Grafy powszechne są wyjątkowe

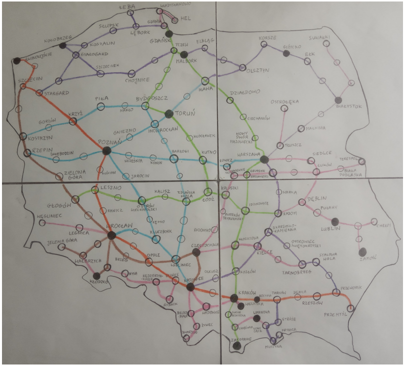
Andrzej Grzesik

Szkoła Matematyki Poglądowej 61 $+ \varepsilon$

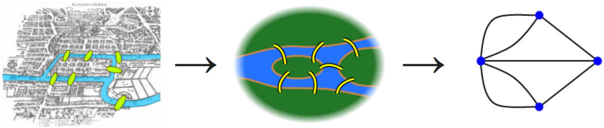
Internet, 19 lutego 2021

Co to te grafy?

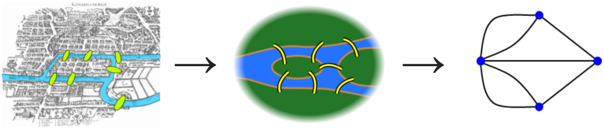
Graf to zbiór wierzchołków, z których pewne są połączone krawędziami.

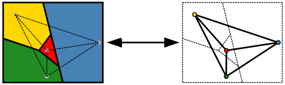


Po co te grafy?

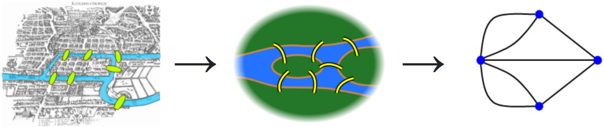


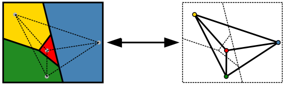
Po co te grafy?

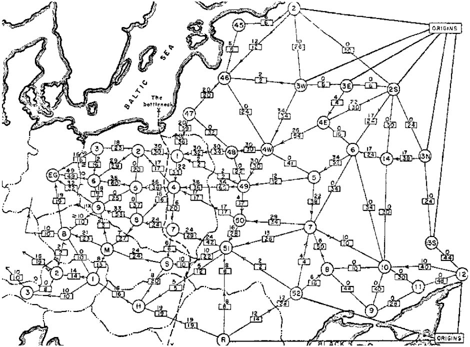




Po co te grafy?







Po co te grafy?

Po co te grafy?

Twierdzenie Ramseya

"Complete disorder is impossible"
Motzkin

W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

Twierdzenie Ramseya

"Complete disorder is impossible"
Motzkin

W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

W każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na co najmniej 6 wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Twierdzenie Ramseya

"Complete disorder is impossible"
Motzkin

W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

W każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na co najmniej 6 wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich r i b istnieje taka liczba całkowita $R(r, b)$, że każde czerwono-niebieskie kolorowanie krawędzi grafu pełnego na co najmniej $R(r, b)$ wierzchołkach zawiera czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

Twierdzenie Ramseya

"Complete disorder is impossible"
Motzkin

W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

W każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na co najmniej 6 wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich r i b istnieje taka liczba całkowita $R(r, b)$, że każde czerwono-niebieskie kolorowanie krawędzi grafu pełnego na co najmniej $R(r, b)$ wierzchołkach zawiera czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$R(2, n) =$

Twierdzenie Ramseya

"Complete disorder is impossible"
Motzkin

W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

W każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na co najmniej 6 wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich r i b istnieje taka liczba całkowita $R(r, b)$, że każde czerwono-niebieskie kolorowanie krawędzi grafu pełnego na co najmniej $R(r, b)$ wierzchołkach zawiera czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$R(2, n) = n$.

Twierdzenie Ramseya

“Complete disorder is impossible”
Motzkin

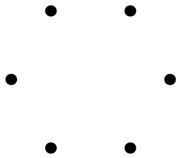
W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

W każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na co najmniej 6 wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich r i b istnieje taka liczba całkowita $R(r, b)$, że każde czerwono-niebieskie kolorowanie krawędzi grafu pełnego na co najmniej $R(r, b)$ wierzchołkach zawiera czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$R(2, n) = n$.

$R(3, 3) \leq 6$.



Twierdzenie Ramseya

"Complete disorder is impossible"
Motzkin

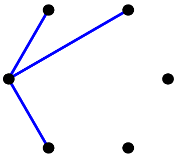
W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

W każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na co najmniej 6 wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich r i b istnieje taka liczba całkowita $R(r, b)$, że każde czerwono-niebieskie kolorowanie krawędzi grafu pełnego na co najmniej $R(r, b)$ wierzchołkach zawiera czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$R(2, n) = n$.

$R(3, 3) \leq 6$.



Twierdzenie Ramseya

"Complete disorder is impossible"
Motzkin

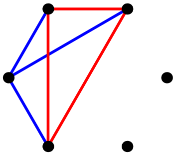
W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

W każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na co najmniej 6 wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich r i b istnieje taka liczba całkowita $R(r, b)$, że każde czerwono-niebieskie kolorowanie krawędzi grafu pełnego na co najmniej $R(r, b)$ wierzchołkach zawiera czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$R(2, n) = n$.

$R(3, 3) \leq 6$.



Twierdzenie Ramseya

"Complete disorder is impossible"
Motzkin

W dowolnej grupie co najmniej 6 osób istnieją 3, które się znają lub 3, które się nie znają.

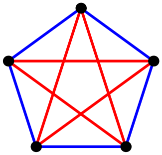
W każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na co najmniej 6 wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich r i b istnieje taka liczba całkowita $R(r, b)$, że każde czerwono-niebieskie kolorowanie krawędzi grafu pełnego na co najmniej $R(r, b)$ wierzchołkach zawiera czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$R(2, n) = n$.

$R(3, 3) \leq 6$.

$R(3, 3) \geq 6$.



Liczby Ramseya

Jeśli z dowolnego wierzchołka wychodzi co najmniej $R(r-1, b)$ czerwonych krawędzi lub $R(r, b-1)$ niebieskich krawędzi, to znajdziemy czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

Liczby Ramseya

Jeśli z dowolnego wierzchołka wychodzi co najmniej $R(r-1, b)$ czerwonych krawędzi lub $R(r, b-1)$ niebieskich krawędzi, to znajdziemy czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$$R(r, b) \leq R(r-1, b) + R(r, b-1)$$

Liczby Ramseya

Jeśli z dowolnego wierzchołka wychodzi co najmniej $R(r-1, b)$ czerwonych krawędzi lub $R(r, b-1)$ niebieskich krawędzi, to znajdziemy czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$$R(r, b) \leq R(r-1, b) + R(r, b-1)$$

$$R(r, b) \leq \binom{r+b-2}{r-1}$$

Liczby Ramseya

Jeśli z dowolnego wierzchołka wychodzi co najmniej $R(r-1,b)$ czerwonych krawędzi lub $R(r,b-1)$ niebieskich krawędzi, to znajdziemy czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$$R(r,b) \leq R(r-1,b) + R(r,b-1)$$

$$R(r,b) \leq \binom{r+b-2}{r-1}$$

Jak pokolorować graf, żeby kolorowanie było wszędzie jak najbardziej równomiernie rozłożone?

Liczby Ramseya

Jeśli z dowolnego wierzchołka wychodzi co najmniej $R(r-1, b)$ czerwonych krawędzi lub $R(r, b-1)$ niebieskich krawędzi, to znajdziemy czerwony graf pełny na r wierzchołkach lub niebieski graf pełny na b wierzchołkach.

$$R(r, b) \leq R(r-1, b) + R(r, b-1)$$

$$R(r, b) \leq \binom{r+b-2}{r-1}$$

Jak pokolorować graf, żeby kolorowanie było wszędzie jak najbardziej równomiernie rozłożone?

Losowo!

Liczby Ramseya

$$\frac{s}{\sqrt{2}e} \cdot \sqrt{2}^s \lesssim R(s,s) \lesssim \frac{4}{\sqrt{\pi} s} \cdot 4^s$$

Liczby Ramseya

$$\frac{s}{\sqrt{2}e} \cdot \sqrt{2}^s \lesssim R(s,s) \lesssim \frac{4}{\sqrt{\pi}s} \cdot 4^s$$

Przykładowo dla $s = 10$ łatwe ograniczenie daje tylko $101 \leq R(10,10) \leq 48620$.

Liczby Ramseya

$$\frac{s}{\sqrt{2}e} \cdot \sqrt{2}^s \lesssim R(s,s) \lesssim \frac{4}{\sqrt{\pi s}} \cdot 4^s$$

Przykładowo dla $s = 10$ łatwe ograniczenie daje tylko $101 \leq R(10,10) \leq 48620$.

Po wielu latach badań mamy

$$\frac{\sqrt{2}s}{e} \cdot \sqrt{2}^s \lesssim R(s,s) \lesssim s^{-(c\log s)/(\log\log s)} \cdot 4^s$$

Liczby Ramseya

$$\frac{s}{\sqrt{2}e} \cdot \sqrt{2}^s \lesssim R(s,s) \lesssim \frac{4}{\sqrt{\pi s}} \cdot 4^s$$

Przykładowo dla $s = 10$ łatwe ograniczenie daje tylko $101 \leq R(10,10) \leq 48620$.

Po wielu latach badań mamy

$$\frac{\sqrt{2}s}{e} \cdot \sqrt{2}^s \lesssim R(s,s) \lesssim s^{-(c \log s)/(\log\log s)} \cdot 4^s$$

Teraz wiemy, że $798 \leq R(10,10) \leq 23556$.

Liczby Ramseya

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3		6	9	14	18	23	28	36	40–42
4			18	25	36–41	49–61	59–84	73–115	92–149
5				43–48	58–87	80–143	101–216	133–316	149–442
6					102–165	115–298	134–495	183–780	204–1171
7						205–540	217–1031	252–1713	292–2826
8							282–1870	329–3583	343–6090
9								565–6588	581–12677
10									798–23556

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Liczby Ramseya można analogicznie zdefiniować dla większej liczby kolorów.

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Liczby Ramseya można analogicznie zdefiniować dla większej liczby kolorów.

$R(3,3,3) = 17$.

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Liczby Ramseya można analogicznie zdefiniować dla większej liczby kolorów.

$R(3, 3, 3) = 17$.

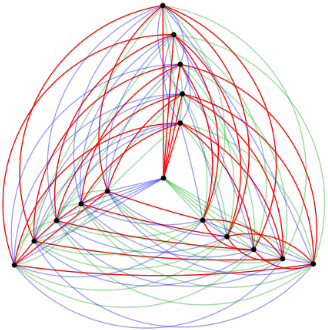
$R(3, 3, 3) \leq 17$, bo z dowolnego wierzchołka wychodzi co najmniej 6 krawędzi w jednym z kolorów. Pomiędzy ich końcami nie może występować już ten kolor, a w jednym z pozostałych dwóch kolorów będzie trójkąt, bo $R(3, 3) = 6$.

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Liczby Ramseya można analogicznie zdefiniować dla większej liczby kolorów.

$R(3,3,3) = 17$.

$R(3,3,3) \leq 17$, bo z dowolnego wierzchołka wychodzi co najmniej 6 krawędzi w jednym z kolorów. Pomiędzy ich końcami nie może występować już ten kolor, a w jednym z pozostałych dwóch kolorów będzie trójkąt, bo $R(3,3) = 6$.



Liczby Ramseya – więcej kolorów

Podobnie jak dla dwóch kolorów można uzyskać oszacowania górne rekurencyjnie oraz dolne metodą probabilistyczną.

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Podobnie jak dla dwóch kolorów można uzyskać oszacowania górne rekurencyjnie oraz dolne metodą probabilistyczną.

Przykładowo

$$\sqrt{3}^s \lesssim R(s, s, s) \lesssim 9^s$$

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Podobnie jak dla dwóch kolorów można uzyskać oszacowania górne rekurencyjnie oraz dolne metodą probabilistyczną.

Przykładowo

$$\sqrt{3}^s \lesssim R(s,s,s) \lesssim 9^s$$

We wrześniu 2020 Conlon i Fox poprawili wykładniczo (!) oszacowania dolne dla wszystkich liczb Ramseya z co najmniej trzema kolorami.

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Podobnie jak dla dwóch kolorów można uzyskać oszacowania górne rekurencyjnie oraz dolne metodą probabilistyczną.

Przykładowo
$$\sqrt{3}^s \lesssim R(s,s,s) \lesssim 9^s$$

We wrześniu 2020 Conlon i Fox poprawili wykładniczo (!) oszacowania dolne dla wszystkich liczb Ramseya z co najmniej trzema kolorami.

W szczególności pokazali, że

$$2^{7s/8} \lesssim R(s,s,s)$$

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Podobnie jak dla dwóch kolorów można uzyskać oszacowania górne rekurencyjnie oraz dolne metodą probabilistyczną.

Przykładowo

$$\sqrt{3}^s \lesssim R(s,s,s) \lesssim 9^s$$

We wrześniu 2020 Conlon i Fox poprawili wykładniczo (!) oszacowania dolne dla wszystkich liczb Ramseya z co najmniej trzema kolorami.

W szczególności pokazali, że

$$2^{7s/8} \lesssim R(s,s,s)$$

To jest poprawa z 1.732^s na 1.834^s.

Liczby Ramseya – więcej kolorów

Podobnie jak dla dwóch kolorów można uzyskać oszacowania górne rekurencyjnie oraz dolne metodą probabilistyczną.

Przykładowo

$$\sqrt{3}^s \lesssim R(s,s,s) \lesssim 9^s$$

We wrześniu 2020 Conlon i Fox poprawili wykładniczo (!) oszacowania dolne dla wszystkich liczb Ramseya z co najmniej trzema kolorami.

W szczególności pokazali, że

$$2^{7s/8} \lesssim R(s,s,s)$$

To jest poprawa z 1.732^s na 1.834^s.

Idea: weźmy algebraicznie zdefiniowany graf w jednym kolorze, a pozostałe kolory wybierzmy losowo.

Powszechność grafu

Twierdzenie Ramseya daje nam, że w każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na $n \geq 6$ wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Powszechność grafu

Twierdzenie Ramseya daje nam, że w każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na $n \geq 6$ wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Ile jest takich trójkątów monochromatycznych?

Powszechność grafu

Twierdzenie Ramseya daje nam, że w każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na $n \geq 6$ wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Ile jest takich trójkątów monochromatycznych?

Czy w losowym kolorowaniu jest ich najmniej?

Powszechność grafu

Twierdzenie Ramseya daje nam, że w każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na $n \geq 6$ wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Ile jest takich trójkątów monochromatycznych?

Czy w losowym kolorowaniu jest ich najmniej?

Graf jest *powszechny* jeśli liczba jego monochromatycznych kopii jest asymptotycznie zminimalizowana w losowym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego.

Powszechność grafu

Twierdzenie Ramseya daje nam, że w każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na $n \geq 6$ wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Ile jest takich trójkątów monochromatycznych?

Czy w losowym kolorowaniu jest ich najmniej?

Graf jest *powszechny* jeśli liczba jego monochromatycznych kopii jest asymptotycznie zminimalizowana w losowym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego.

Wartość oczekiwana liczby monochromatycznych kopii grafu H w losowym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na n wierzchołkach wynosi $\frac{2}{2^{e(H)}}\binom{n}{v(H)} = 2^{1-e(H)}\binom{n}{v(H)}$.

Powszechność grafu

Twierdzenie Ramseya daje nam, że w każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na $n \geq 6$ wierzchołkach istnieje monochromatyczny trójkąt.

Ile jest takich trójkątów monochromatycznych?

Czy w losowym kolorowaniu jest ich najmniej?

Graf jest *powszechny* jeśli liczba jego monochromatycznych kopii jest asymptotycznie zminimalizowana w losowym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego.

Wartość oczekiwana liczby monochromatycznych kopii grafu H w losowym dwukolorowaniu krawędzi grafu pełnego na n wierzchołkach wynosi $\frac{2}{2^{e(H)}}\binom{n}{v(H)} = 2^{1-e(H)}\binom{n}{v(H)}$.

Graf H jest powszechny jeśli minimalna liczba monochromatycznych kopii podzielona przez $\binom{n}{v(H)}$ zmierza do $2^{1-e(H)}$.

Trójkąt jest powszechny

“Every triangle is a love triangle
if you love triangles”
Acaster

Trójkąt jest powszechny

"Every triangle is a love triangle
if you love triangles"
Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Trójkąt jest powszechny

"Every triangle is a love triangle
if you love triangles"
Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Niech $d_R(v)$ i $d_B(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę czerwonych i niebieskich krawędzi wychodzących z wierzchołka v.

Trójkąt jest powszechny

"Every triangle is a love triangle
if you love triangles"
Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Niech $d_R(v)$ i $d_B(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę czerwonych i niebieskich krawędzi wychodzących z wierzchołka v.

$$\sum_v \frac{{d_R}^2(v) + {d_B}^2(v)}{2}$$

Trójkąt jest powszechny

"Every triangle is a love triangle
if you love triangles"
Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Niech $d_R(v)$ i $d_B(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę czerwonych i niebieskich krawędzi wychodzących z wierzchołka v.

$\sum_v \frac{{d_R}^2(v) + {d_B}^2(v)}{2} \approx 3$  $+$  $+$  $+3$ 

Trójkąt jest powszechny

"Every triangle is a love triangle
if you love triangles"
Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Niech $d_R(v)$ i $d_B(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę czerwonych i niebieskich krawędzi wychodzących z wierzchołka v.

$\sum_v \frac{{d_R}^2(v) + {d_B}^2(v)}{2} \approx 3$  $+$  $+$  $+ 3$  $= 2\Big($  $+$  $\Big) + \binom{n}{3}$

Trójkąt jest powszechny

“Every triangle is a love triangle
if you love triangles”
Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Niech $d_R(v)$ i $d_B(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę czerwonych i niebieskich krawędzi wychodzących z wierzchołka v.

$\sum_v \frac{d_R{}^2(v) + d_B{}^2(v)}{2} \approx 3$  $+$  $+$  $+3$  $= 2\Big($  $+$  $\Big) + \binom{n}{3}$

$$\sum_v \frac{d_R{}^2(v) + d_B{}^2(v)}{2}$$

Trójkąt jest powszechny

“Every triangle is a love triangle
if you love triangles”
Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Niech $d_R(v)$ i $d_B(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę czerwonych i niebieskich krawędzi wychodzących z wierzchołka v.

$\sum_v \frac{d_R{}^2(v) + d_B{}^2(v)}{2} \approx 3$  $+$  $+$  $+3$  $= 2\Big($  $+$  $\Big) + \binom{n}{3}$

$$\sum_v \frac{d_R{}^2(v) + d_B{}^2(v)}{2} \geq \sum_v \left(\frac{d_R(v) + d_B(v)}{2}\right)^2$$

Trójkąt jest powszechny

> “Every triangle is a love triangle
> if you love triangles”
> Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Niech $d_R(v)$ i $d_B(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę czerwonych i niebieskich krawędzi wychodzących z wierzchołka v.

$\sum_v \frac{{d_R}^2(v) + {d_B}^2(v)}{2} \approx 3$  $+$  $+$  $+3$  $= 2\Big($  $+$  $\Big) + \binom{n}{3}$

$$\sum_v \frac{{d_R}^2(v) + {d_B}^2(v)}{2} \geq \sum_v \left(\frac{d_R(v) + d_B(v)}{2}\right)^2 = \frac{n(n-1)^2}{4}$$

Trójkąt jest powszechny

> “Every triangle is a love triangle
> if you love triangles”
> Acaster

Musimy pokazać, że w każdym dwukolorowaniu grafu pełnego na n wierzchołkach jest $\gtrsim \frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monochromatycznych trójkątów.

Niech $d_R(v)$ i $d_B(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę czerwonych i niebieskich krawędzi wychodzących z wierzchołka v.

$\sum_v \frac{d_R{}^2(v) + d_B{}^2(v)}{2} \approx 3$  $+$  $+$  $+3$  $= 2\Big($  $+$  $\Big) + \binom{n}{3}$

$$\sum_v \frac{d_R{}^2(v) + d_B{}^2(v)}{2} \geq \sum_v \left(\frac{d_R(v) + d_B(v)}{2}\right)^2 = \frac{n(n-1)^2}{4}$$

 $+$  $\gtrsim \frac{n(n-1)(n+1)}{24} \approx \frac{1}{4}\binom{n}{3}$

Czy większe kliki są powszechne?

Erdős (1962): Każdy graf pełny jest powszechny?

Czy większe kliki są powszechne?

Erdős (1962): Każdy graf pełny jest powszechny?

Burr i Rosta (1980): Każdy graf jest powszechny?

Czy większe kliki są powszechne?

Erdős (1962): Każdy graf pełny jest powszechny?

Burr i Rosta (1980): Każdy graf jest powszechny?

Hipotezę potwierdzono dla drzew, cykli, kół o parzystej liczbie szprych.

Czy większe kliki są powszechne?

Erdős (1962): Każdy graf pełny jest powszechny?

Burr i Rosta (1980): Każdy graf jest powszechny?

Hipotezę potwierdzono dla drzew, cykli, kół o parzystej liczbie szprych.

Sidorenko (1989): Graf  nie jest powszechny.

Czy większe kliki są powszechne?

Erdős (1962): Każdy graf pełny jest powszechny?

Burr i Rosta (1980): Każdy graf jest powszechny?

Hipotezę potwierdzono dla drzew, cykli, kół o parzystej liczbie szprych.

Sidorenko (1989): Graf  nie jest powszechny.

Thomason (1989): Grafy pełne na co najmniej 4 wierzchołkach nie są powszechne.

Czy większe kliki są powszechne?

Erdős (1962): Każdy graf pełny jest powszechny?

Burr i Rosta (1980): Każdy graf jest powszechny?

Hipotezę potwierdzono dla drzew, cykli, kół o parzystej liczbie szprych.

Sidorenko (1989): Graf  nie jest powszechny.

Thomason (1989): Grafy pełne na co najmniej 4 wierzchołkach nie są powszechne. Tylko trójkąt jest wyjątkowy!

Czy większe kliki są powszechne?

Erdős (1962): Każdy graf pełny jest powszechny?

Burr i Rosta (1980): Każdy graf jest powszechny?

Hipotezę potwierdzono dla drzew, cykli, kół o parzystej liczbie szprych.

Sidorenko (1989): Graf  nie jest powszechny.

Thomason (1989): Grafy pełne na co najmniej 4 wierzchołkach nie są powszechne. Tylko trójkąt jest wyjątkowy!

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): Każdy graf, który zawiera  nie jest powszechny.

Jakie grafy są powszechne?

Sidorenko (1993): Wszystkie grafy dwudzielne są powszechne?

Jakie grafy są powszechne?

Sidorenko (1993): Wszystkie grafy dwudzielne są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): „Drzewa trójkątów” są powszechne?

Jakie grafy są powszechne?

Sidorenko (1993): Wszystkie grafy dwudzielne są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): „Drzewa trójkątów” są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): Czy są jakieś grafy powszechne, które nie są trójdzielne?

Jakie grafy są powszechne?

Sidorenko (1993): Wszystkie grafy dwudzielne są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): „Drzewa trójkątów” są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): Czy są jakieś grafy powszechne, które nie są trójdzielne?

Hatami, Hladký, Král’, Norine i Razborov (2012): Koło z pięcioma szprychami jest powszechne.

Jakie grafy są powszechne?

Sidorenko (1993): Wszystkie grafy dwudzielne są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): „Drzewa trójkątów” są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): Czy są jakieś grafy powszechne, które nie są trójdzielne?

Hatami, Hladký, Kráľ, Norine i Razborov (2012): Koło z pięcioma szprychami jest powszechne.

Grzesik, Lee, Lidický, Volec (2020): „Drzewa trójkątów” są powszechne.

Jakie grafy są powszechne?

Sidorenko (1993): Wszystkie grafy dwudzielne są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): „Drzewa trójkątów” są powszechne?

Jagger, Šťovíček i Thomason (1996): Czy są jakieś grafy powszechne, które nie są trójdzielne?

Hatami, Hladký, Kráľ, Norine i Razborov (2012): Koło z pięcioma szprychami jest powszechne.

Grzesik, Lee, Lidický, Volec (2020): „Drzewa trójkątów” są powszechne.

Co decyduje o tym, że graf jest powszechny?

Wyjątkowej Szkoły

Dziękuję za uwagę!

Życzę wyjątkowej zabawy na tej szczególnej Szkole

Wyjątkowej Szkoły

Dziękuję za uwagę!

Życzę wyjątkowej zabawy na tej szczególnej Szkole
i niech ta wyjątkowa Szkoła nie będzie powszechna.