$
  punkty rozmaitości $\xleftrightarrow{1-1}$ ideały maks. zawierające I
  p, m_p ~ pr. styczna = dualna m_p/m_p^2

Co zrobić, żeby usunąć osobliwości?

Przykład:



rozdzielamy kierunki prostych przez punkt osobliwy

Def. Przekształcenie $\varphi: Y\to X$ rozmaitości algebraicznych jest $\boxed{\text{rozwiązaniem osobliwości}}$ jeśli

1) Y jest gładka
2) spełnia pewne dodatkowe warunki, w szczególności zadaje izomorfizm gładkiej części X i otwartego podzbioru Y (otrzymanego przez usunięcie przeciwobrazu punktów osobliwych)

Pytania: * jak skonstruować rozwiązanie osobliwości?
* czy ono zawsze istnieje?

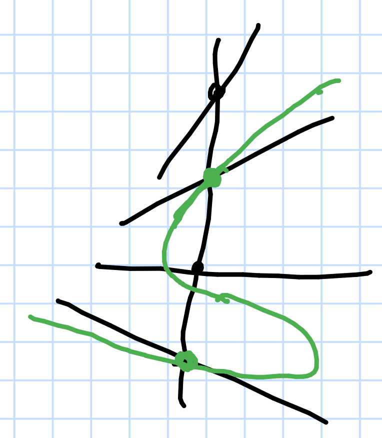
Rozdmuchanie pr. afinicznej w punkcie:

$\underset{x_1\dots x_n}{k^n} \times \underset{[y_1:\dots:y_n]}{\mathbb{P}^{n-1}} \supseteq \{x_i y_j = x_j y_i : i,j=1,\dots,n\} = X$

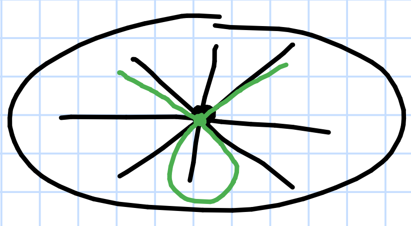
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\psi"'] & k^n\times\mathbb{P}^{n-1} \arrow[d, "\text{rzut}"] \\ & k^n \end{tikzcd}$$

- jeśli któreś x_i jest $\neq 0$, to wszystkie $y_1,\dots,y_n$ są wyzn. jednoznacznie
- jeśli $x_1=\dots=x_n=0$, to $y_1,\dots,y_n$ – dowolne
  $\Rightarrow$ włókno ψ nad $(0,\dots,0)$ to $\mathbb{P}^{n-1}$

$\Rightarrow$ zamieniamy $(0,\dots,0)$ w k^n wklejając $\mathbb{P}^{n-1}$ rozdzielając kierunki



$\psi\downarrow$

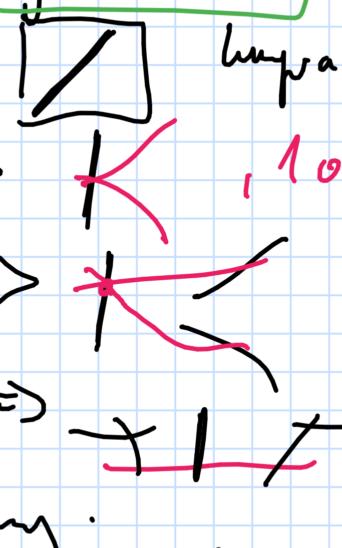


Tw (Hironaka 1964)
Rozwiązanie osobliwości alg. istnieje dla char $k=0$.

char $k>0$ – dla wym ≥ 4 aktywny temat badań

Przykład: $\boxed{x^4+y^3+z^2=0}$

1. rozdmuchanie $\Rightarrow$ krzywa w $\mathbb{P}^2$, 1 osobliwość
2. rozdmuchanie $\Rightarrow$, 1 osobliwość
3. rozdmuchanie $\Rightarrow$, 1 osobliwość
4. rozdmuchanie $\Rightarrow$



graf dualny:

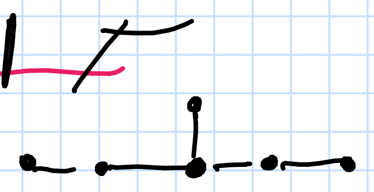
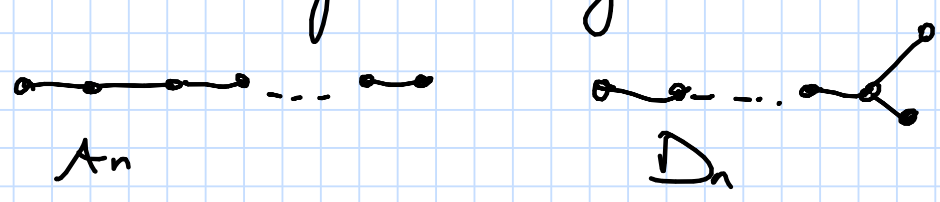


diagram Dynkina E_6

Ta rozmaitość to tzw. rozmaitość ilorazowa:

$\mathbb{C}^2/G$ G – skończona gr. macierzy

G – skończona podgrupa $SL(2,\mathbb{C})$
$\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}^2/G$ – osobliwe, rozwiązania (minimalne) będą miały graf dualny będący diagramem Dynkina



A_n D_n E_6, E_7, E_8

Tw. (McKay 1980)
składowe zbioru wyjątkowego rozw. minimalnego $\mathbb{C}^2/G$, $G\leq SL(2,\mathbb{C})$ są w jednoznacznej odpowiedniości z klasami sprzężoności elementów w G.
↑ wybranymi