Jeden, by wszystkimi rządzić

Adam Gregosiewicz

Szkoła Matematyki Poglądowej $61 + \varepsilon$

20 lutego 2021 r.

$$\bigwedge_x \phi(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigvee_x \phi(x)$$

$$\bigwedge_x \phi(x) \qquad \not\Leftarrow \qquad \bigvee_x \phi(x)$$

Czy funkcja $x \mapsto x^3$ jest rosnąca?

Czy funkcja $x \mapsto x^3$ jest rosnąca?

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}} x < y \quad \Rightarrow \quad x^3 < y^3$$

Czy funkcja $x \mapsto x^3$ jest rosnąca?

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}} x < y \quad \Rightarrow \quad x^3 < y^3$$

Tak!

Czy funkcja $x \mapsto x^3$ jest rosnąca?

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}} x < y \quad \Rightarrow \quad x^3 < y^3$$

Tak! Biorę dowolne x i y,

Czy funkcja $x \mapsto x^3$ jest rosnąca?

$$\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}} x < y \quad \Rightarrow \quad x^3 < y^3$$

Tak! Biorę dowolne x i y, na przykład $x = 0$, $y = 1$ i ...

Czy funkcja $x \mapsto x^3$ jest rosnąca?

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbb{R}} x < y \quad \Rightarrow \quad x^3 < y^3$$

Tak! Biorę dowolne x i y, na przykład $x = 0$, $y = 1$ i ...


12
TVP 2

A może student ma rację?

$$\bigvee_{x,y\in\mathbb{R}} x < y \Rightarrow x^3 < y^3$$

A może student ma rację?

$$\bigvee_{x,y\in\mathbb{R}} x < y \Rightarrow x^3 < y^3$$

To nie wystarczy, ale...

A może student ma rację?

$$\bigvee_{x,y\in\mathbb{R}} x < y \Rightarrow x^3 < y^3$$

To nie wystarczy, ale. . .

$$\bigvee_{x,y\in\mathbb{R}} \left[(x < y \Rightarrow x^3 < y^3) \Rightarrow \left(\bigwedge_{s,t\in\mathbb{R}} s < t \Rightarrow s^3 < t^3 \right) \right]$$

Skąd to się wzięło?

$$\left[\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \Rightarrow \psi\right]$$

Skąd to się wzięło?

$$\left[\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \Rightarrow \psi\right] \Leftrightarrow \left[\sim\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \vee \psi\right]$$

Skąd to się wzięło?

$$\left[\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \Rightarrow \psi\right] \Leftrightarrow \left[\sim\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \vee \psi\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\left(\bigvee_x \sim \phi(x)\right) \vee \psi\right]$$

Skąd to się wzięło?

$$
\begin{aligned}
\left[\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \Rightarrow \psi\right] &\Leftrightarrow \left[\sim\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \vee \psi\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[\left(\bigvee_x \sim \phi(x)\right) \vee \psi\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[\bigvee_x (\sim \phi(x) \vee \psi)\right]
\end{aligned}
$$

Skąd to się wzięło?

$$\begin{aligned}\left[\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \Rightarrow \psi\right] &\Leftrightarrow \left[\sim\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \vee \psi\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\left(\bigvee_x \sim \phi(x)\right) \vee \psi\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\bigvee_x (\sim \phi(x) \vee \psi)\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\bigvee_x (\phi(x) \Rightarrow \psi)\right]\end{aligned}$$

Skąd to się wzięło?

$$\left[\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \Rightarrow \psi\right] \Leftrightarrow \left[\bigvee_x (\phi(x) \Rightarrow \psi)\right]$$

Hipotezy...

$$\bigvee_{n \text{ parzyste}} \Big(n \text{ jest sumą dwóch liczb pierwszych} \\ \Rightarrow \text{hipoteza Goldbacha jest prawdziwa}\Big)$$

Hipotezy...

$$\bigvee_{n \text{ parzyste}} \Big(n \text{ jest sumą dwóch liczb pierwszych}$$

$$\Rightarrow \text{hipoteza Goldbacha jest prawdziwa} \Big)$$

$$\bigvee_{0<\operatorname{Re} z<1} \Big(\zeta(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z = 1/2$$

$$\Rightarrow \text{hipoteza Riemanna jest prawdziwa} \Big)$$

Formy kwadratowe

Przez **formę kwadratową** będziemy rozumieć jednorodny wielomian stopnia 2 o współczynnikach całkowitych.

Formy kwadratowe

Przez **formę kwadratową** będziemy rozumieć jednorodny wielomian stopnia 2 o współczynnikach całkowitych.

$$Q(a,b) = a^2 - 3ab + b^2$$

jest formą kwadratową dwóch zmiennych.

Formy kwadratowe

Przez **formę kwadratową** będziemy rozumieć jednorodny wielomian stopnia 2 o współczynnikach całkowitych.

$$Q(a,b) = a^2 - 3ab + b^2$$

jest formą kwadratową dwóch zmiennych.

Forma kwadratowa jest **dodatnio określona**, jeżeli jej wartości są dodatnie dla niezerowych argumentów.

Formy kwadratowe

Przez **formę kwadratową** będziemy rozumieć jednorodny wielomian stopnia 2 o współczynnikach całkowitych.

$$Q(a, b) = a^2 - 3ab + b^2$$

jest formą kwadratową dwóch zmiennych.

Forma kwadratowa jest **dodatnio określona**, jeżeli jej wartości są dodatnie dla niezerowych argumentów.

Q nie jest dodatnio określona, gdyż $Q(1, 1) < 0$.

Formy kwadratowe

„forma kwadratowa" = „dodatnio określona forma kwadratowa"

Formy uniwersalne

Forma kwadratowa Q **reprezentuje** liczbę naturalną n, jeżeli n jest wartością Q dla pewnych argumentów całkowitych.

Formy uniwersalne

Forma kwadratowa Q **reprezentuje** liczbę naturalną n, jeżeli n jest wartością Q dla pewnych argumentów całkowitych.

Forma

$$a^2 + b^2$$

reprezentuje 10, ale nie reprezentuje 3.

Formy uniwersalne

Forma kwadratowa jest **uniwersalna**, jeżeli reprezentuje każdą liczbę naturalną.

Formy uniwersalne

Forma kwadratowa jest **uniwersalna**, jeżeli reprezentuje każdą liczbę naturalną.

Pytanie. Czy istnieją uniwersalne formy kwadratowe?

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Tożsamość Eulera

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Tożsamość Eulera

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

- Wystarczy sprawdzić, że forma ta reprezentuje dowolną nieparzystą liczbę pierwszą p.

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Tożsamość Eulera

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

- Wystarczy sprawdzić, że forma ta reprezentuje dowolną nieparzystą liczbę pierwszą p.
- Pokazać, że np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Tożsamość Eulera

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

- Wystarczy sprawdzić, że forma ta reprezentuje dowolną nieparzystą liczbę pierwszą p.
- Pokazać, że np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
- Zminimalizować n.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p\colon a \in A\} = \#A$

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.
   - $\#\{-b^2 - 1 \bmod p \colon b \in A\} = \#A$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.
   - $\#\{-b^2 - 1 \bmod p \colon b \in A\} = \#A$.
   - $a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod p$ dla pewnych $a, b \in A$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.
   - $\#\{-b^2 - 1 \bmod p \colon b \in A\} = \#A$.
   - $a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod{p}$ dla pewnych $a, b \in A$.
2. Załóżmy, że minimalne n o tej własności jest większe od 1.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.
   - $\#\{-b^2 - 1 \bmod p \colon b \in A\} = \#A$.
   - $a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod p$ dla pewnych $a, b \in A$.
2. Załóżmy, że minimalne n o tej własności jest większe od 1.
   - $np = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.
   - $\#\{-b^2 - 1 \bmod p \colon b \in A\} = \#A$.
   - $a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod p$ dla pewnych $a, b \in A$.
2. Załóżmy, że minimalne n o tej własności jest większe od 1.
   - $np = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
   - $y_i \equiv x_i \pmod n$, $(-n+1)/2 \leq y_i \leq n/2$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.
   - $\#\{-b^2 - 1 \bmod p \colon b \in A\} = \#A$.
   - $a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod{p}$ dla pewnych $a, b \in A$.
2. Załóżmy, że minimalne n o tej własności jest większe od 1.
   - $np = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
   - $y_i \equiv x_i \pmod{n}$, $(-n+1)/2 \leq y_i \leq n/2$.
   - $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = nr$ dla $1 \leq r < n$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A \coloneqq \{0, 1, \dots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.
   - $\#\{-b^2 - 1 \bmod p \colon b \in A\} = \#A$.
   - $a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod p$ dla pewnych $a, b \in A$.
2. Załóżmy, że minimalne n o tej własności jest większe od 1.
   - $np = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
   - $y_i \equiv x_i \pmod n$, $(-n+1)/2 \leq y_i \leq n/2$.
   - $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = nr$ dla $1 \leq r < n$.
   - $(np) \cdot (nr)$ jest postaci $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$ oraz $n | z_i$.

Dowód twierdzenia Lagrange'a

1. np jest reprezentowalna dla pewnego $n \geq 1$.
   - $A := \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$, $\#A = (p+1)/2$.
   - $\#\{a^2 \bmod p \colon a \in A\} = \#A$, gdyż $a \in A$ i $p - a \notin A$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - (a^2 \bmod p)$ w $\mathbb{Z}_p$.
   - $\#\{-b^2 - 1 \bmod p \colon b \in A\} = \#A$.
   - $a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod{p}$ dla pewnych $a, b \in A$.
2. Załóżmy, że minimalne n o tej własności jest większe od 1.
   - $np = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
   - $y_i \equiv x_i \pmod{n}$, $(-n+1)/2 \leq y_i \leq n/2$.
   - $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = nr$ dla $1 \leq r < n$.
   - $(np) \cdot (nr)$ jest postaci $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$ oraz $n | z_i$.
   - $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = rp$ dla $w_i = z_i/n$.

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Pytanie. Czy istnieją inne?

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Pytanie. Czy istnieją inne?

Tak! Ramanujan znalazł 54 przykłady takich form.

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2$$
$$\vdots$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 7d^2$$

Formy uniwersalne

Twierdzenie Lagrange'a o czterech kwadratach (1770)

Forma kwadratowa

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Pytanie. Czy istnieją inne?

Tak! Ramanujan znalazł 54 przykłady takich form.

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2 \\ \vdots \\ a^2 + b^2 + c^2 + 7d^2 \end{gathered}$$

Są to wszystkie uniwersalne formy diagonalne czterech zmiennych.

Reprezentacja macierzowa

forma kwadratowa $\Leftrightarrow$ dodatnio określona macierz symetryczna

Reprezentacja macierzowa

forma kwadratowa $\Leftrightarrow$ dodatnio określona macierz symetryczna

$$a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Reprezentacja macierzowa

forma kwadratowa $\Leftrightarrow$ dodatnio określona macierz symetryczna

$$a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Macierz o wyrazach całkowitych odpowiada formie o parzystych współczynnikach „mieszanych”.

Reprezentacja macierzowa

forma kwadratowa $\Leftrightarrow$ dodatnio określona macierz symetryczna

$$a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

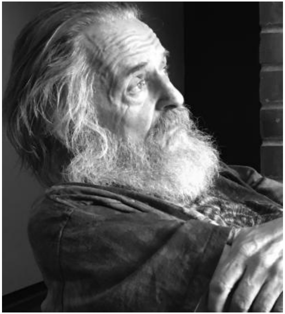
$$a^2 + ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Macierz o wyrazach całkowitych odpowiada formie o parzystych współczynnikach „mieszanych”.
- Willerding w 1948 r. podała klasyfikację takich uniwersalnych form kwadratowych czterech zmiennych.

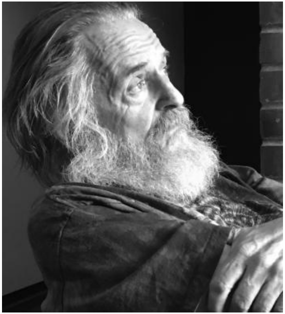
Twierdzenie Conwaya-Schneebergera

Twierdzenie Conwaya-Schneebergera



John H. Conway, 1937-2020

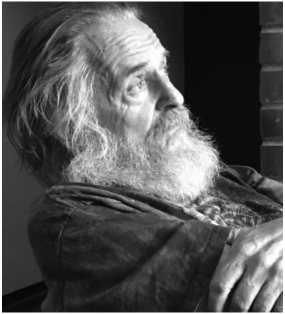
Twierdzenie Conwaya-Schneebergera



John H. Conway, 1937-2020

Twierdzenie (Conway-Schneeberger, 1993)
Forma kwadratowa o parzystych współczynnikach mieszanych jest uniwersalna wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentuje wszystkie liczby naturalne

Twierdzenie Conwaya-Schneebergera



John H. Conway, 1937-2020

Twierdzenie (Conway-Schneeberger, 1993)
Forma kwadratowa o parzystych współczynnikach mieszanych jest uniwersalna wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentuje wszystkie liczby naturalne **od 1 do 15**.

Twierdzenie Lagrange'a

Forma

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

Twierdzenie Lagrange'a

Forma

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest uniwersalna.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\ 2 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 \\ &\vdots \\ 14 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2 \\ 15 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \end{aligned}$$

Idea dowodu: wagarowicze i eskalatory

- **Wagarowiczem** formy kwadratowej jest najmniejsza liczba naturalna, której ta forma nie reprezentuje. Przykładowo

$$\mathrm{wagarowicz}(a^2 + b^2) = 3.$$

Idea dowodu: wagarowicze i eskalatory

- **Wagarowiczem** formy kwadratowej jest najmniejsza liczba naturalna, której ta forma nie reprezentuje. Przykładowo

$$\mathrm{wagarowicz}(a^2 + b^2) = 3.$$

- **Eskalacją** formy Q jest dowolna forma o macierzy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & x_1 \\ & Q & & \vdots \\ & & & x_k \\ \hline x_1 & \cdots & x_k & \mathrm{wagarowicz}(Q) \end{array}\right].$$

Idea dowodu: wagarowicze i eskalatory

- **Wagarowiczem** formy kwadratowej jest najmniejsza liczba naturalna, której ta forma nie reprezentuje. Przykładowo

$$\mathrm{wagarowicz}(a^2 + b^2) = 3.$$

- **Eskalacją** formy Q jest dowolna forma o macierzy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & x_1 \\ & Q & & \vdots \\ & & & x_k \\ \hline x_1 & \cdots & x_k & \mathrm{wagarowicz}(Q) \end{array}\right].$$

- **Eskalatorem** jest dowolna forma powstała przez ciąg eskalacji z formy a^2 o macierzy [1].

Idea dowodu: eskalatory wymiaru dwa

- wagarowicz$(a^2) = 2$.

Idea dowodu: eskalatory wymiaru dwa

- $\mathrm{wagarowicz}(a^2) = 2.$
- Eskalacją formy a^2 jest dowolna forma o macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}.$$

Idea dowodu: eskalatory wymiaru dwa

- $\mathrm{wagarowicz}(a^2) = 2.$
- Eskalacją formy a^2 jest dowolna forma o macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}.$$

- Ponieważ forma ta ma być dodatnio określona, to musi zachodzić $x^2 \leq 2$, skąd

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 1.$$

Idea dowodu: eskalatory wymiaru dwa

- $\mathrm{wagarowicz}(a^2) = 2.$
- Eskalacją formy a^2 jest dowolna forma o macierzy
$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}.$$
- Ponieważ forma ta ma być dodatnio określona, to musi zachodzić $x^2 \leq 2$, skąd
$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 1.$$
- Forma a^2 ma trzy eskalacje:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
lub $a^2 - 2ab + 2b^2$, $a^2 + 2b^2$ i $a^2 + 2ab + 2b^2$.

Idea dowodu: eskalatory wymiaru dwa

- $\mathrm{wagarowicz}(a^2) = 2.$
- Eskalacją formy a^2 (o macierzy $[1]$) jest dowolna forma o macierzy
$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}.$$
- Ponieważ forma ta ma być dodatnio określona, to musi zachodzić $x^2 \leq 2$, skąd
$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 1.$$
- Istnieją **dwa** eskalatory wymiaru dwa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  lub $a^2 + 2b^2$ i $a^2 + b^2$.

Idea dowodu: wyższe wymiary

- $\dim 2$: 2 eskalatory.

Idea dowodu: wyższe wymiary

- $\dim 2$: 2 eskalatory.
- $\dim 3$: 9 eskalatorów.

Idea dowodu: wyższe wymiary

- $\dim 2$: 2 eskalatory.
- $\dim 3$: 9 eskalatorów.
- $\dim 4$: 207 eskalatorów.

Idea dowodu: wyższe wymiary

- $\dim 2$: 2 eskalatory.
- $\dim 3$: 9 eskalatorów.
- $\dim 4$: 207 eskalatorów.
- 201 eskalatorów wymiaru 4 jest uniwersalnych!

Idea dowodu: wyższe wymiary

- $\dim 2$: 2 eskalatory.
- $\dim 3$: 9 eskalatorów.
- $\dim 4$: 207 eskalatorów.
- 201 eskalatorów wymiaru 4 jest uniwersalnych!
- Pozostałe 6 eskalatorów wymiaru 4 reprezentuje wszystkie liczby naturalne poza jedną.

Idea dowodu: wyższe wymiary

- $\dim 2$: 2 eskalatory.
- $\dim 3$: 9 eskalatorów.
- $\dim 4$: 207 eskalatorów.
- 201 eskalatorów wymiaru 4 jest uniwersalnych!
- Pozostałe 6 eskalatorów wymiaru 4 reprezentuje wszystkie liczby naturalne poza jedną.
- $\dim 6$: 0 eskalatorów.

Idea dowodu: ostatni krok

- Uniwersalna forma kwadratowa „zawiera” uniwersalny eskalator.
- Wagarowicz nieuniwersalnej formy kwadratowej jest wagarowiczem nieuniwersalnego eskalatora.
- Jedynymi wagarowiczami eskalatorów są liczby

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 10, \quad 14, \quad 15.$$

Idea dowodu: ostatni krok

- Uniwersalna forma kwadratowa „zawiera” uniwersalny eskalator.
- Wagarowicz nieuniwersalnej formy kwadratowej jest wagarowiczem nieuniwersalnego eskalatora.
- Jedynymi wagarowiczami eskalatorów są liczby

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 10, \quad 14, \quad 15.$$

Twierdzenie (Conway-Schneeberger, 1993)
Forma kwadratowa o parzystych współczynnikach mieszanych jest uniwersalna wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentuje wszystkie liczby 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15.

Uogólnienie

Uogólnienie

Twierdzenie (Bhargava-Hanke, 2011)

Forma kwadratowa jest uniwersalna wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentuje liczby od 1 do 290.