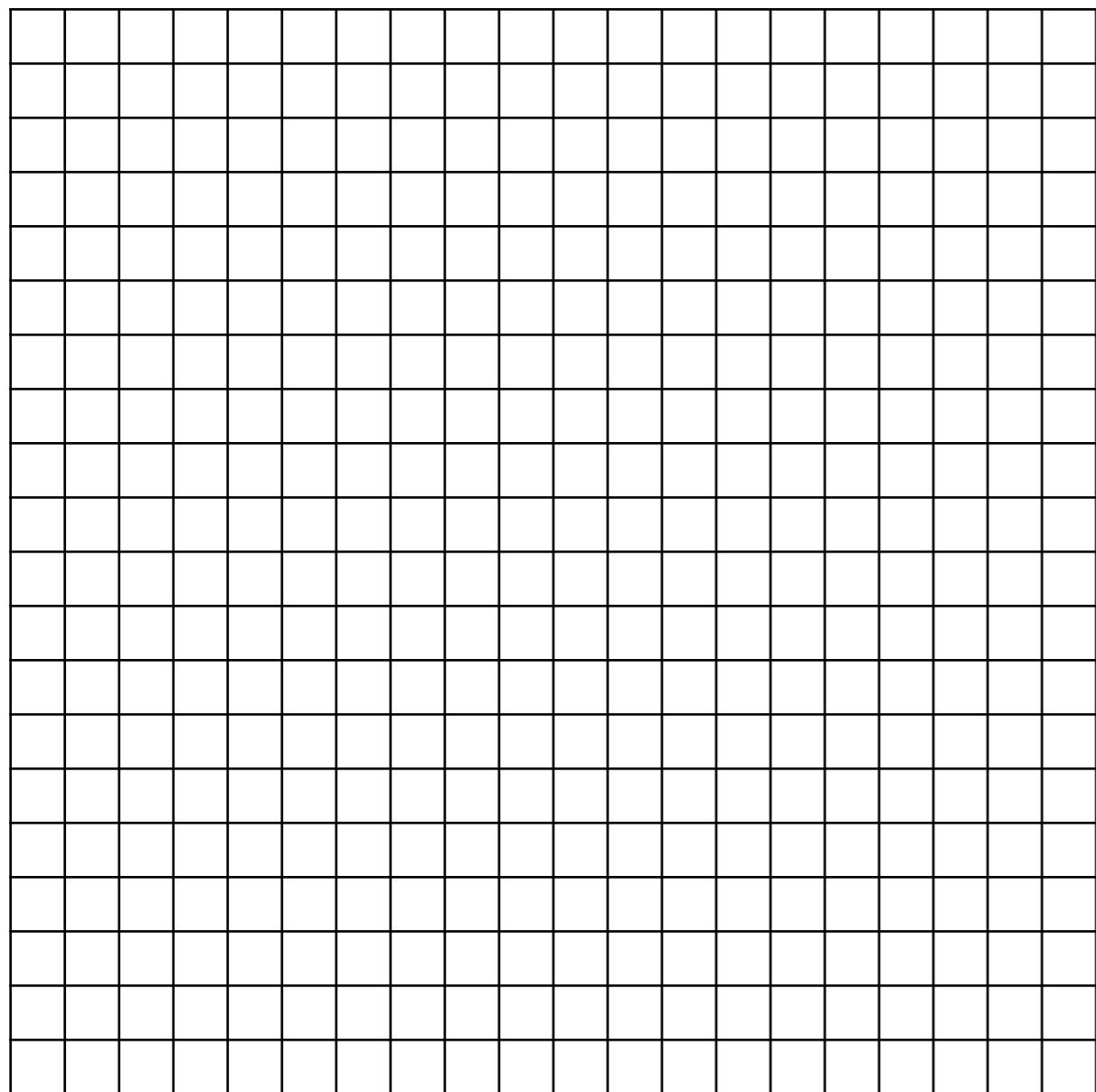


Spacery po kracie

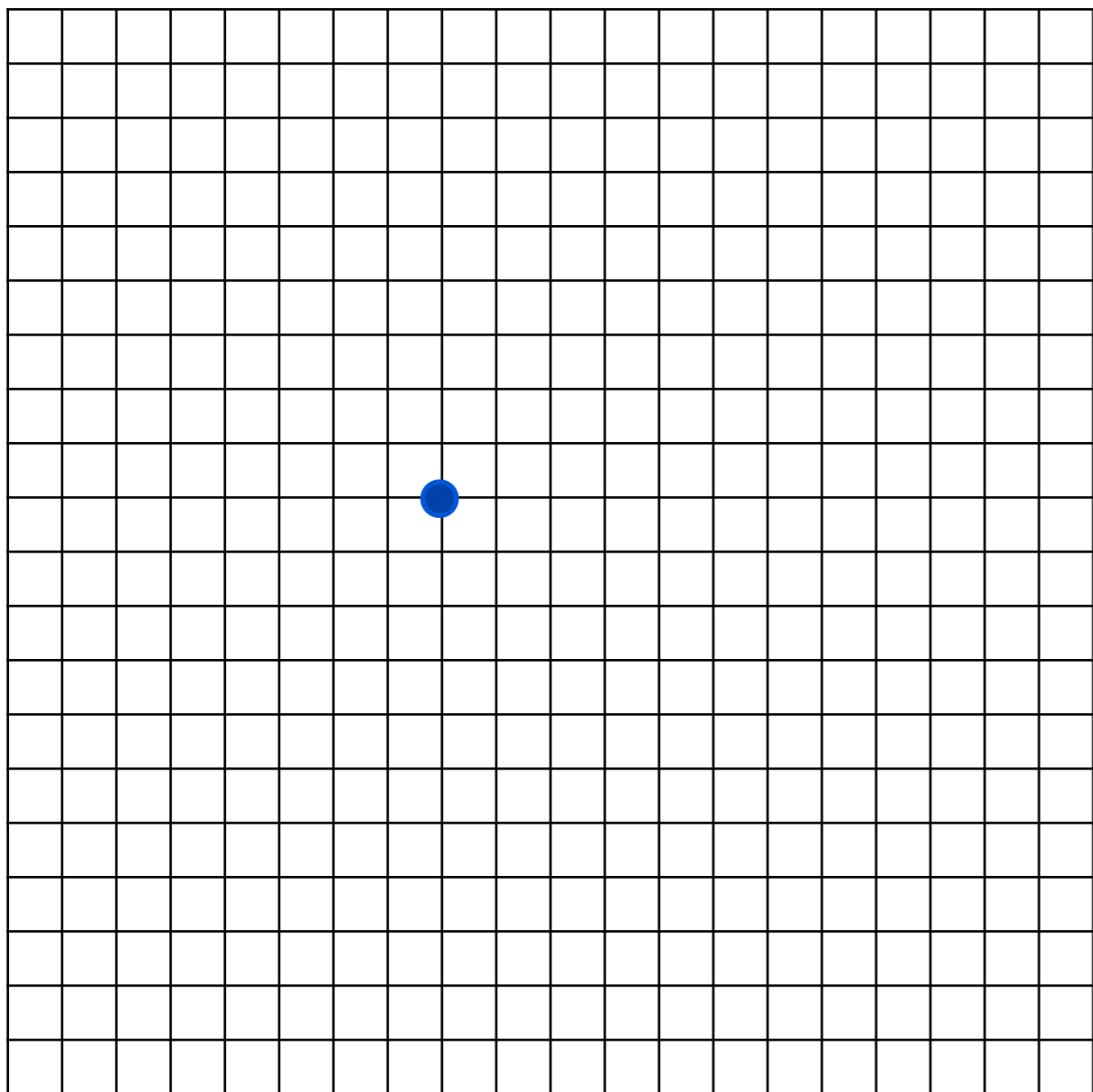
Wojciech Czerwiński

Dodawanie wektorów

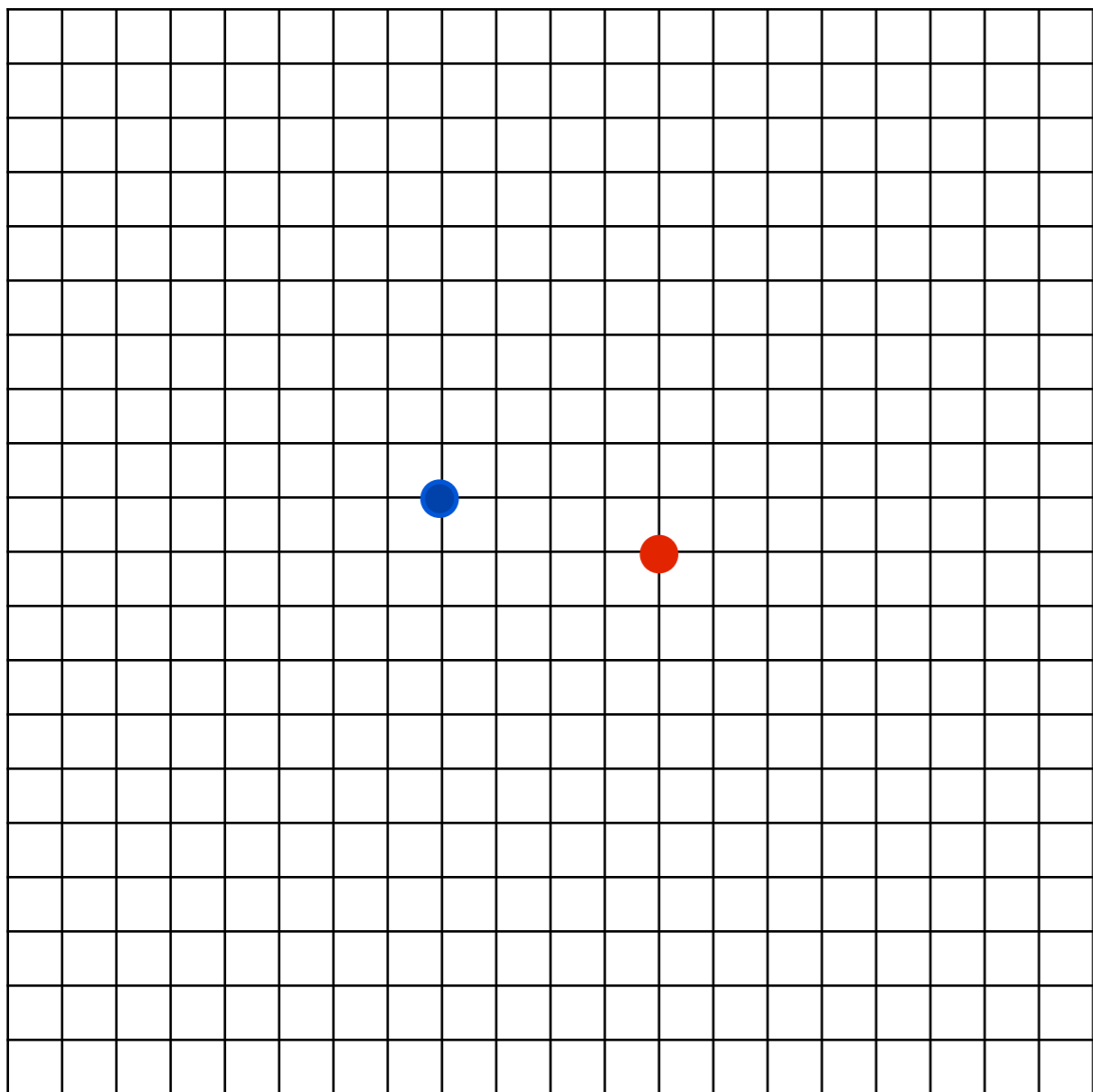
Dodawanie wektorów



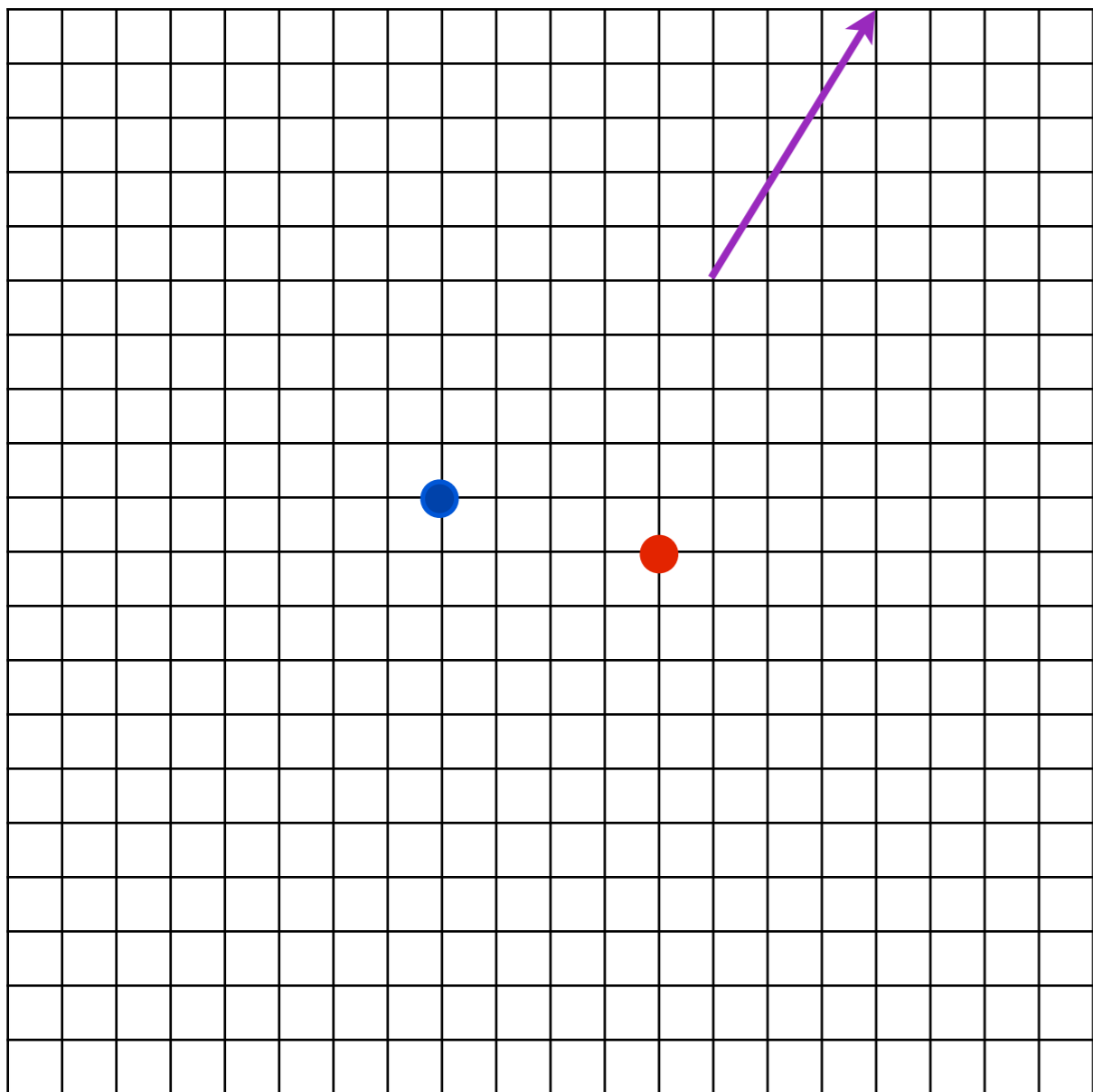
Dodawanie wektorów



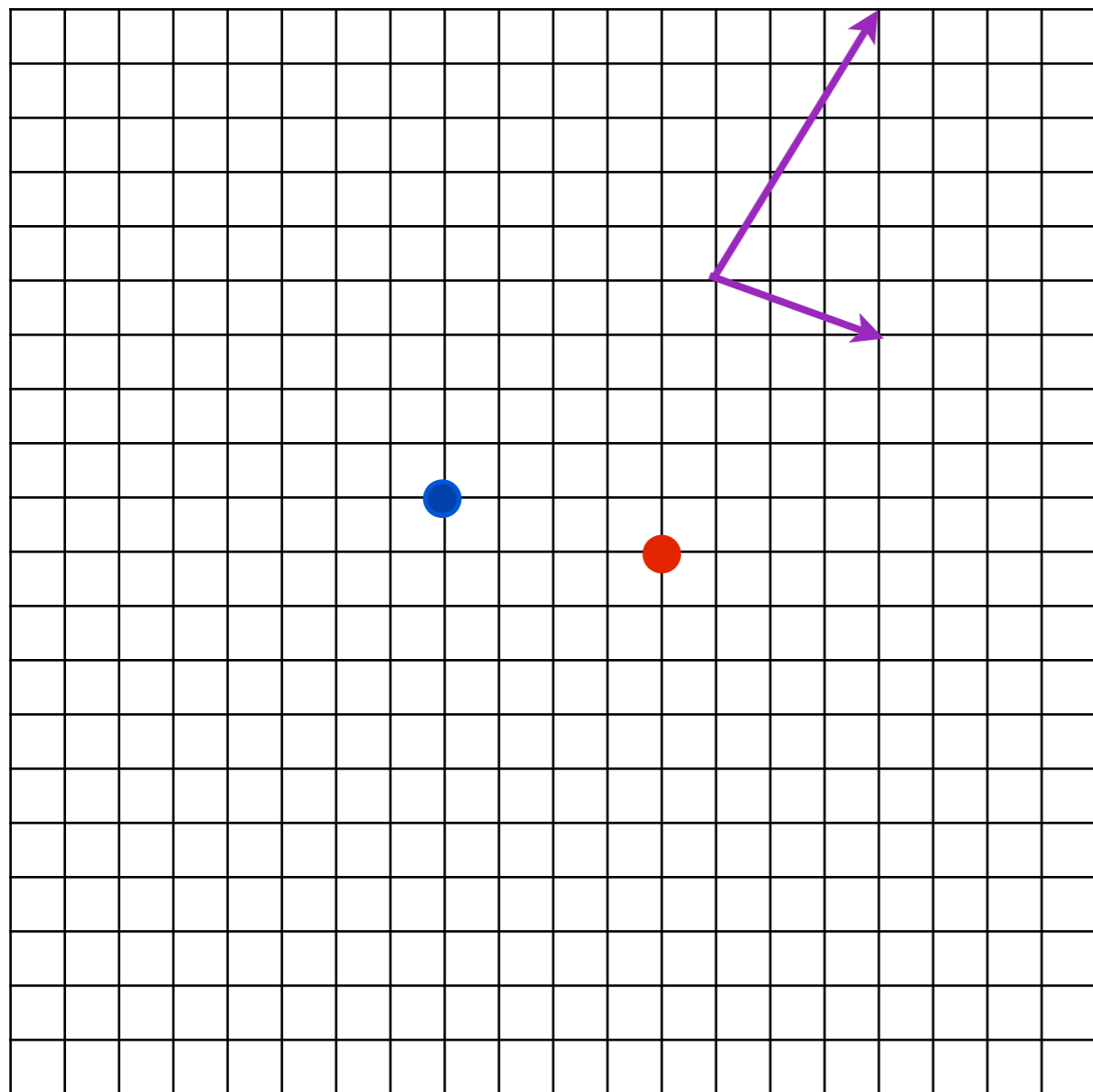
Dodawanie wektorów



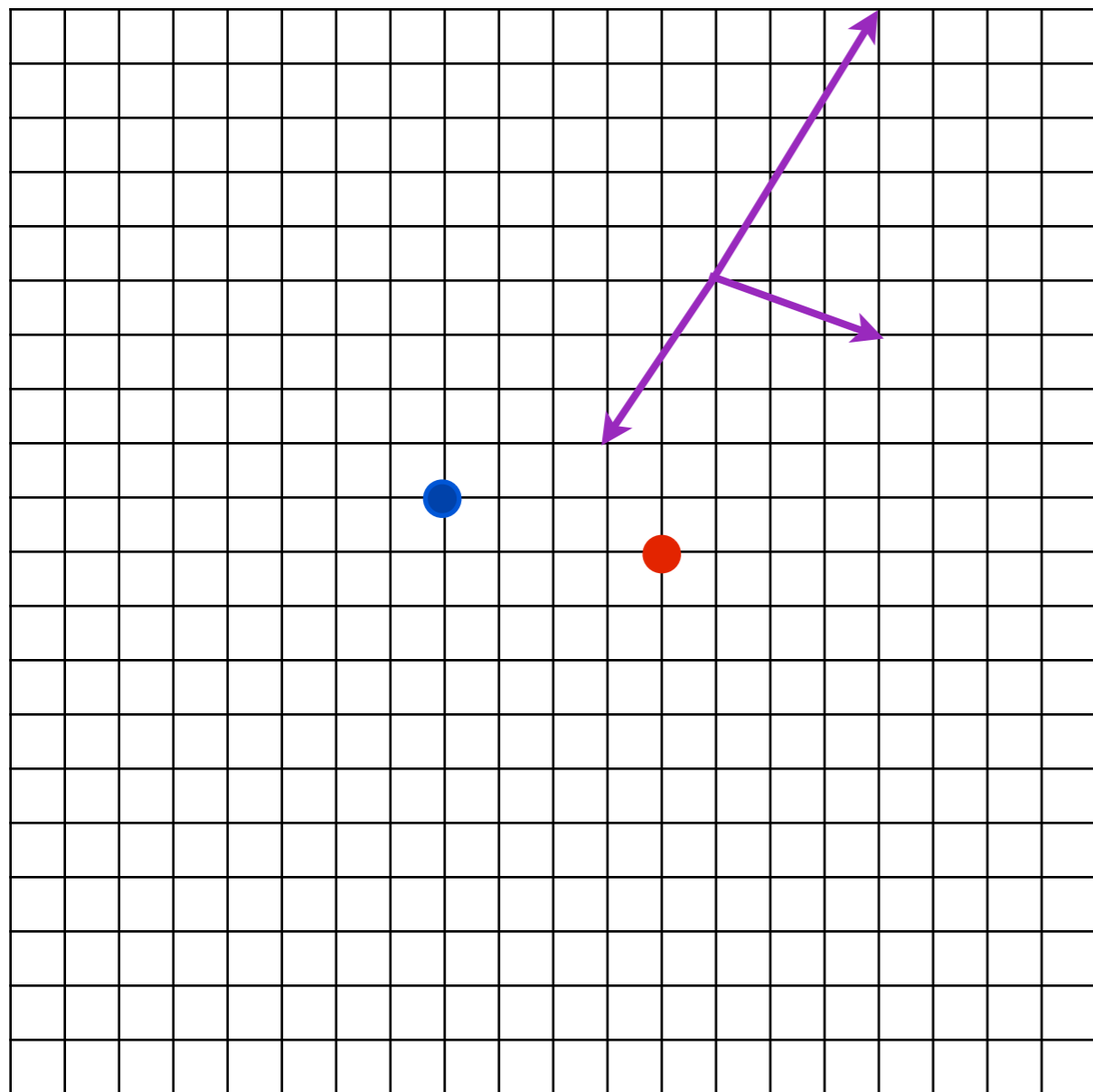
Dodawanie wektorów



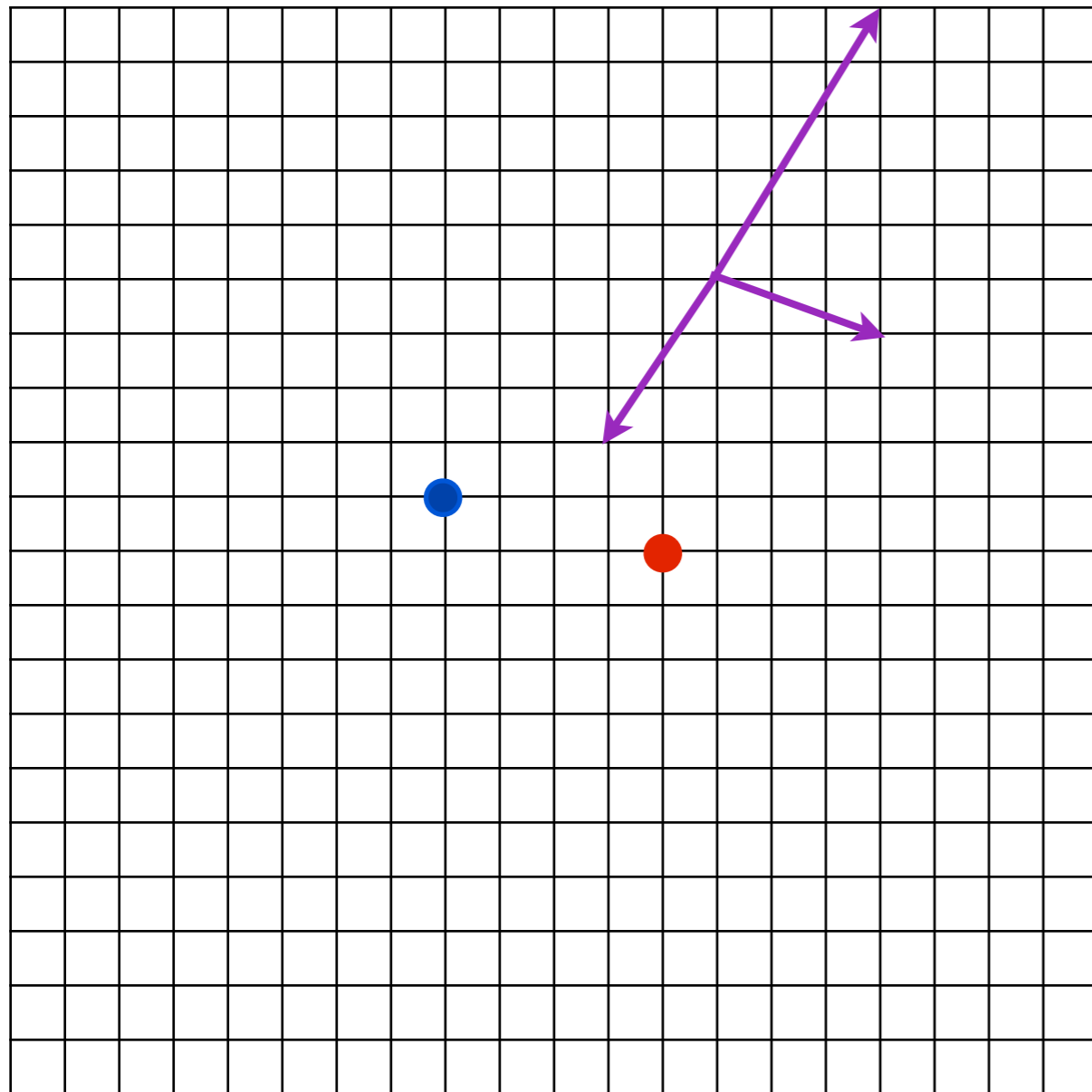
Dodawanie wektorów



Dodawanie wektorów

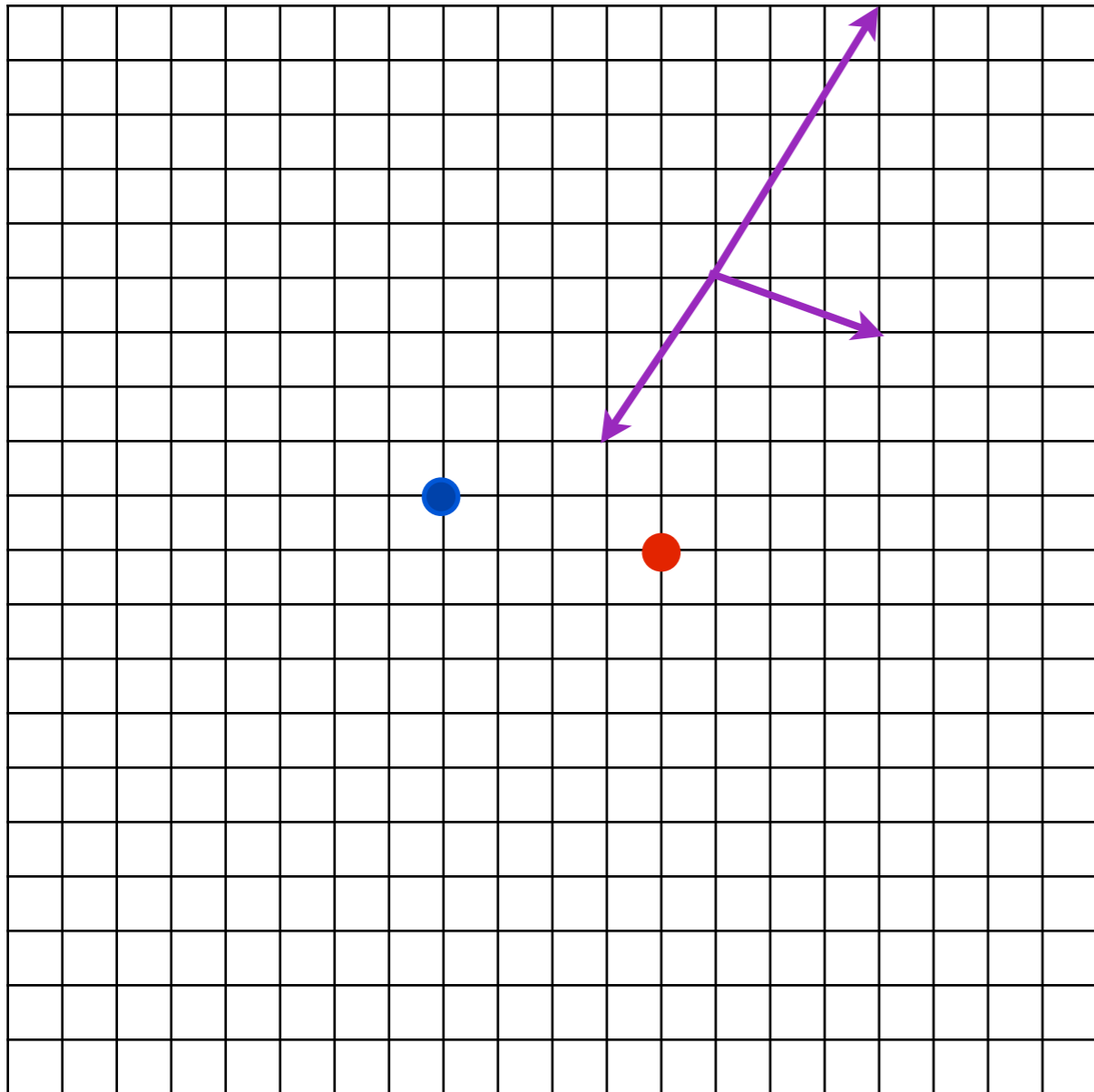


Dodawanie wektorów



Dane:
punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Dodawanie wektorów



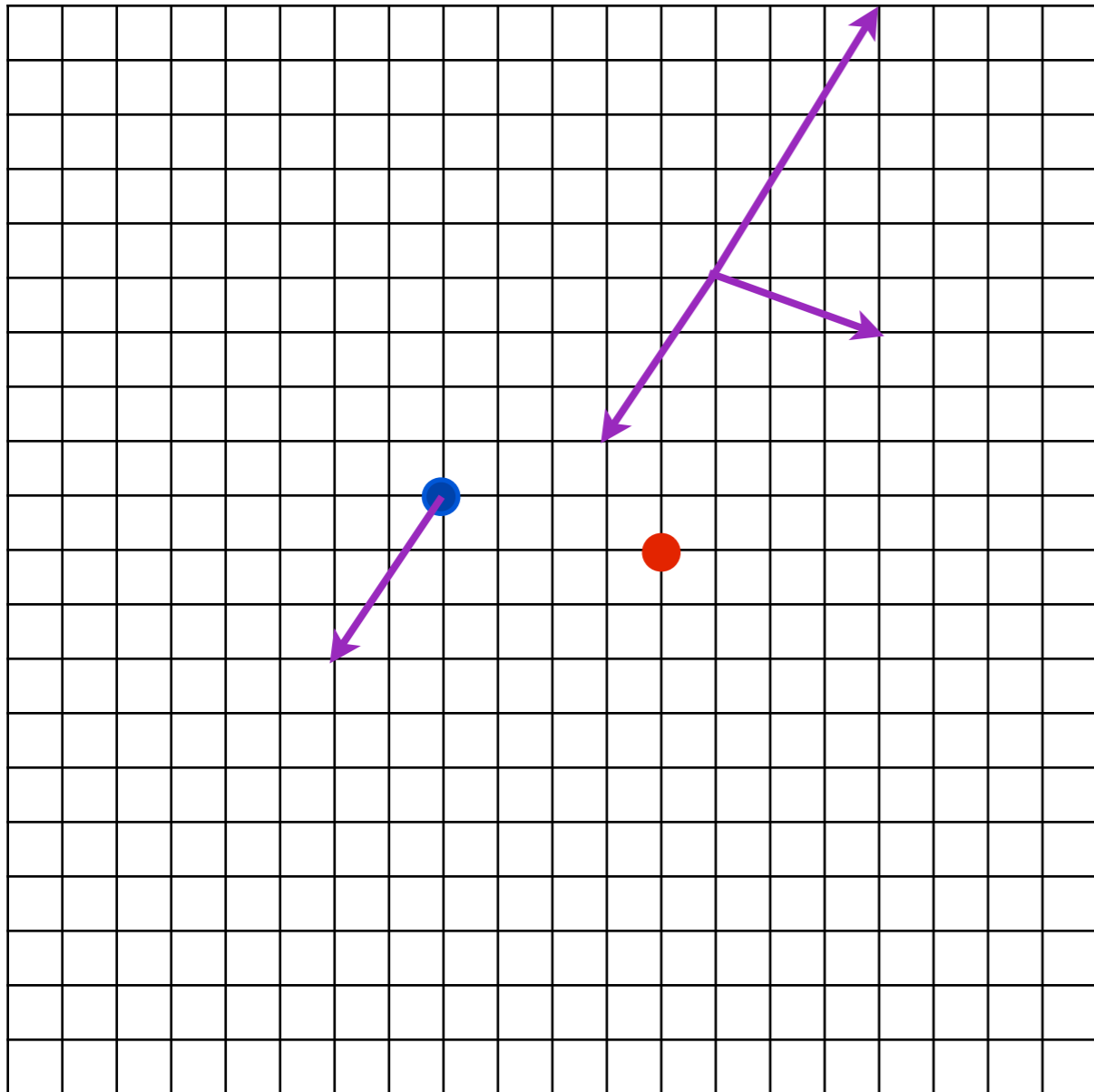
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



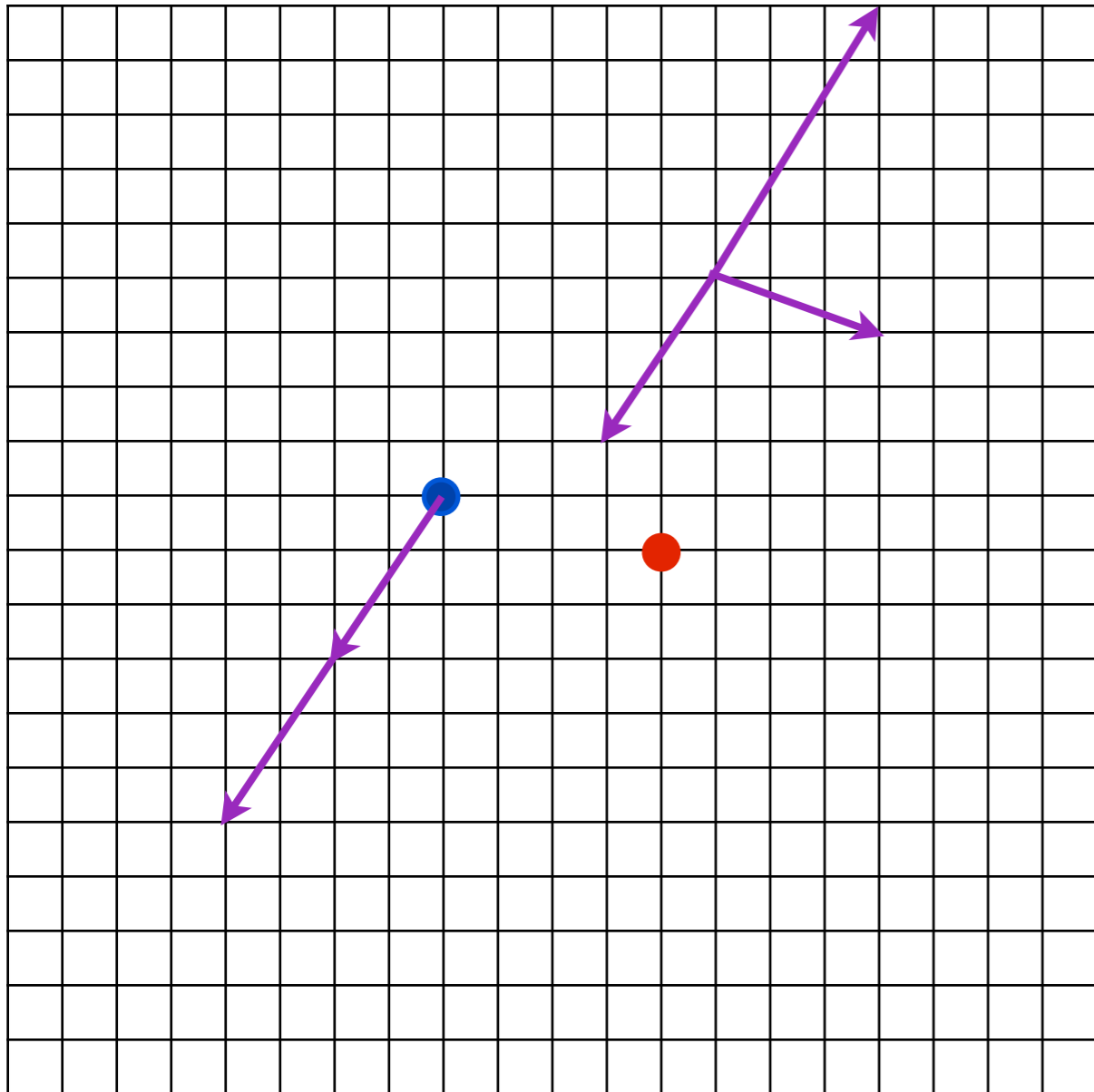
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



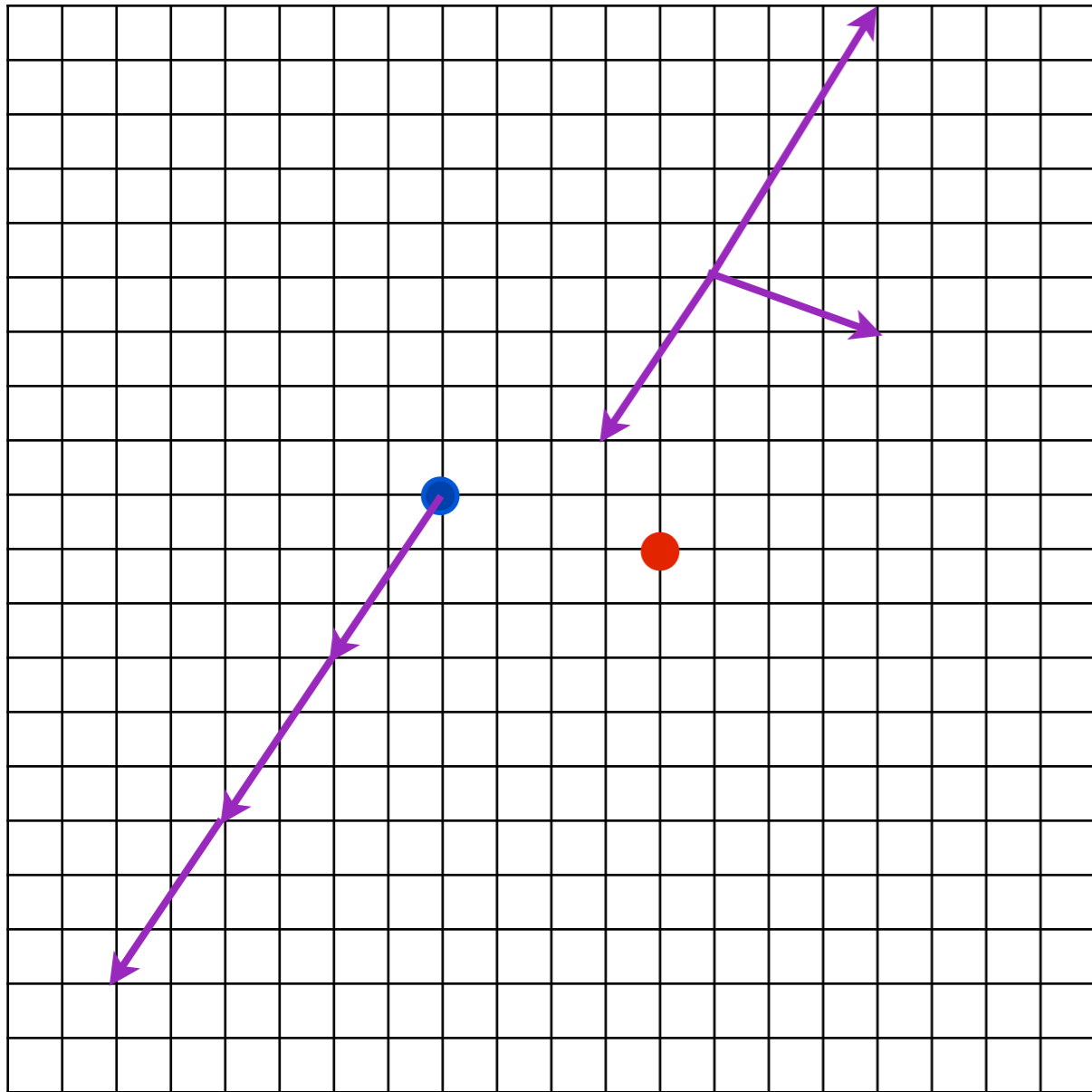
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



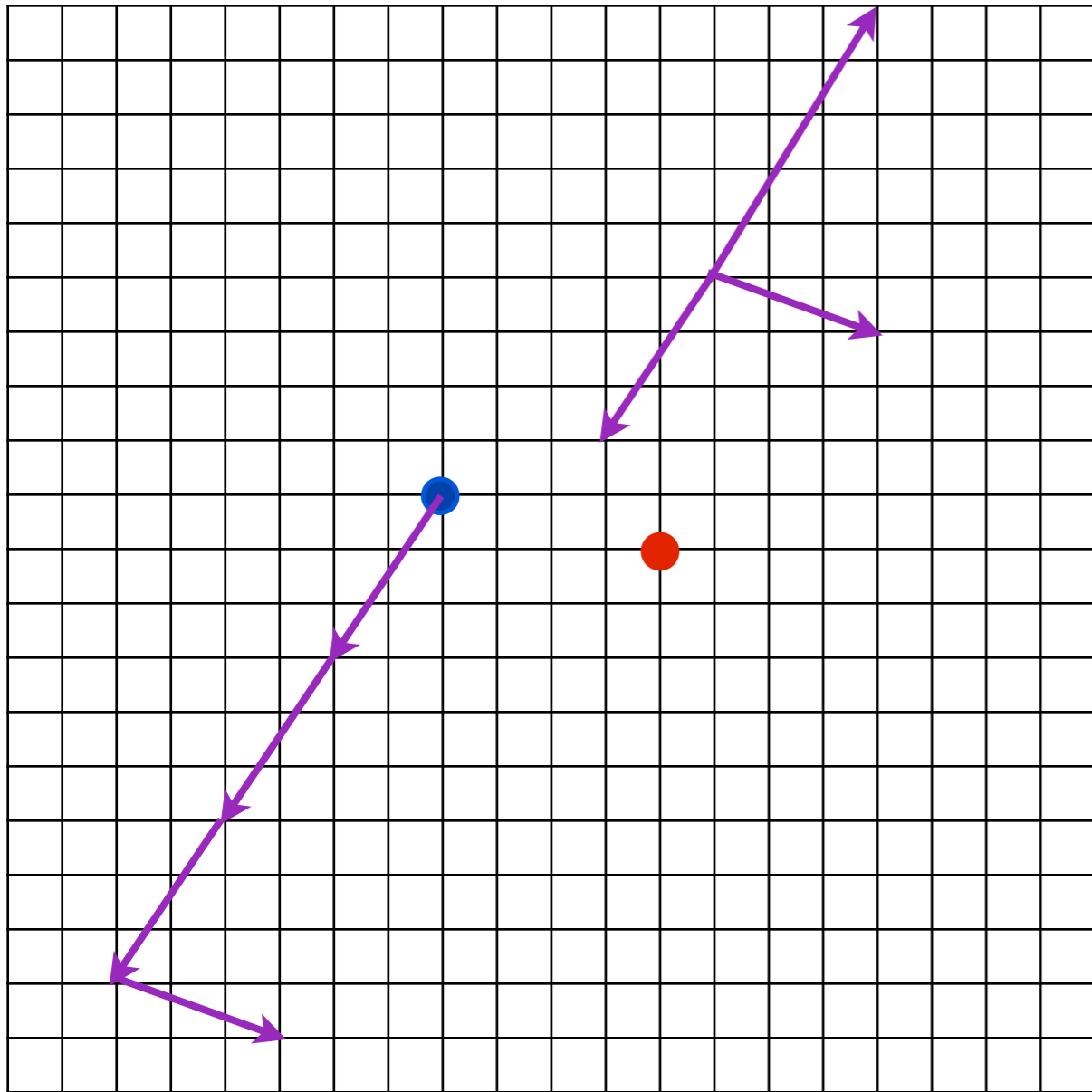
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



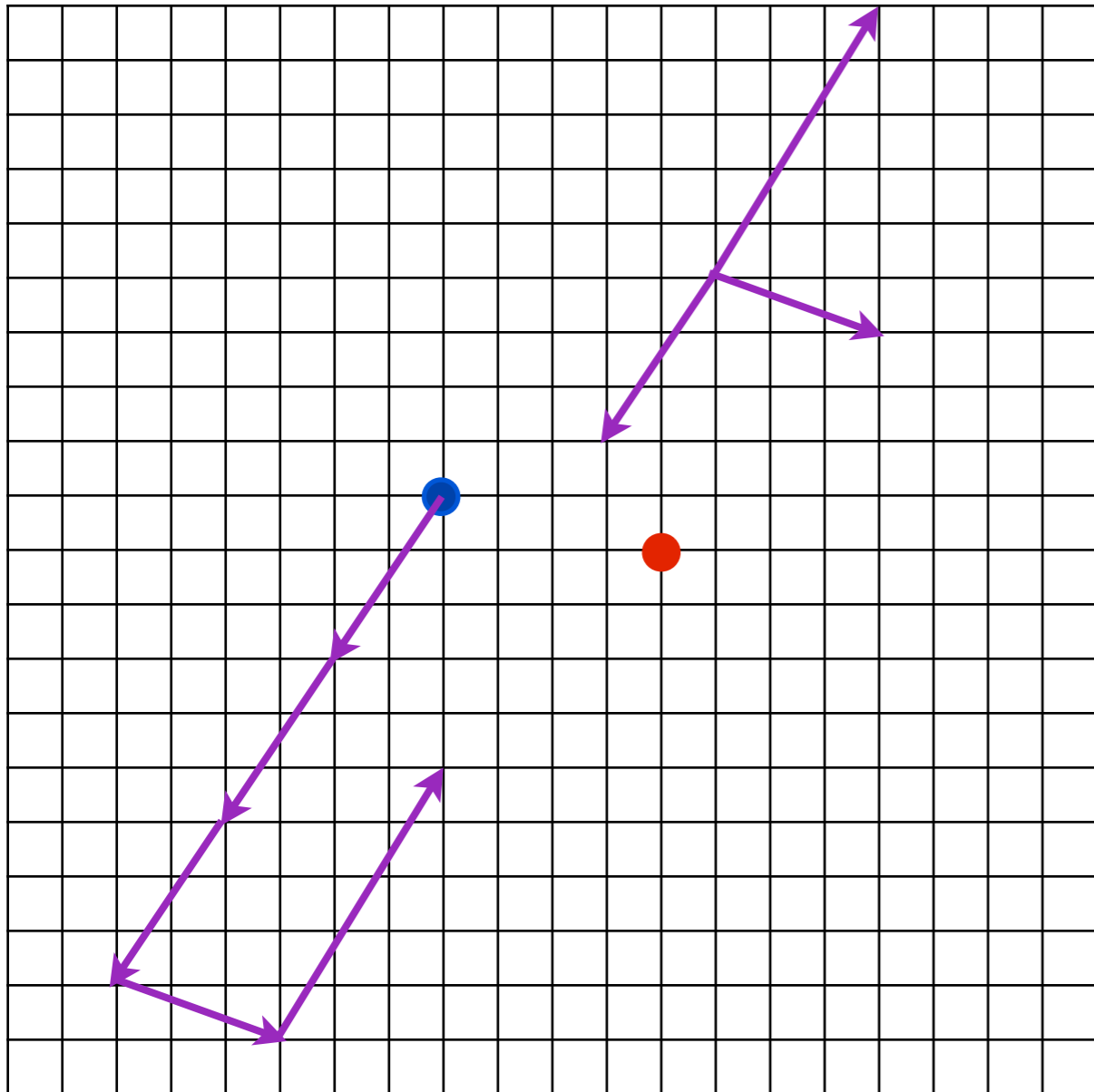
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



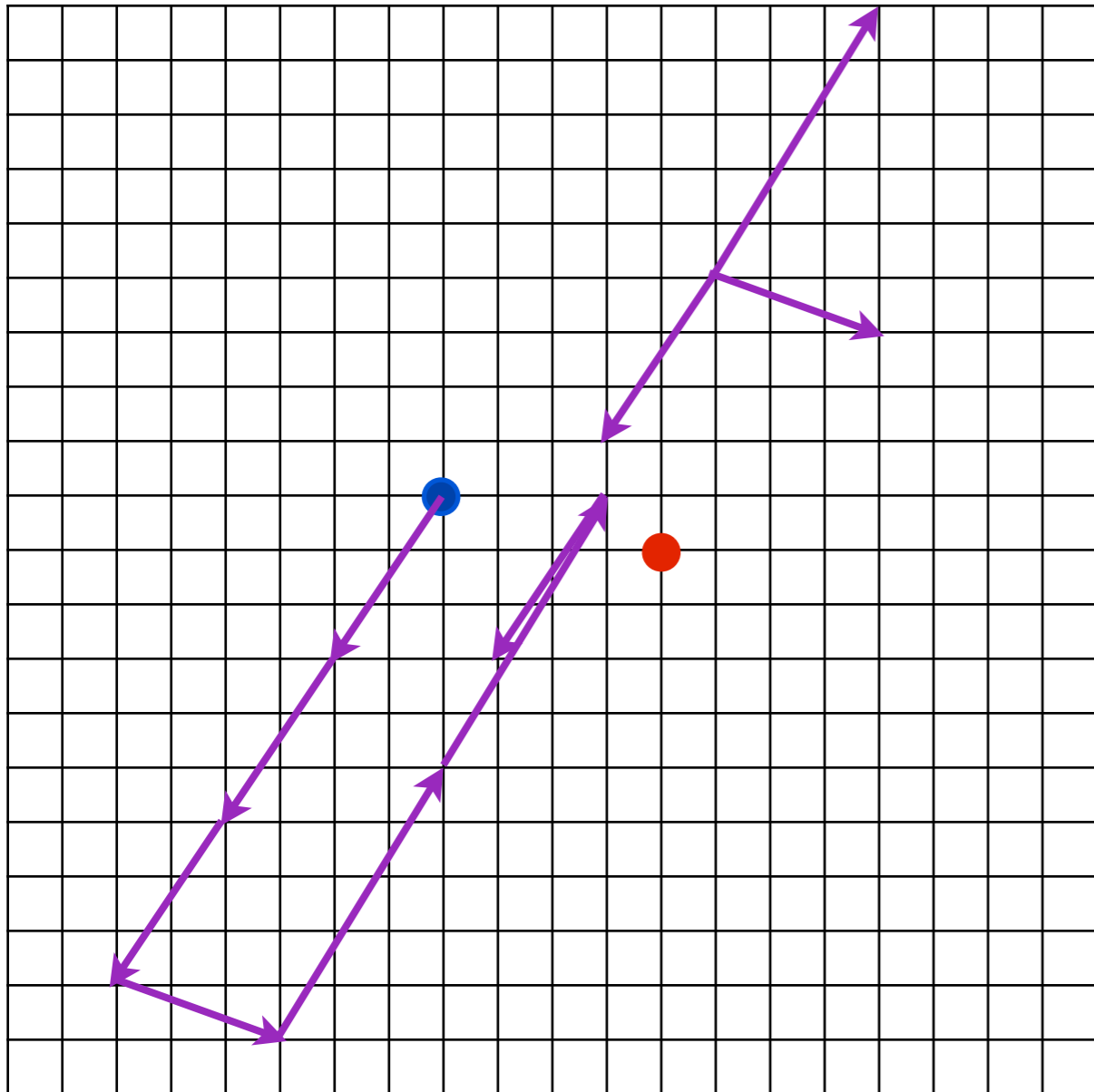
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



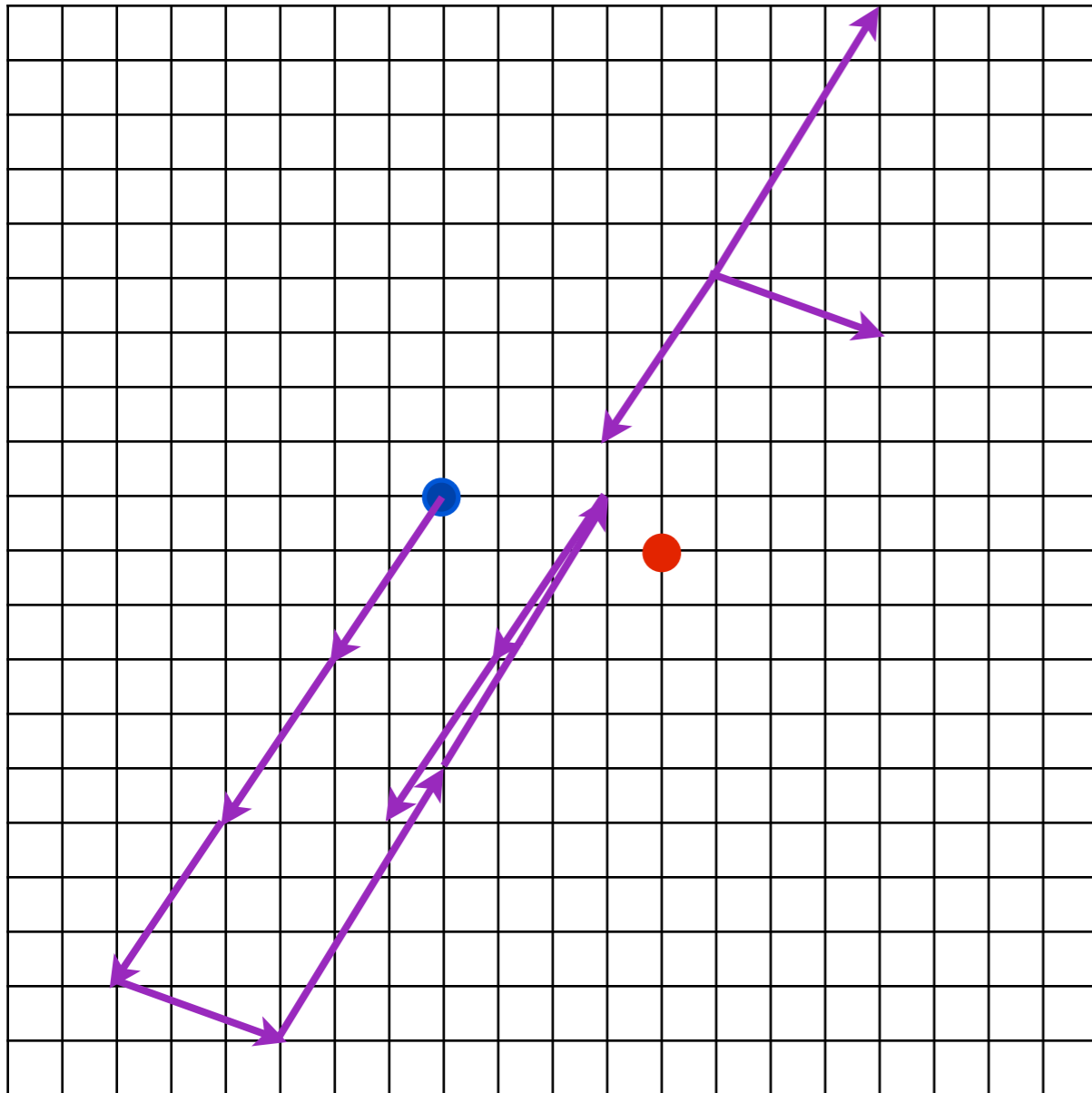
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



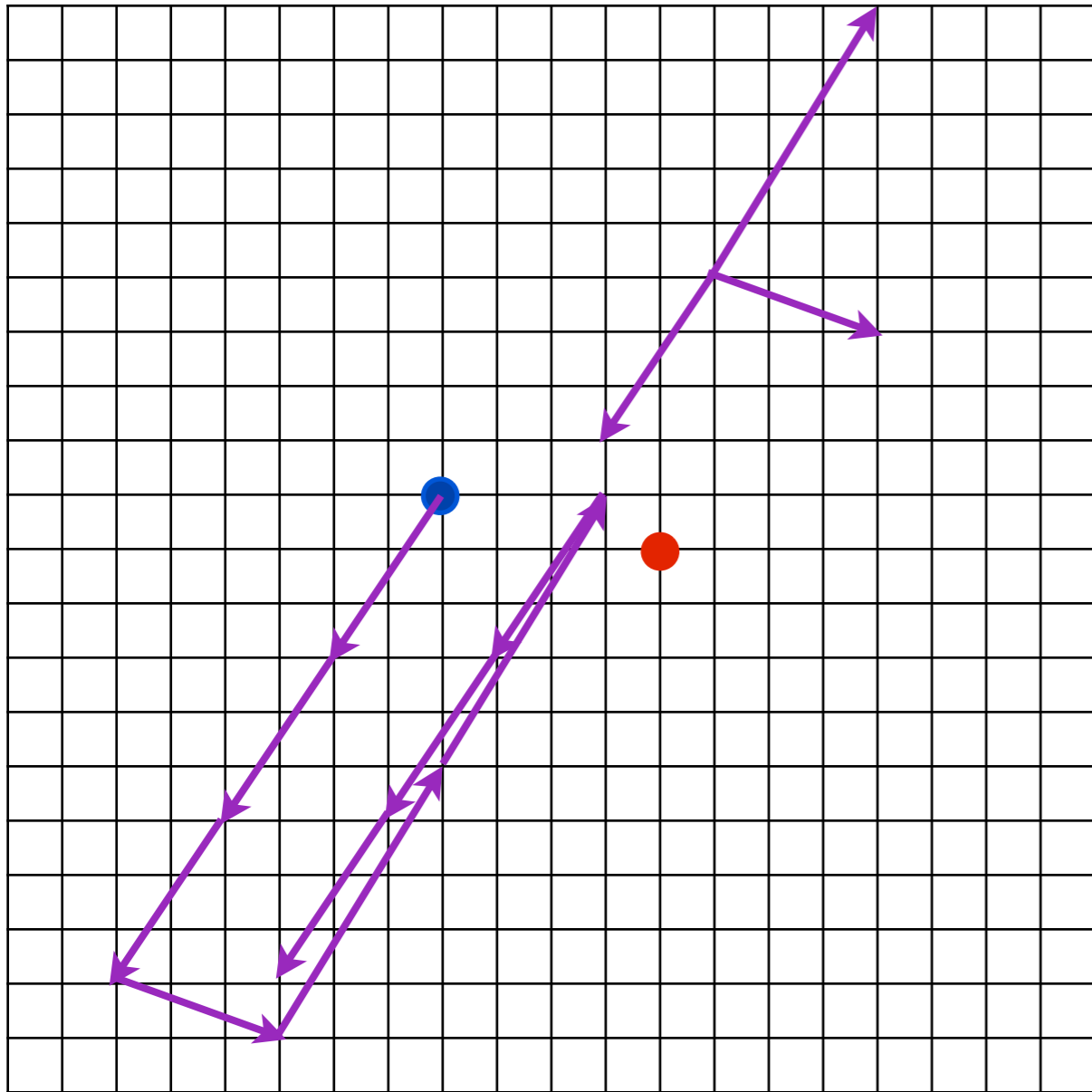
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



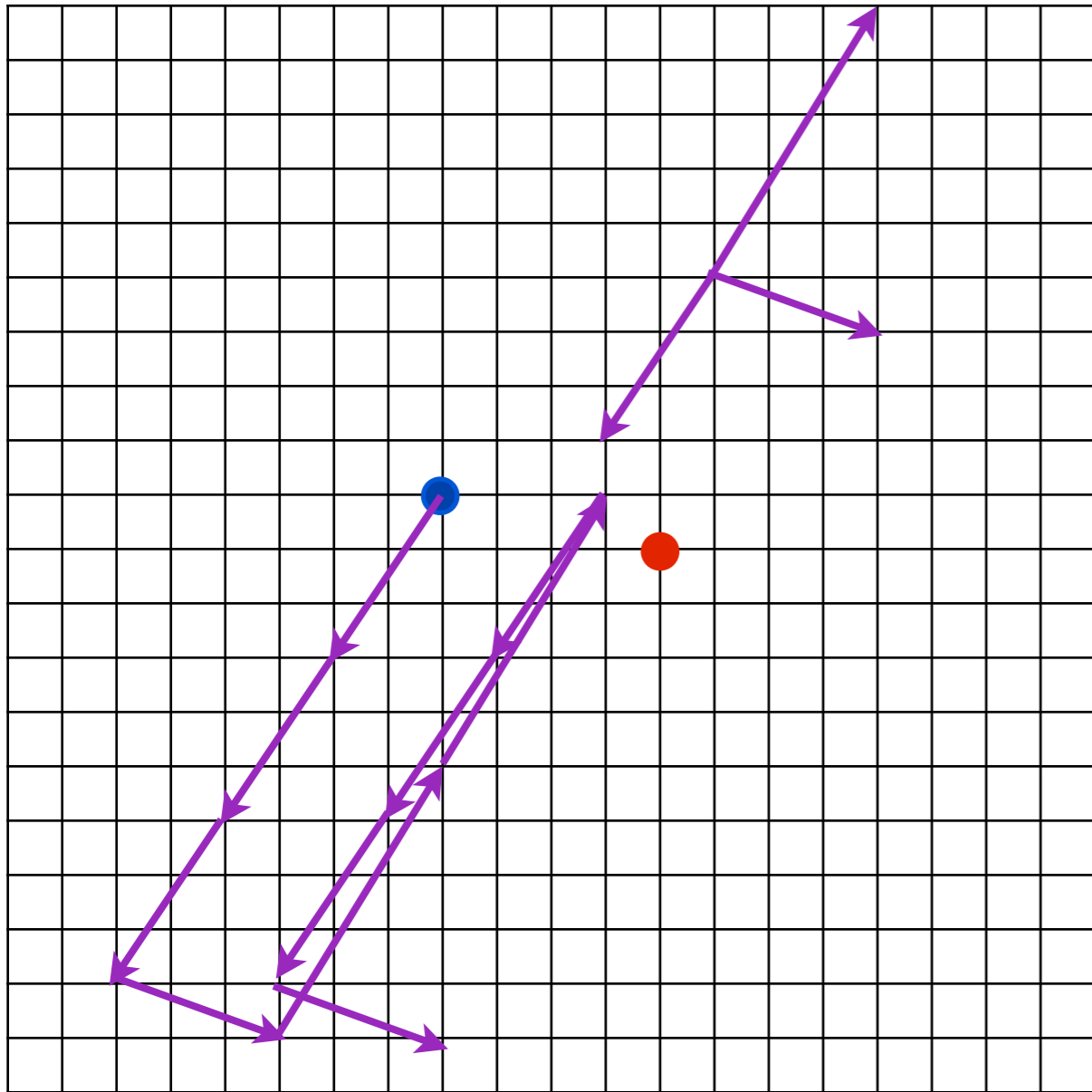
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



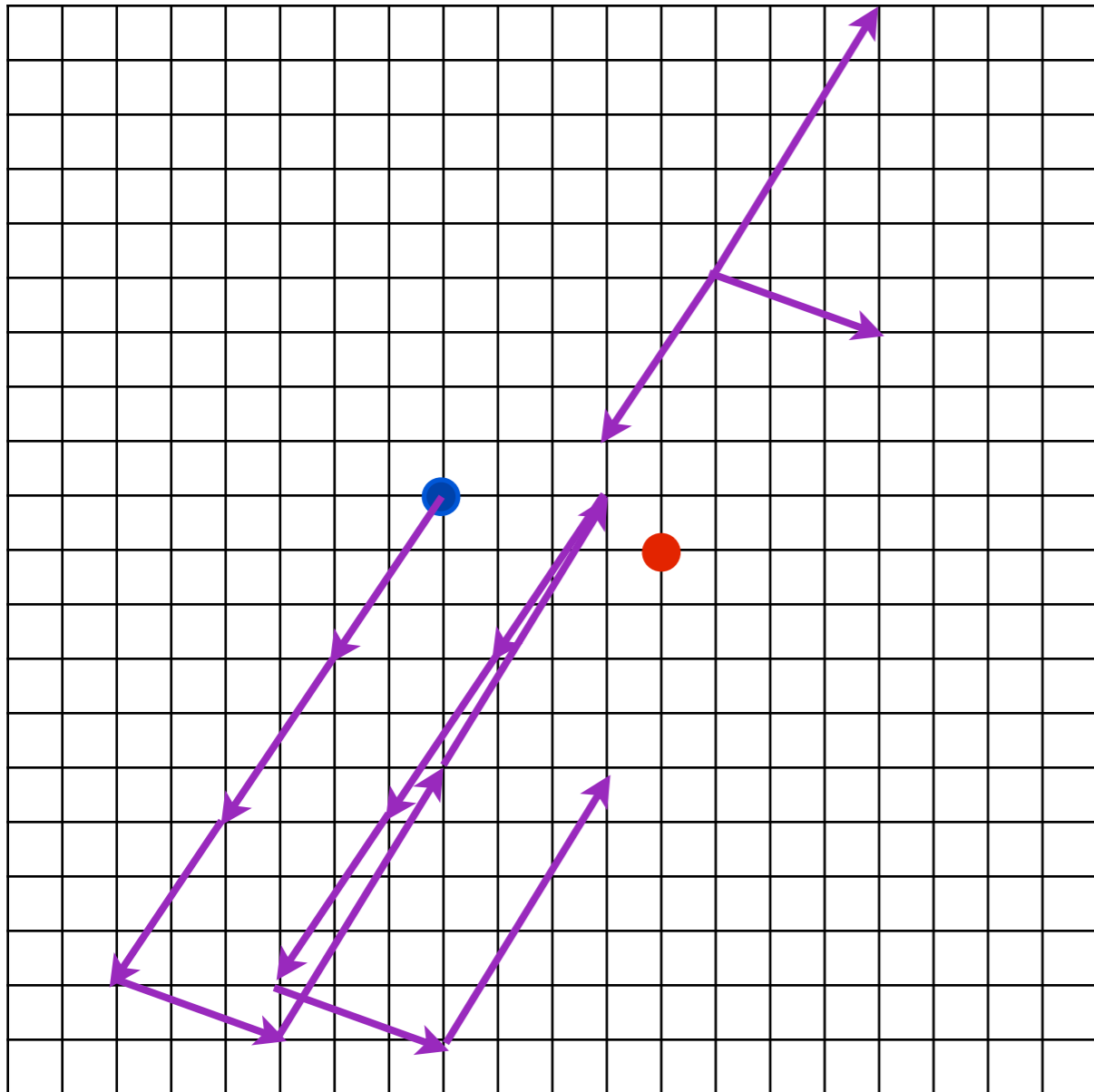
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



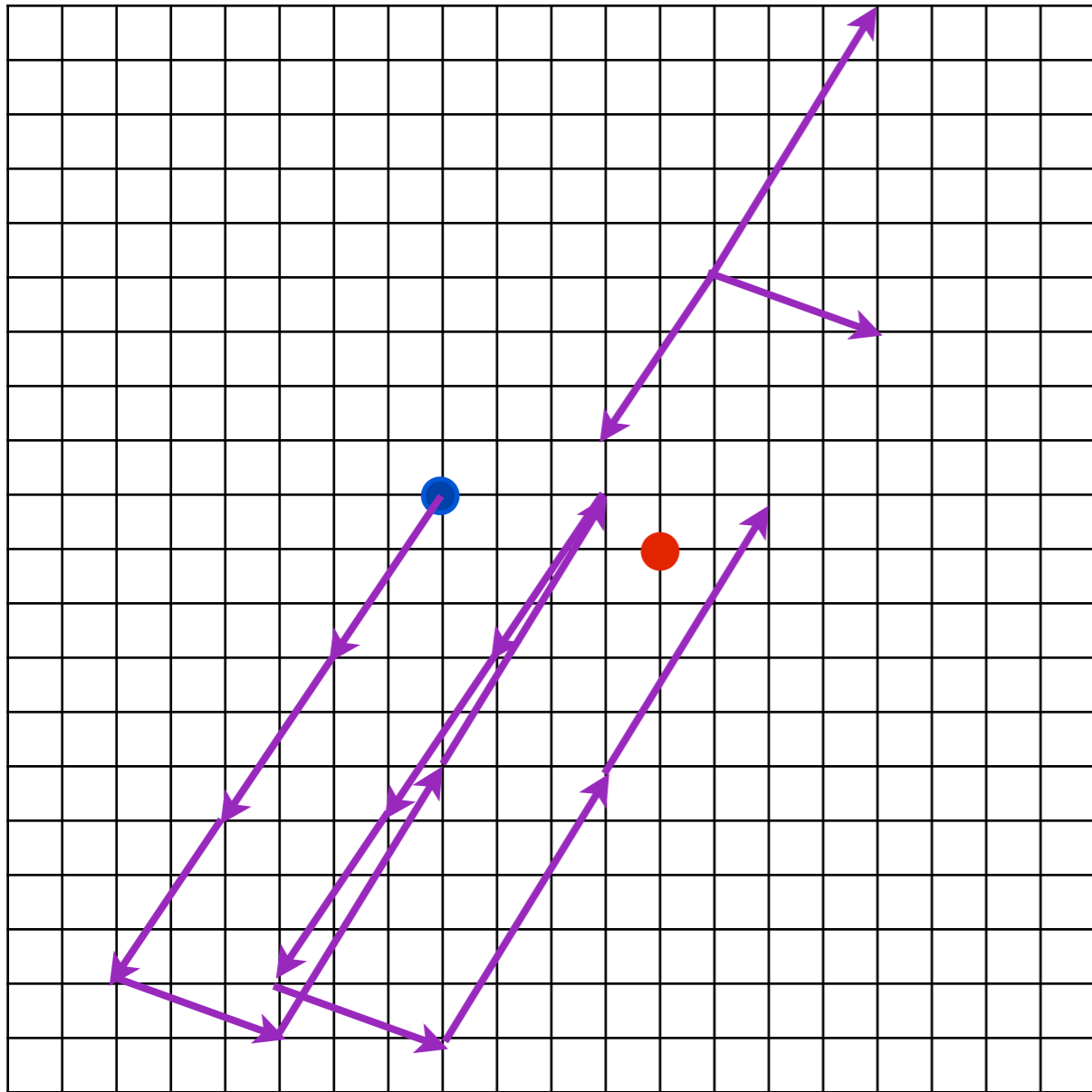
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



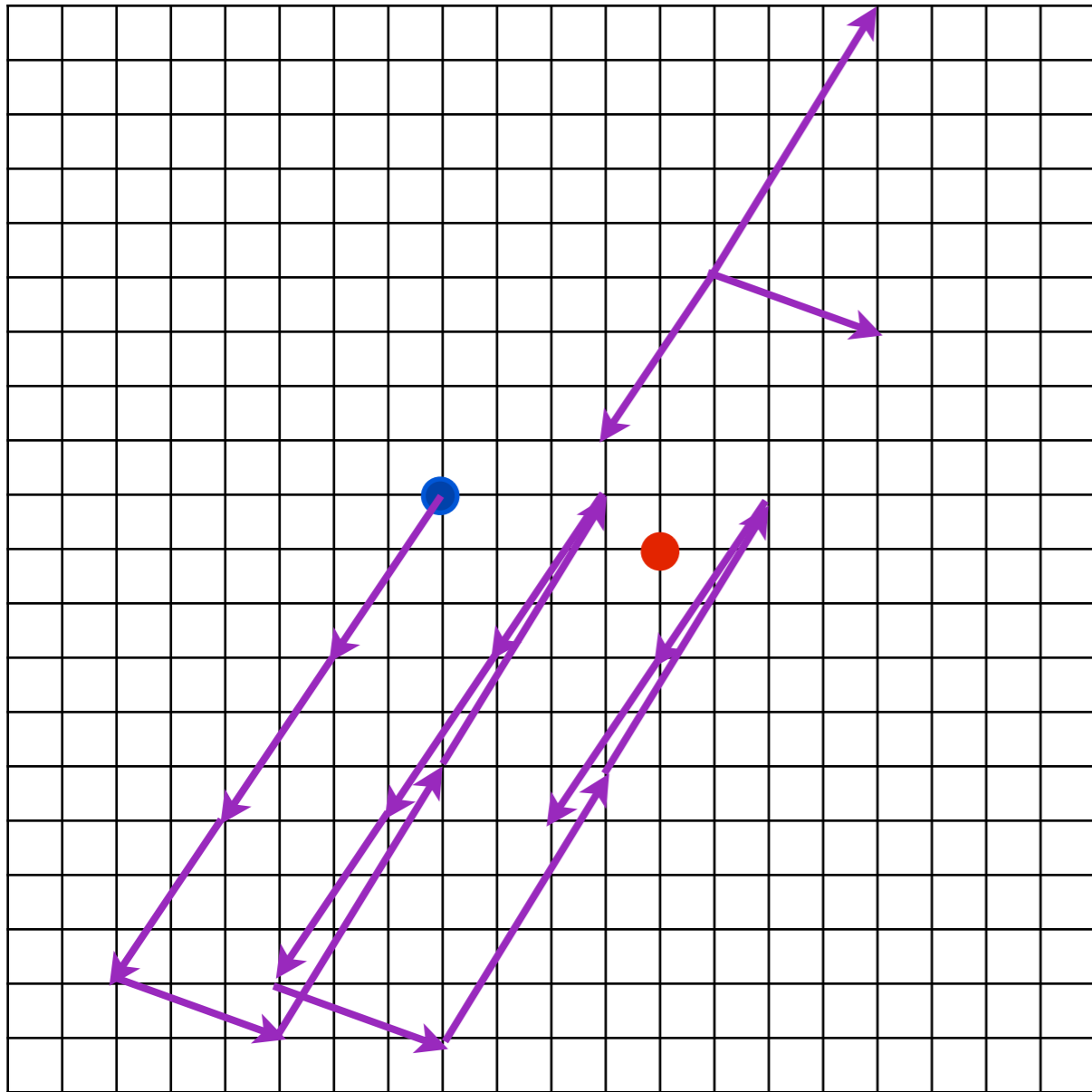
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



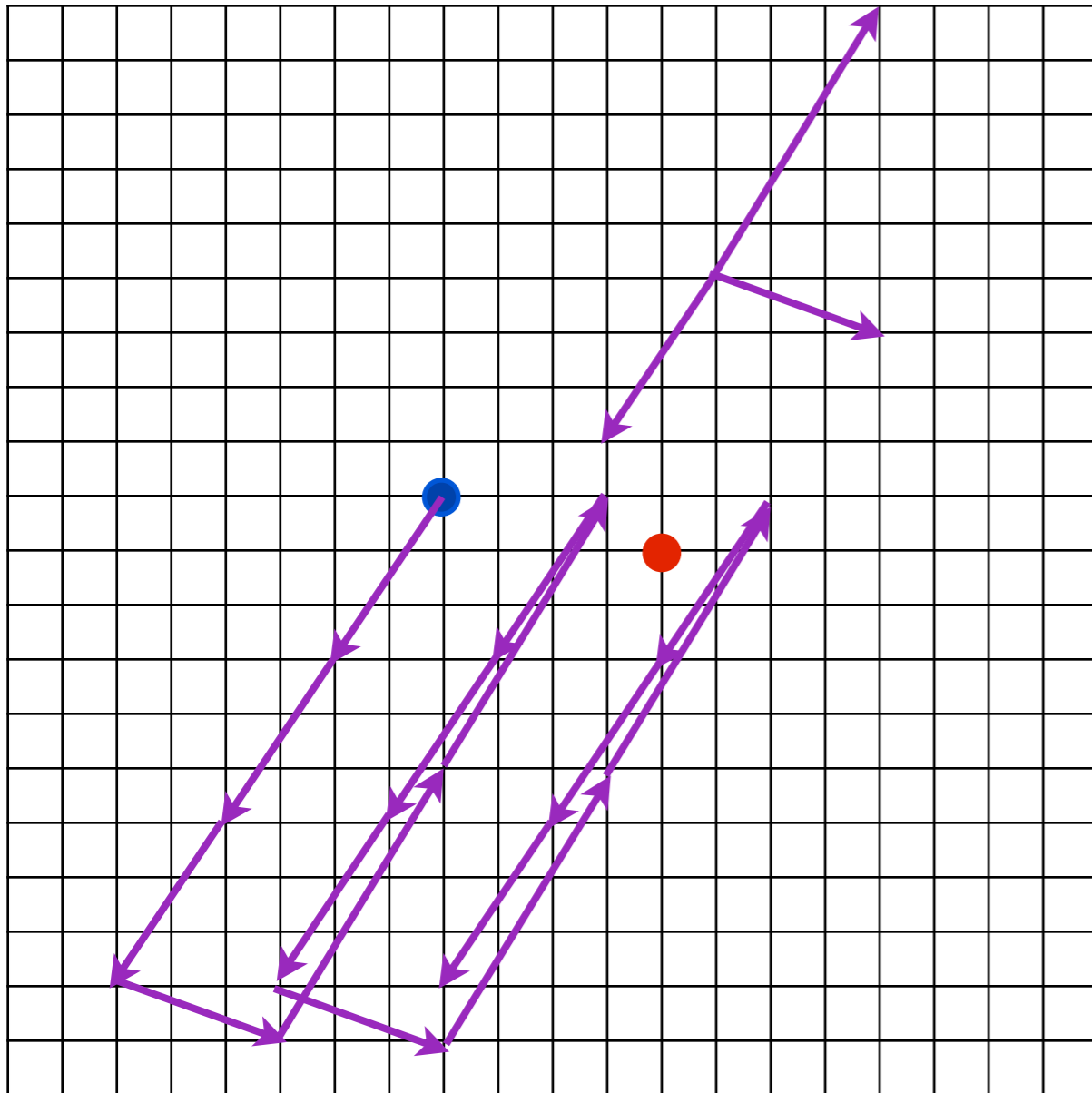
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



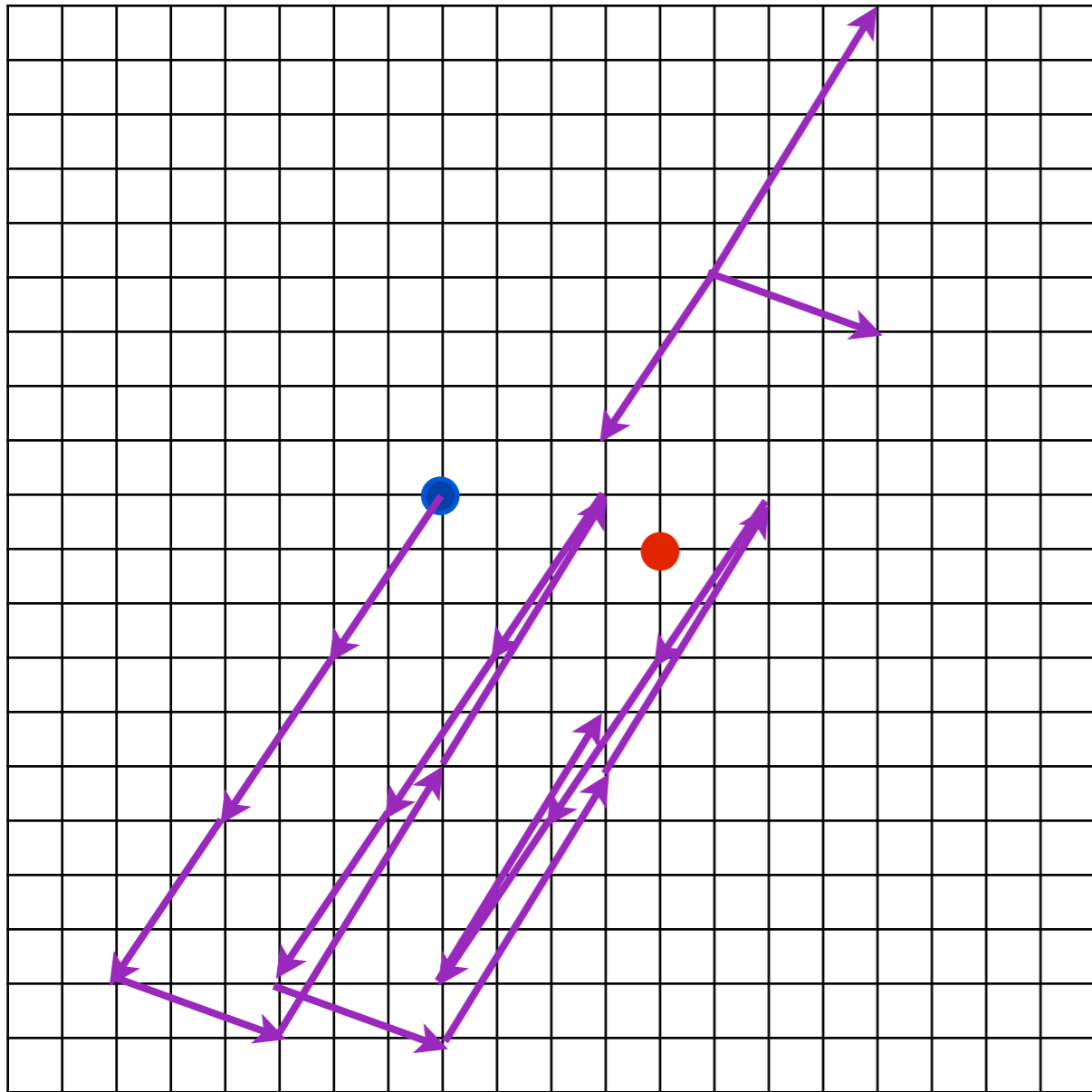
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



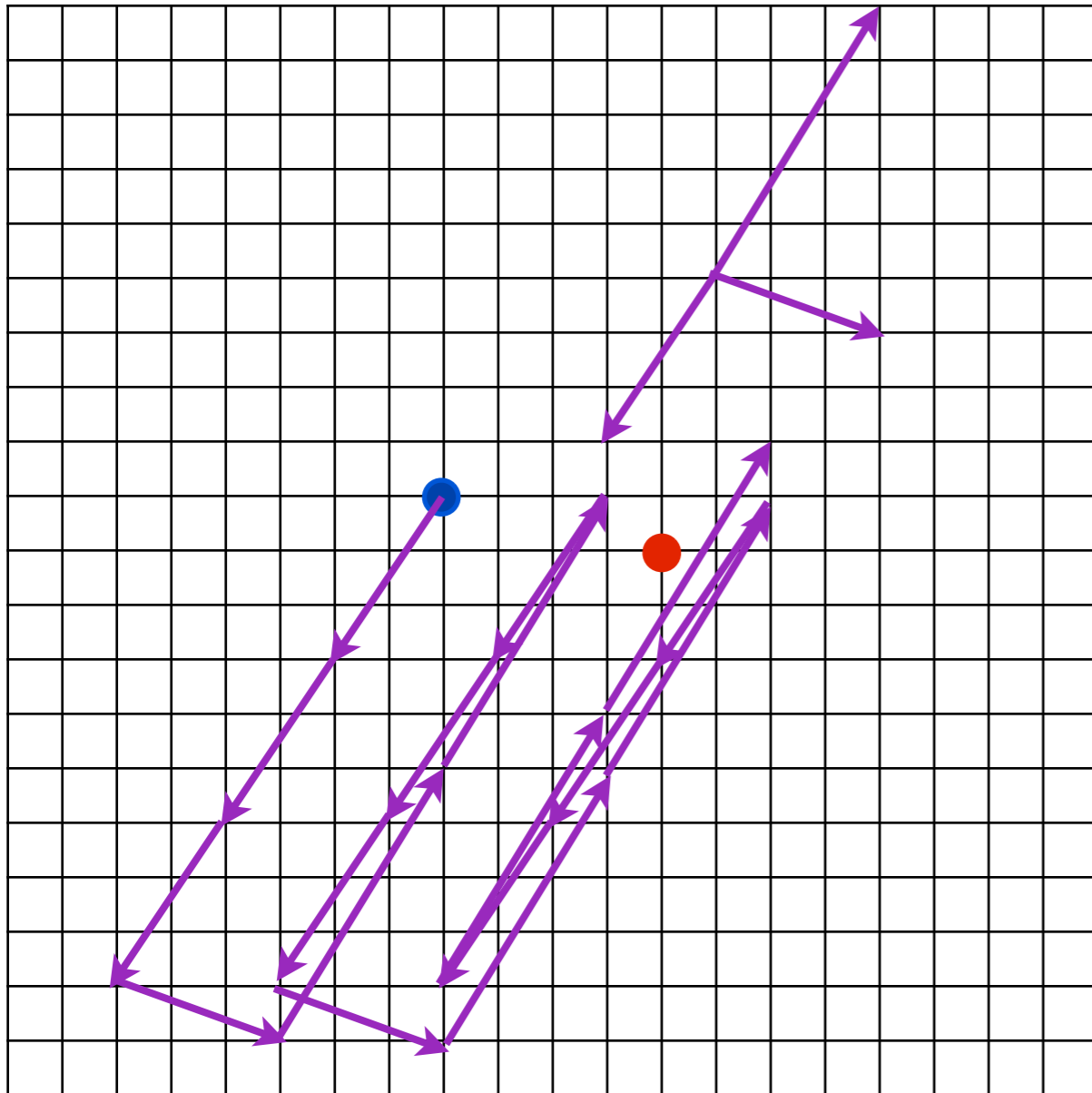
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



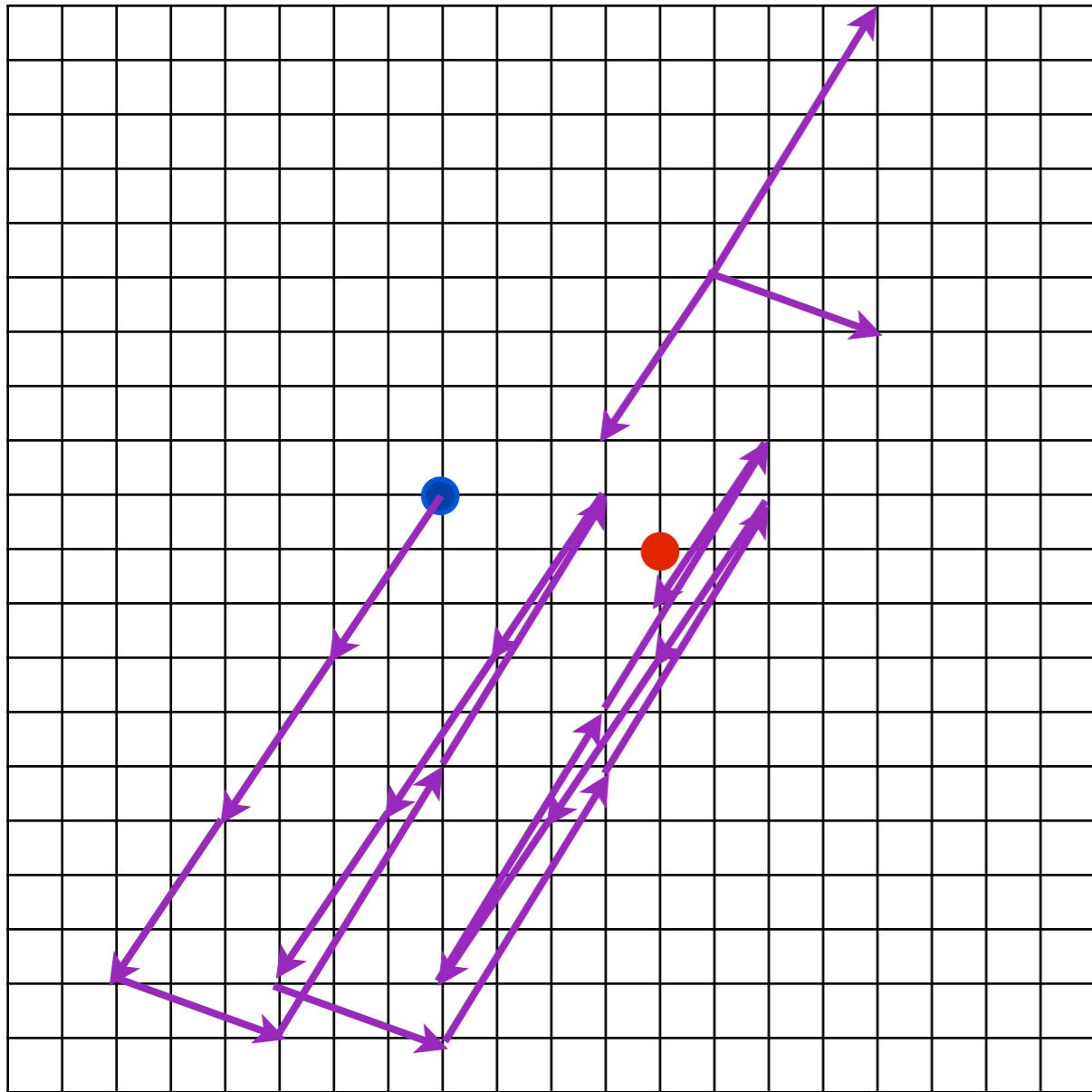
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



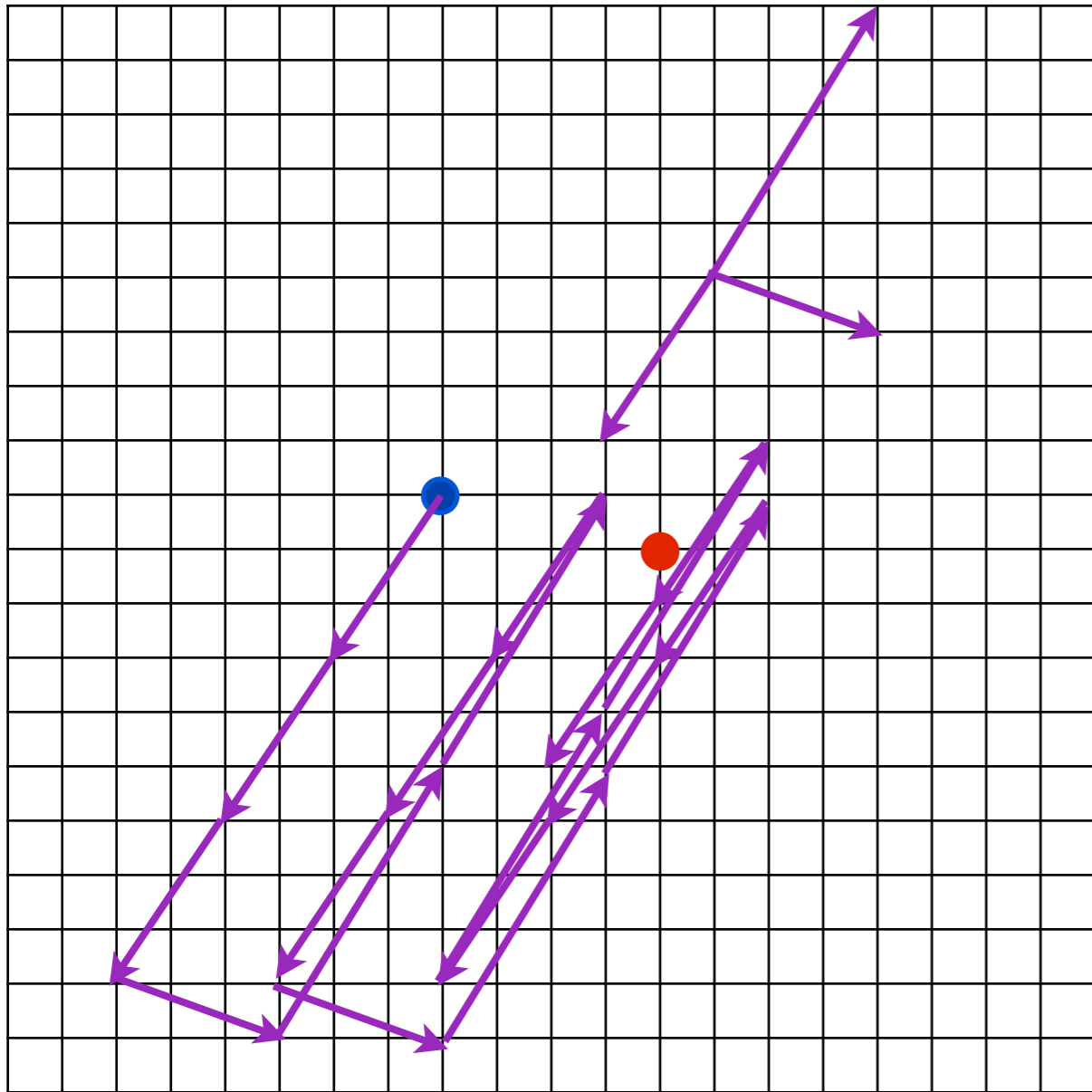
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



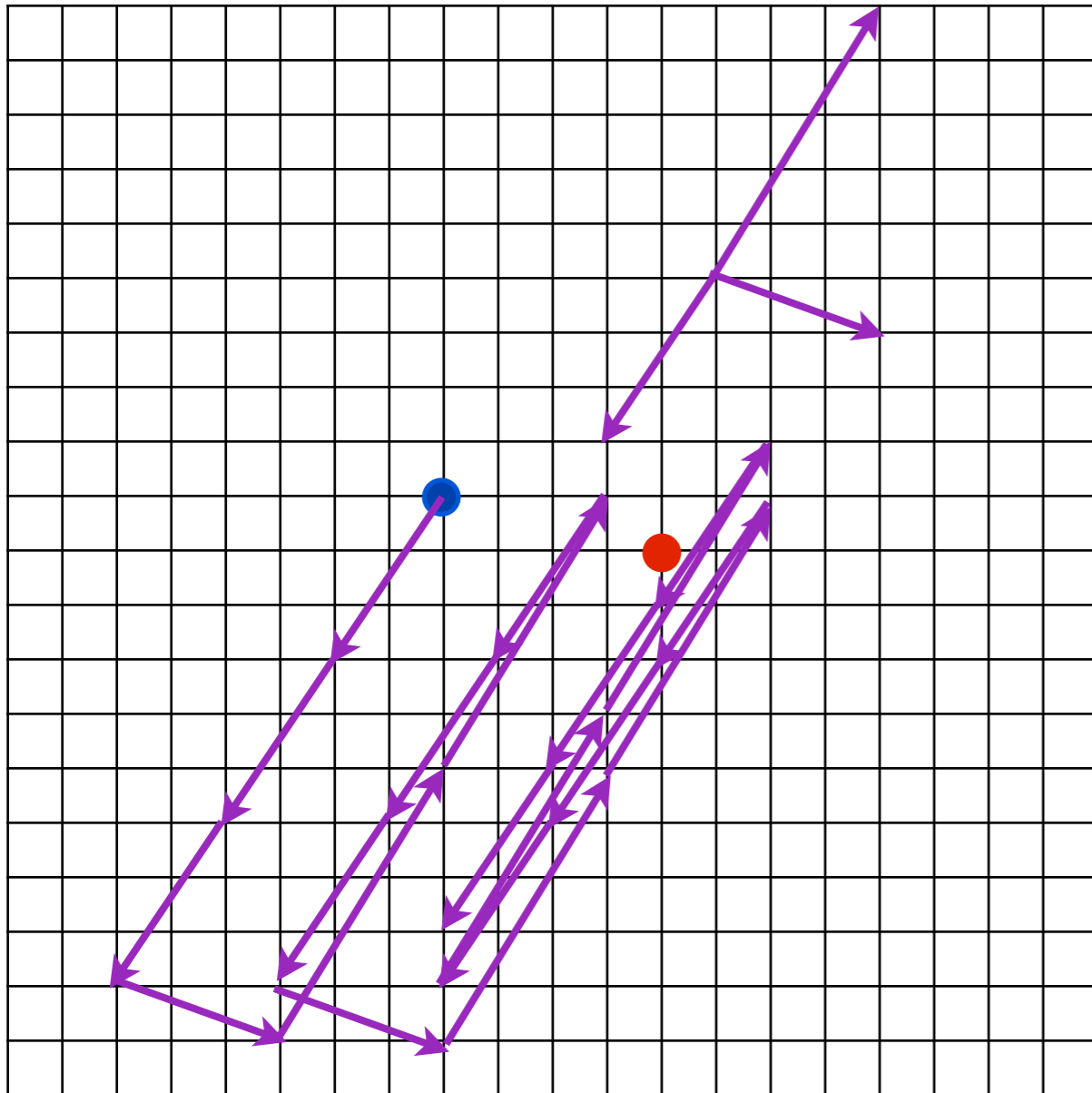
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



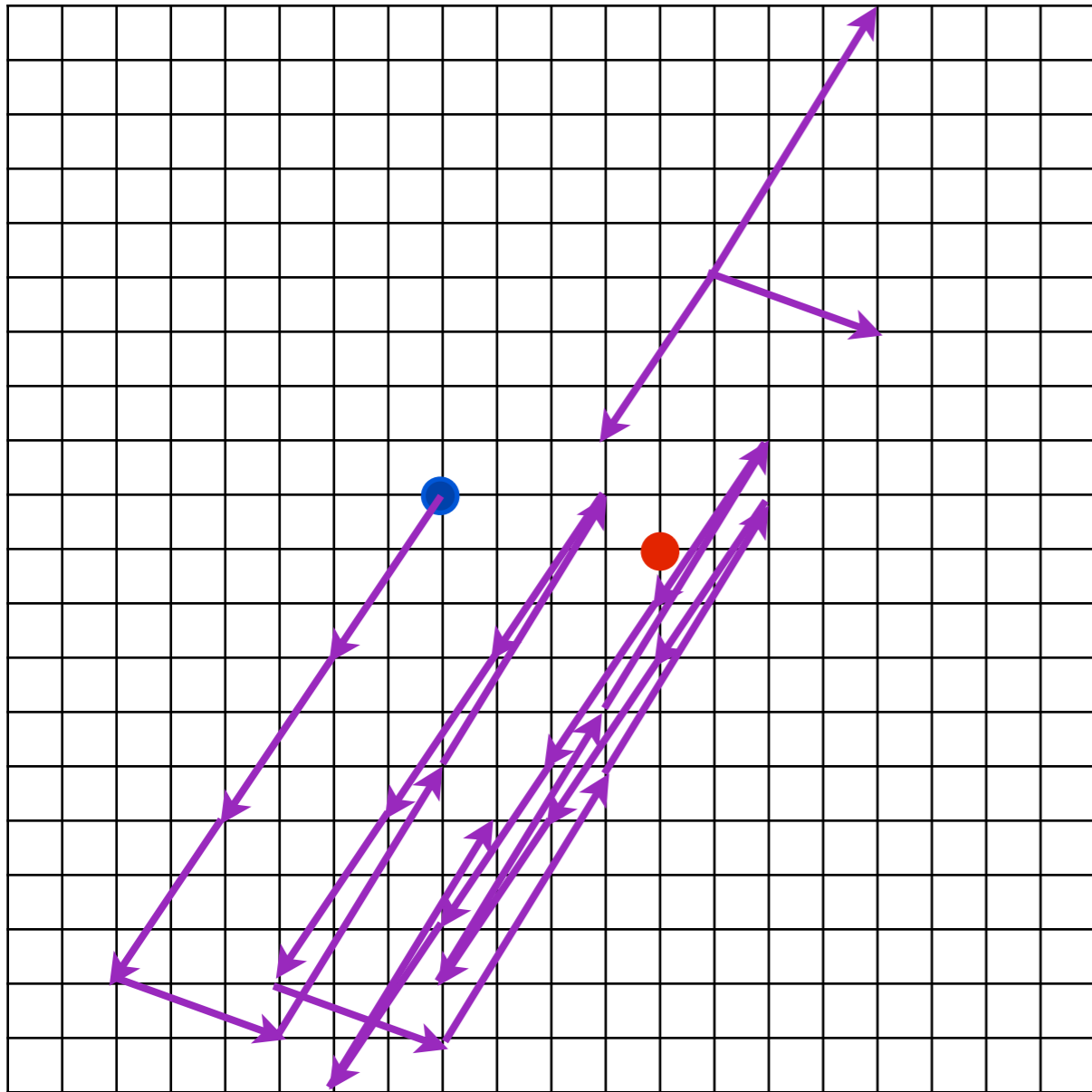
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



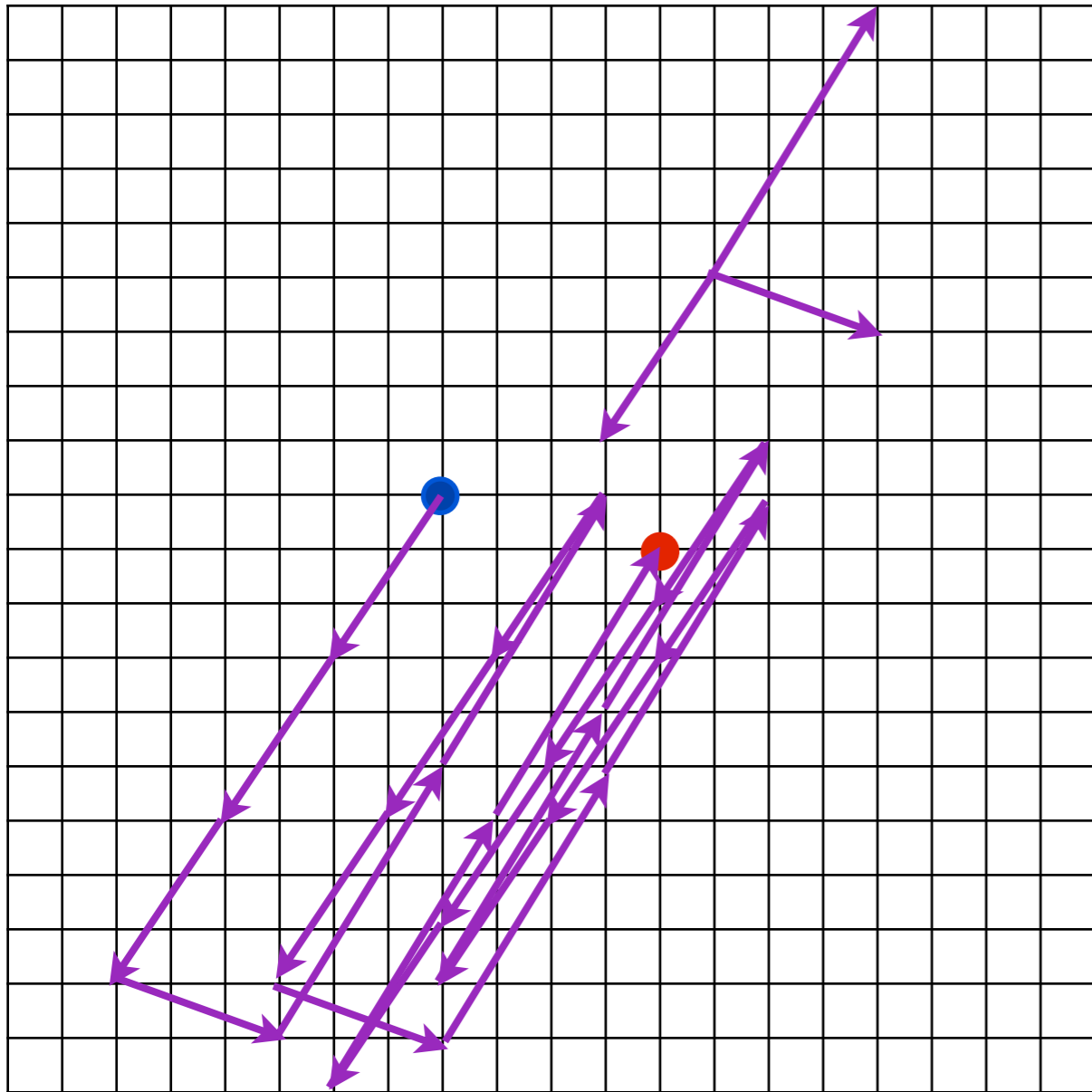
Dane:

punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dodawanie wektorów



Dane:

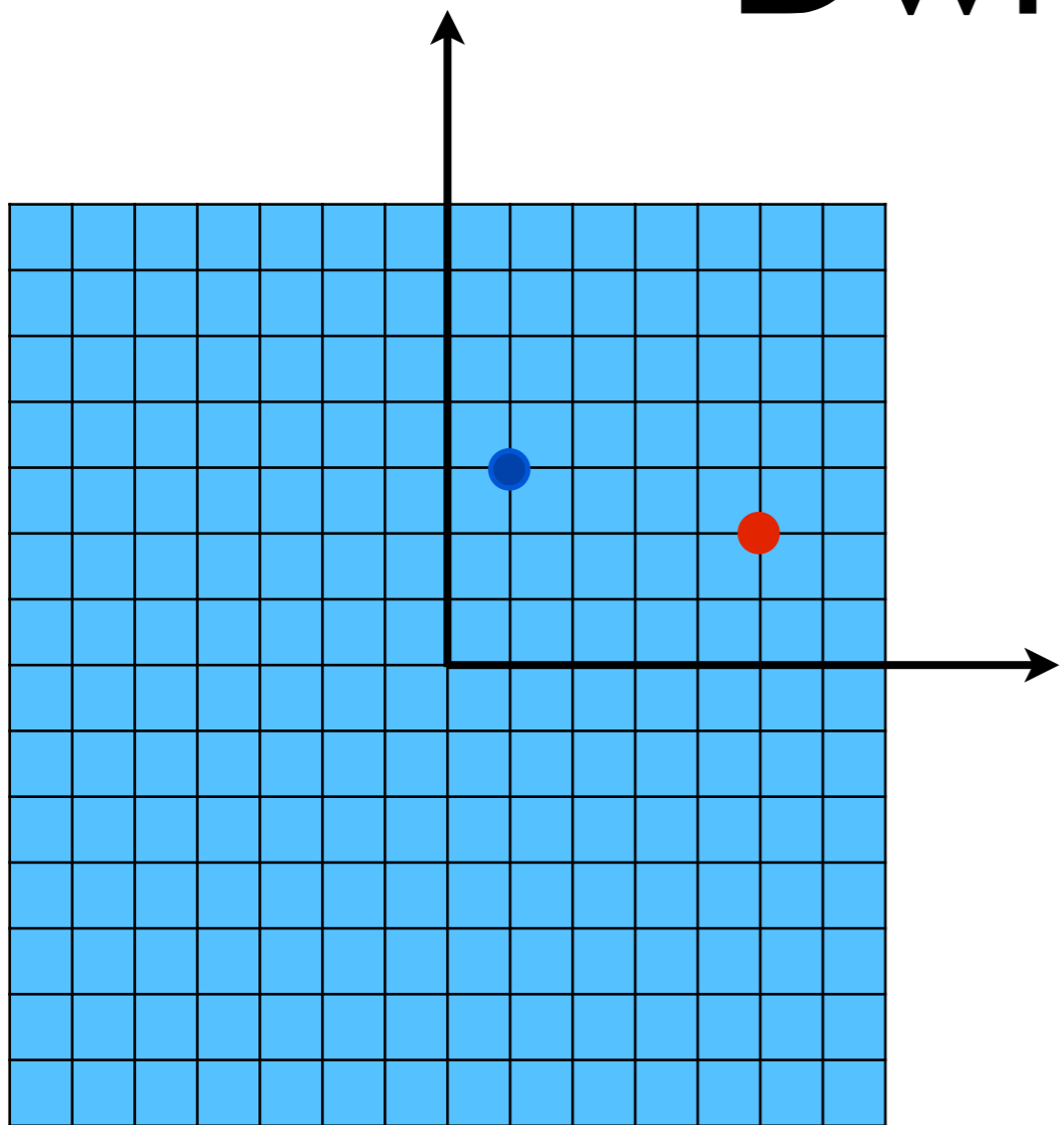
punkty **początek**, **koniec**
oraz **ruchy**

Pytanie:

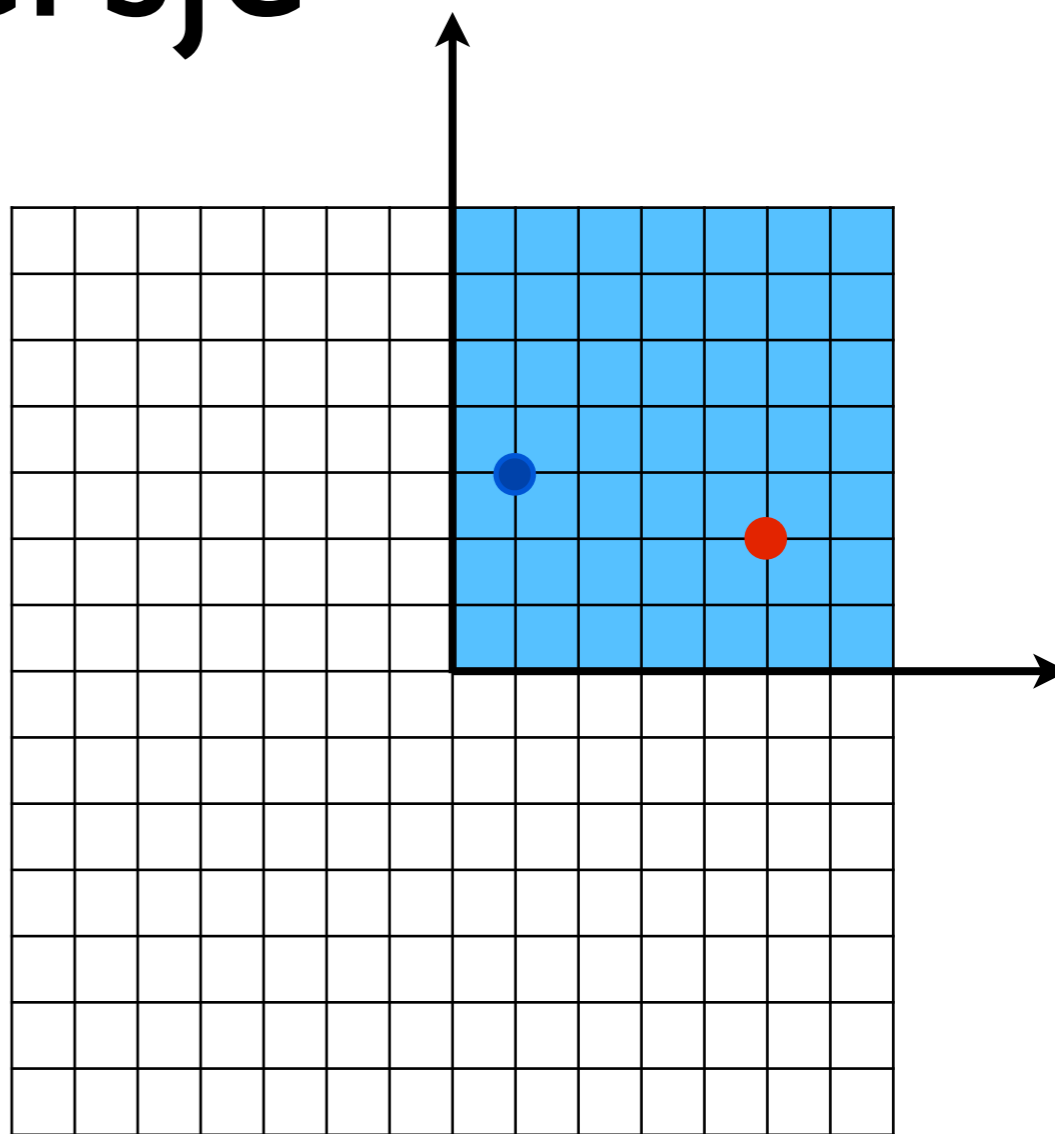
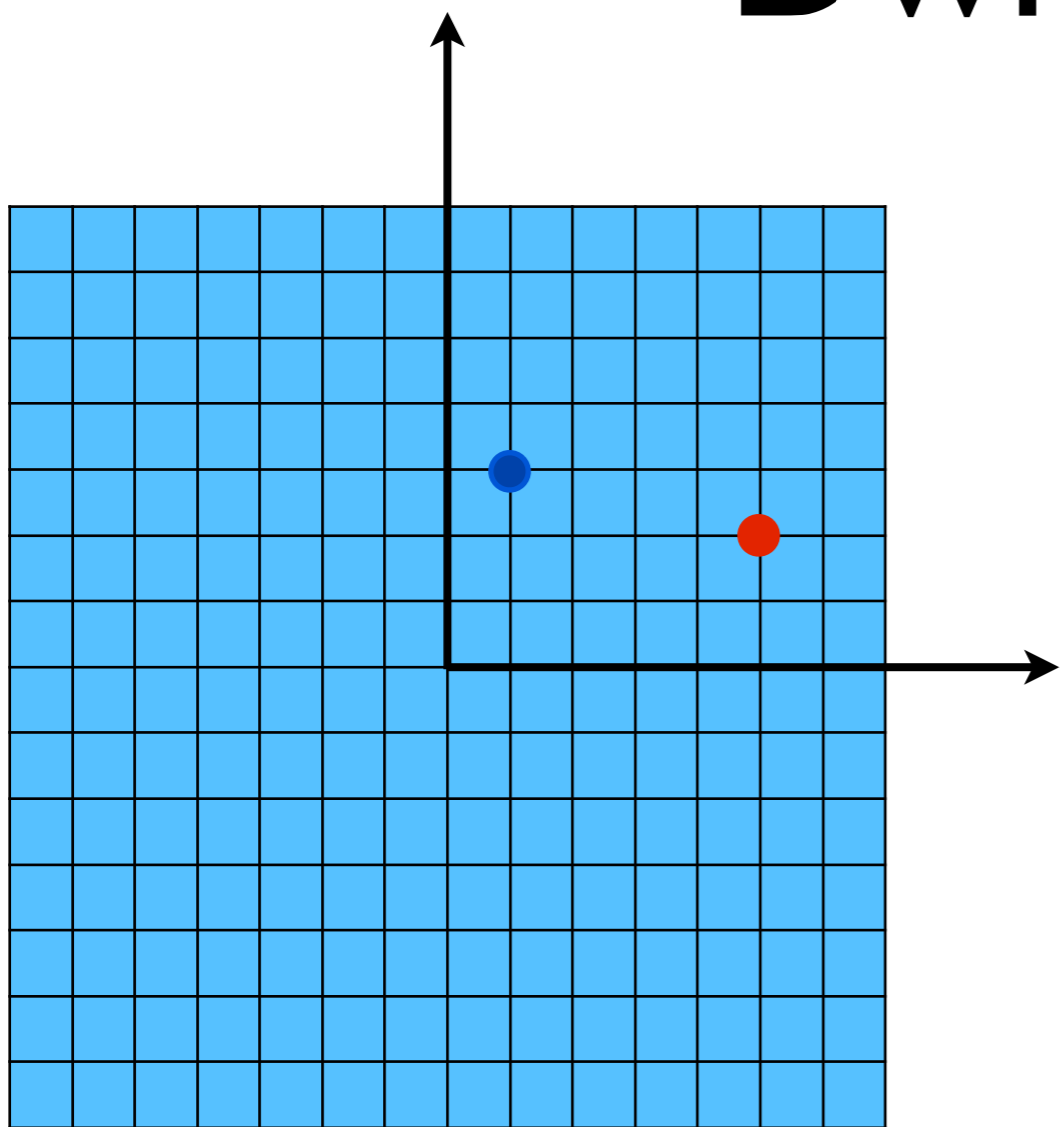
czy mogę osiągnąć **koniec**
z **początku**
używając **ruchów**?

Dwie wersje

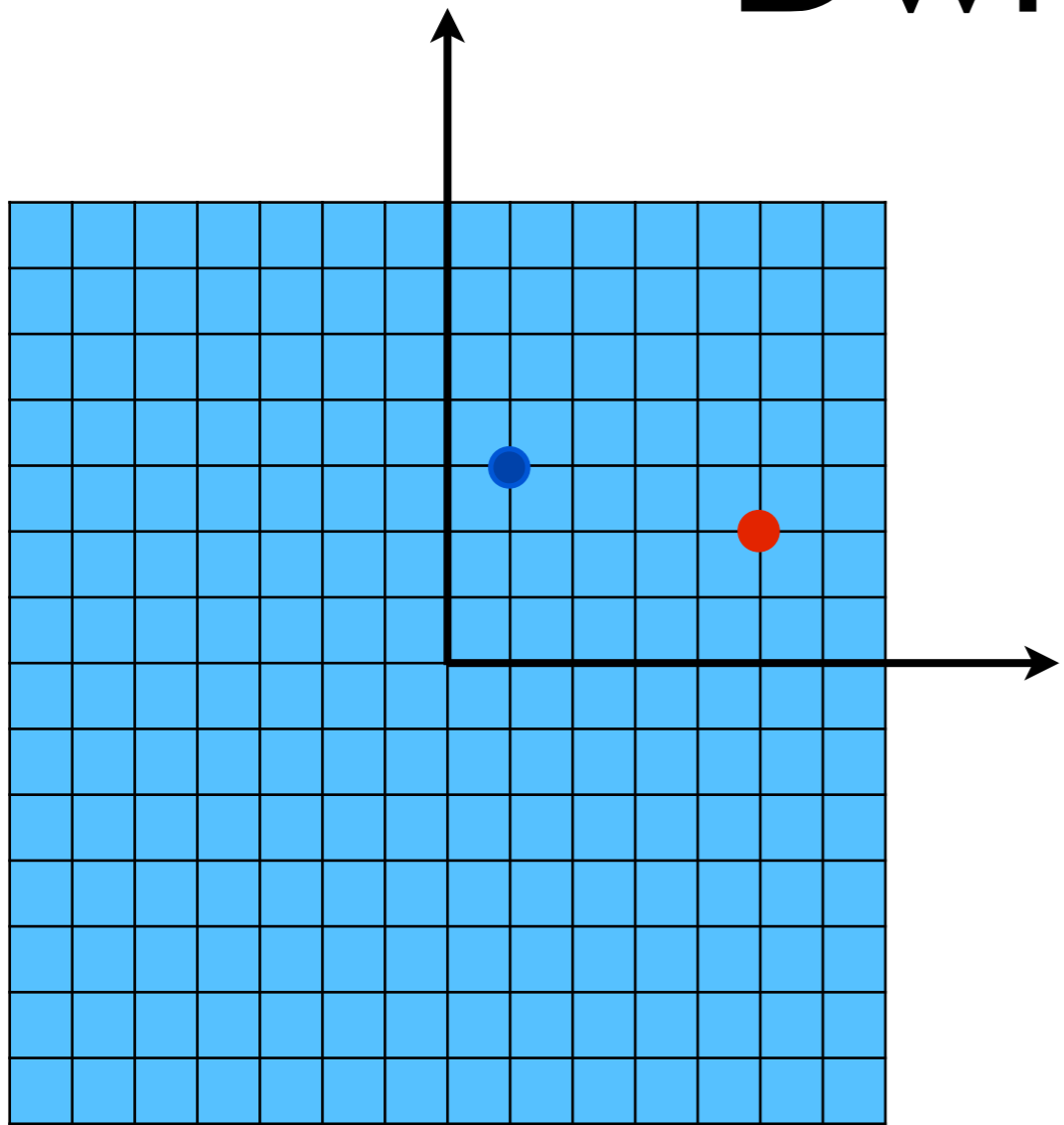
Dwie wersje



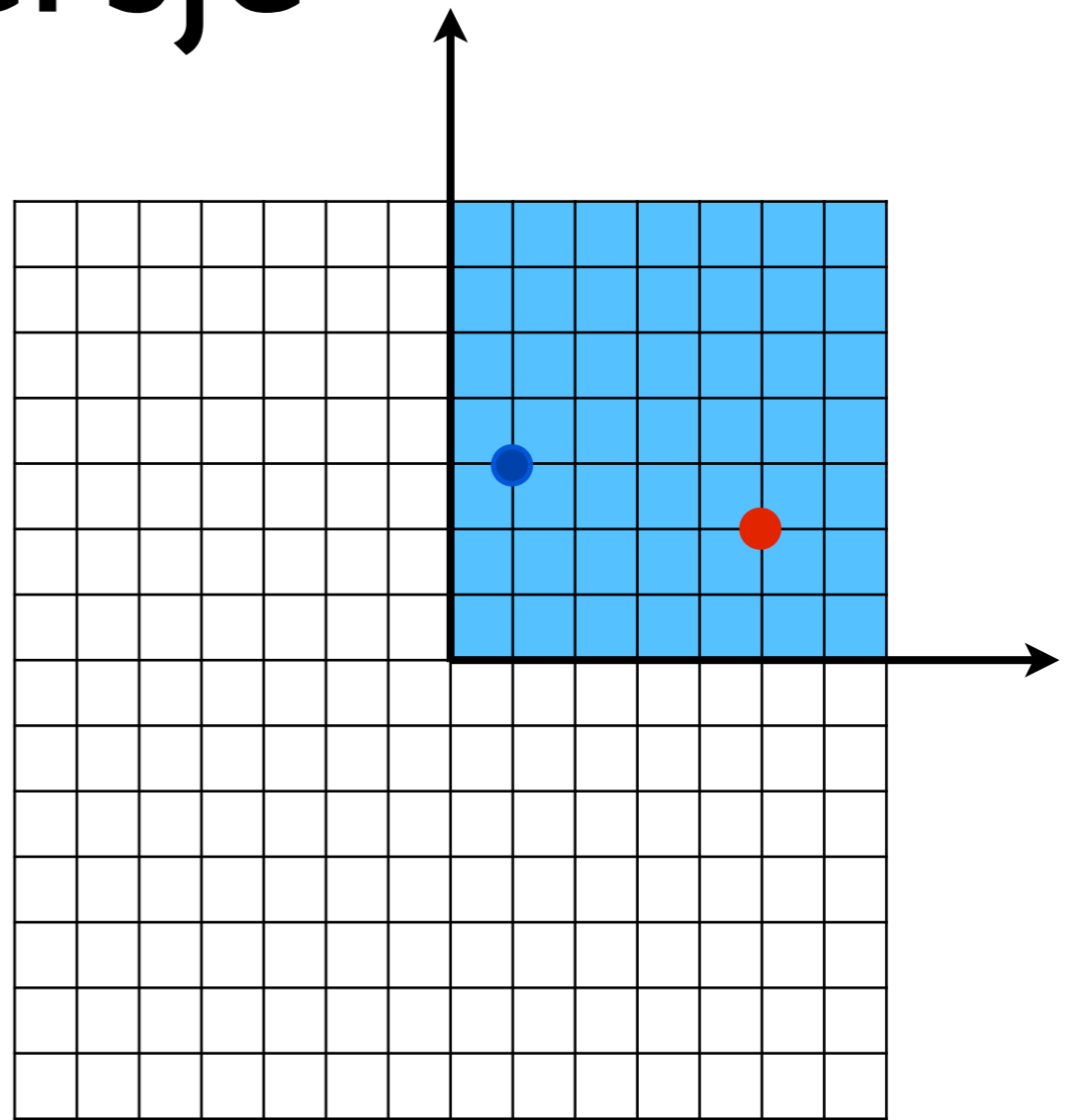
Dwie wersje



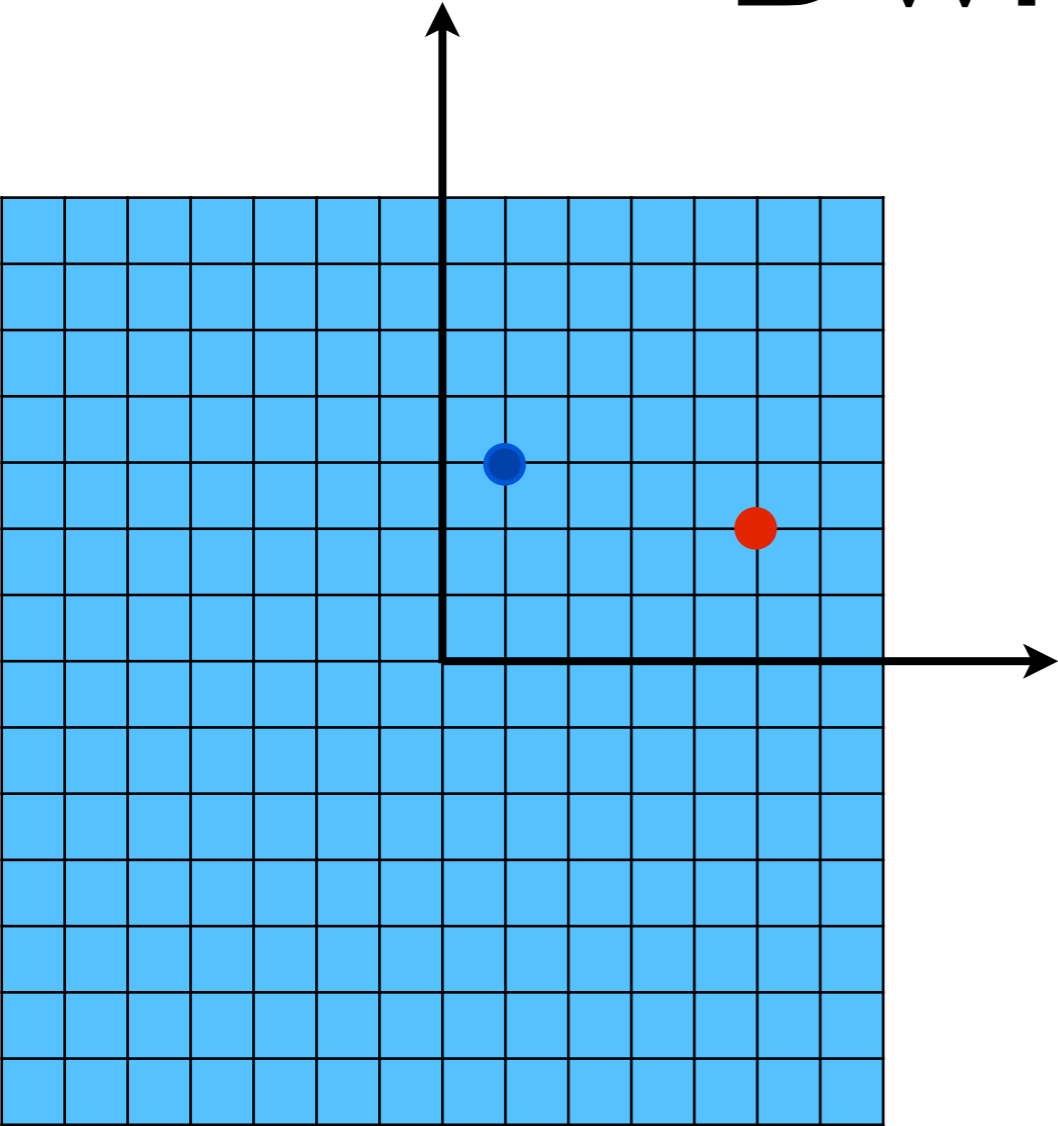
Dwie wersje



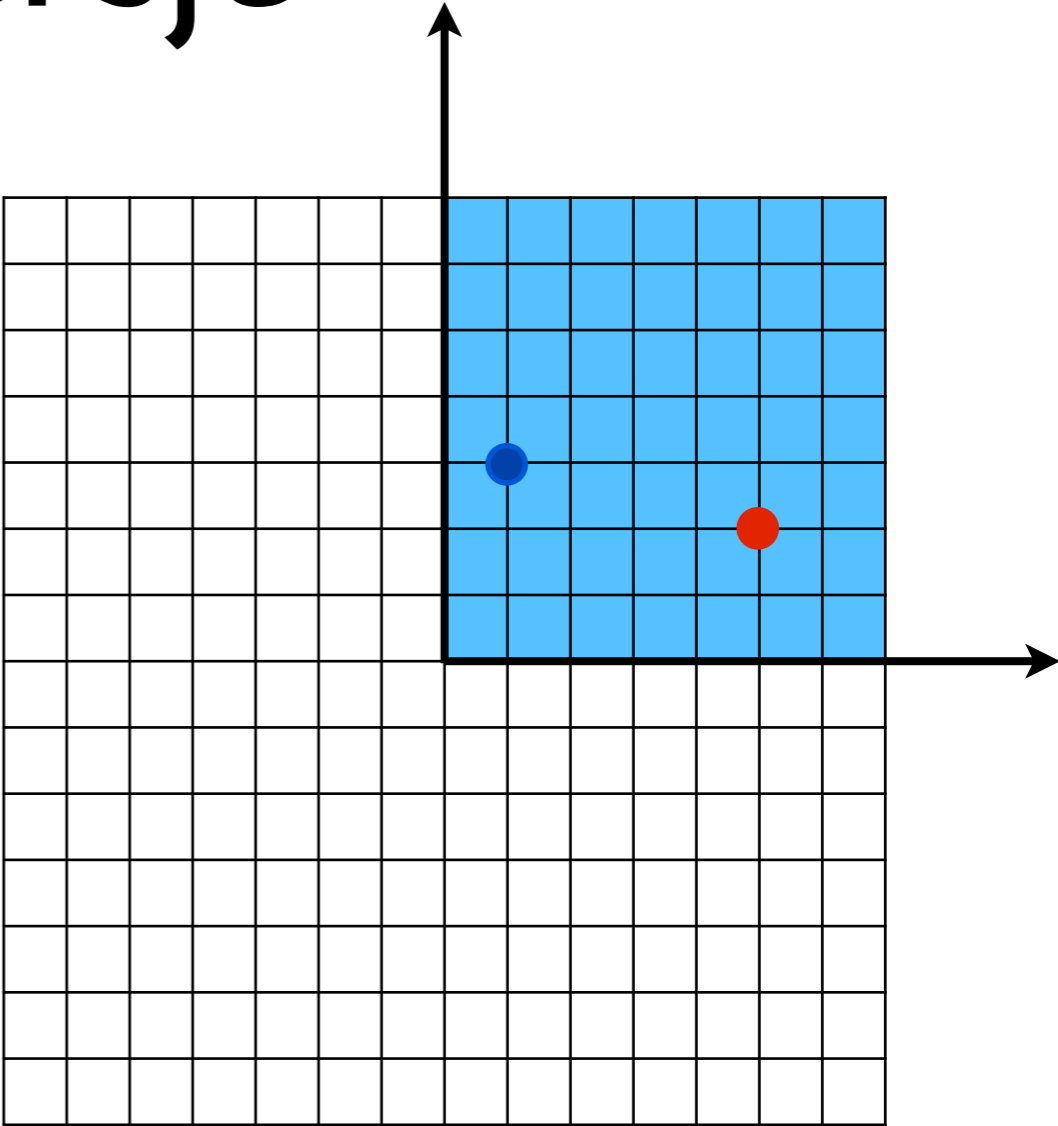
Łatwa



Dwie wersje

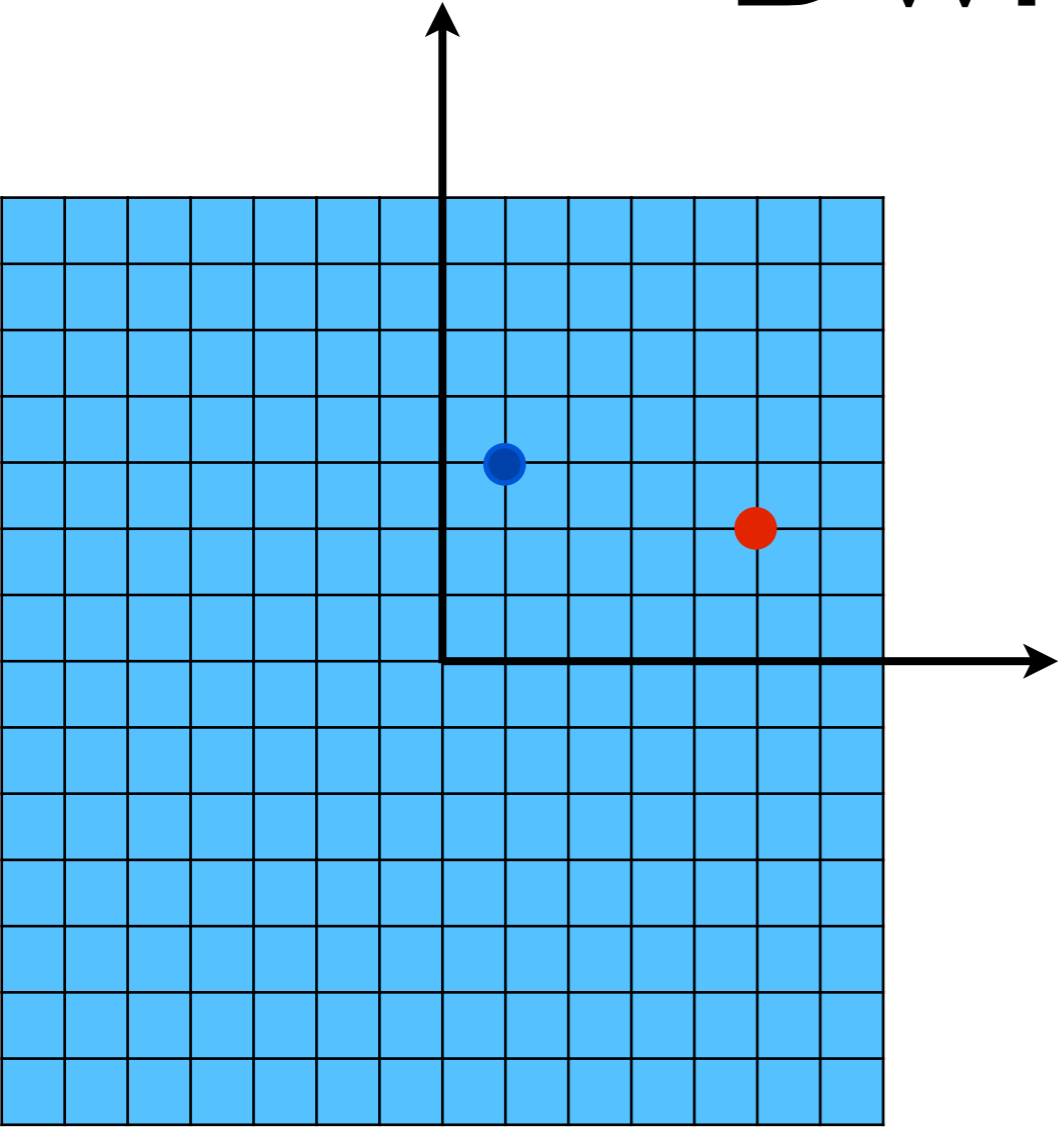


Łatwa

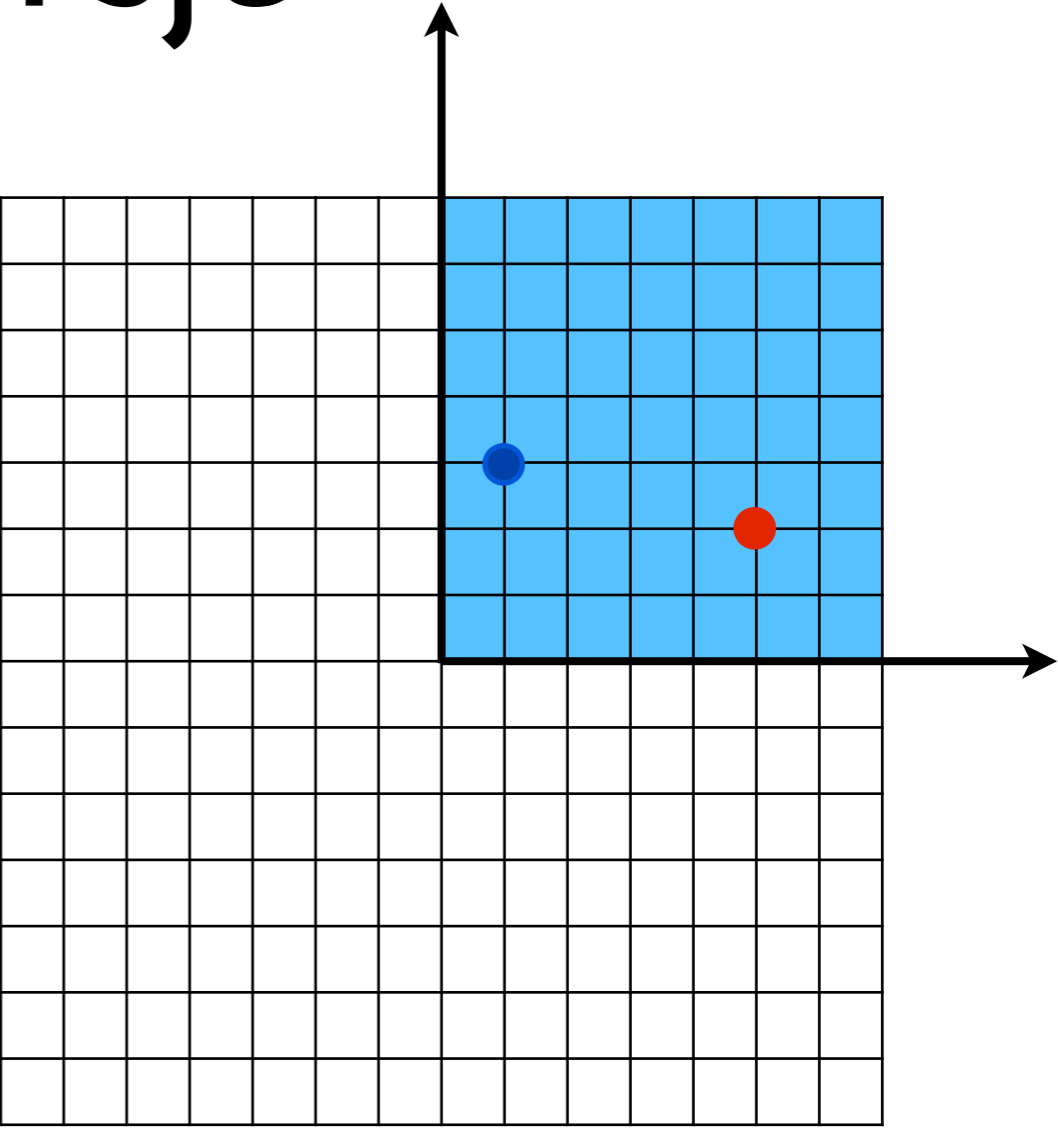


Trudna

Dwie wersje



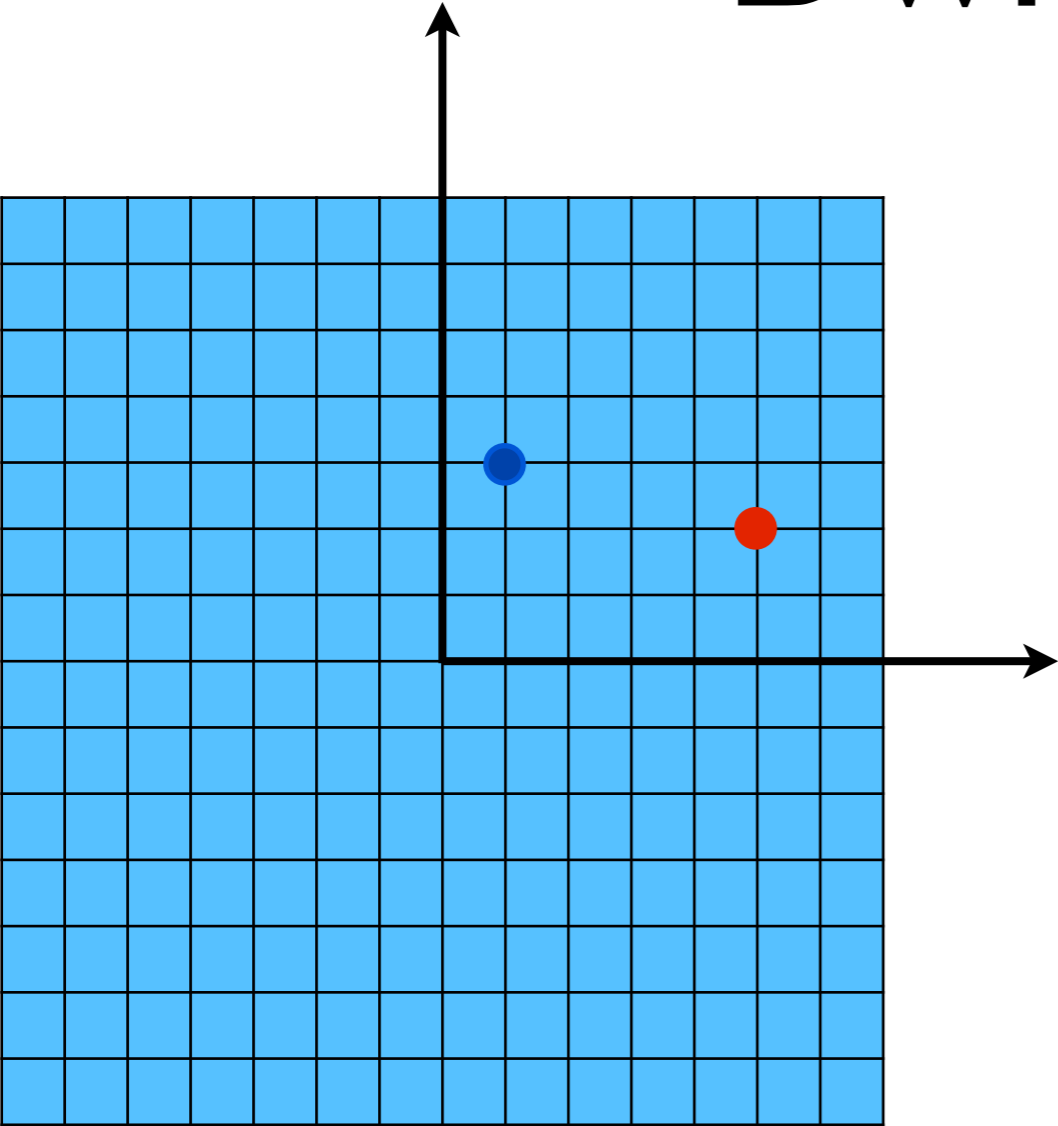
Łatwa



Trudna

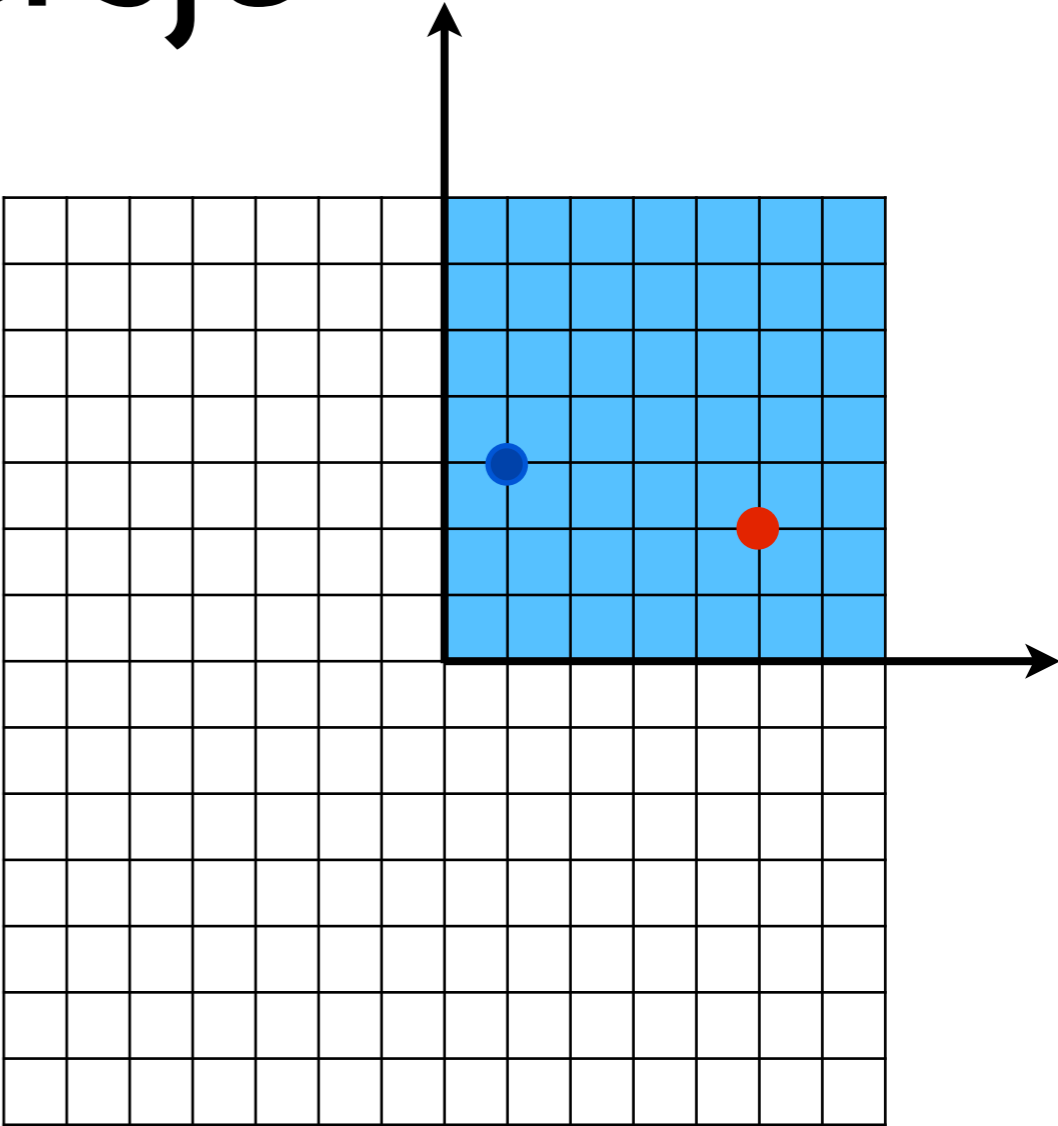
W klasie NP

Dwie wersje



Łatwa

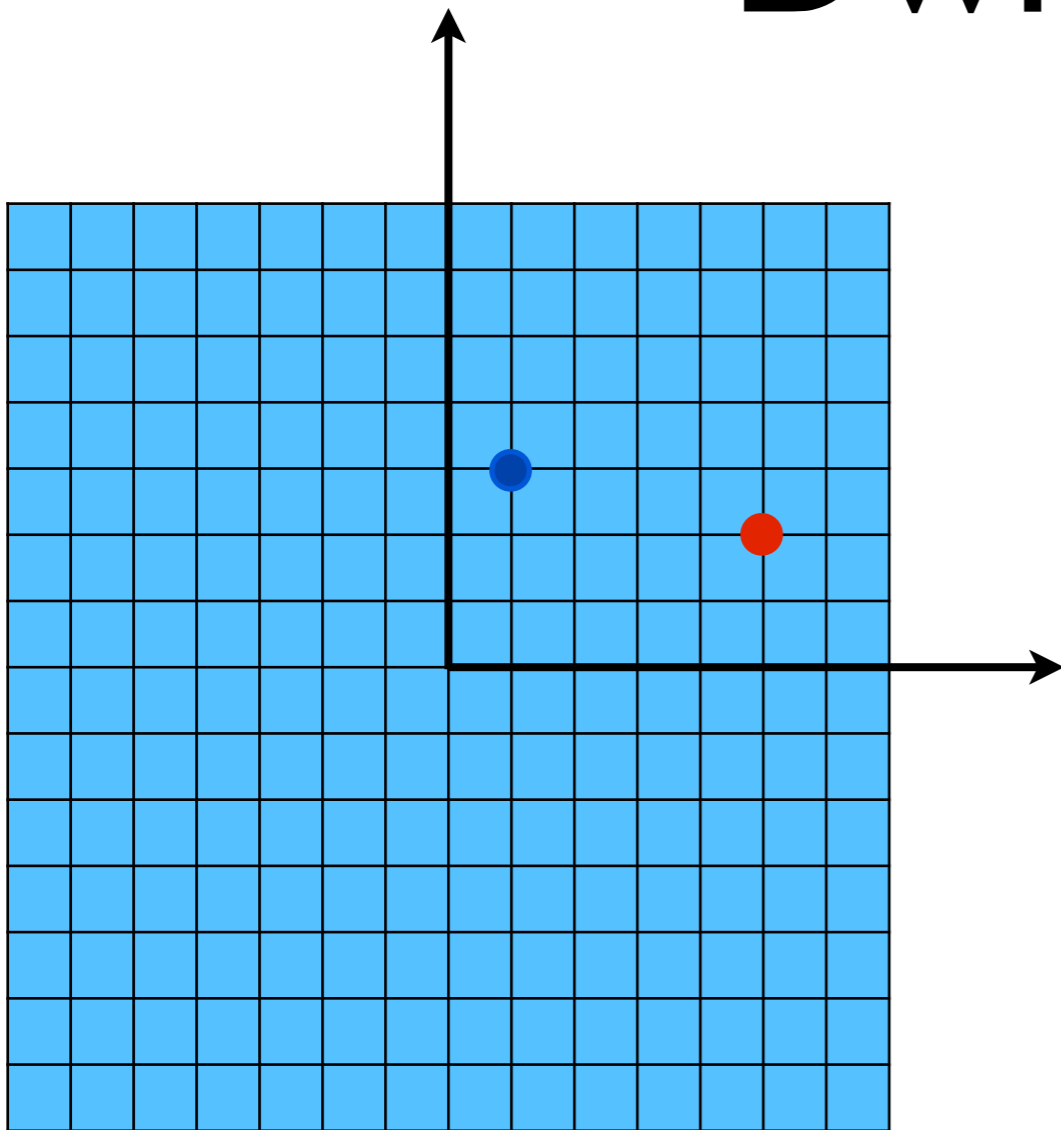
W klasie NP



Trudna

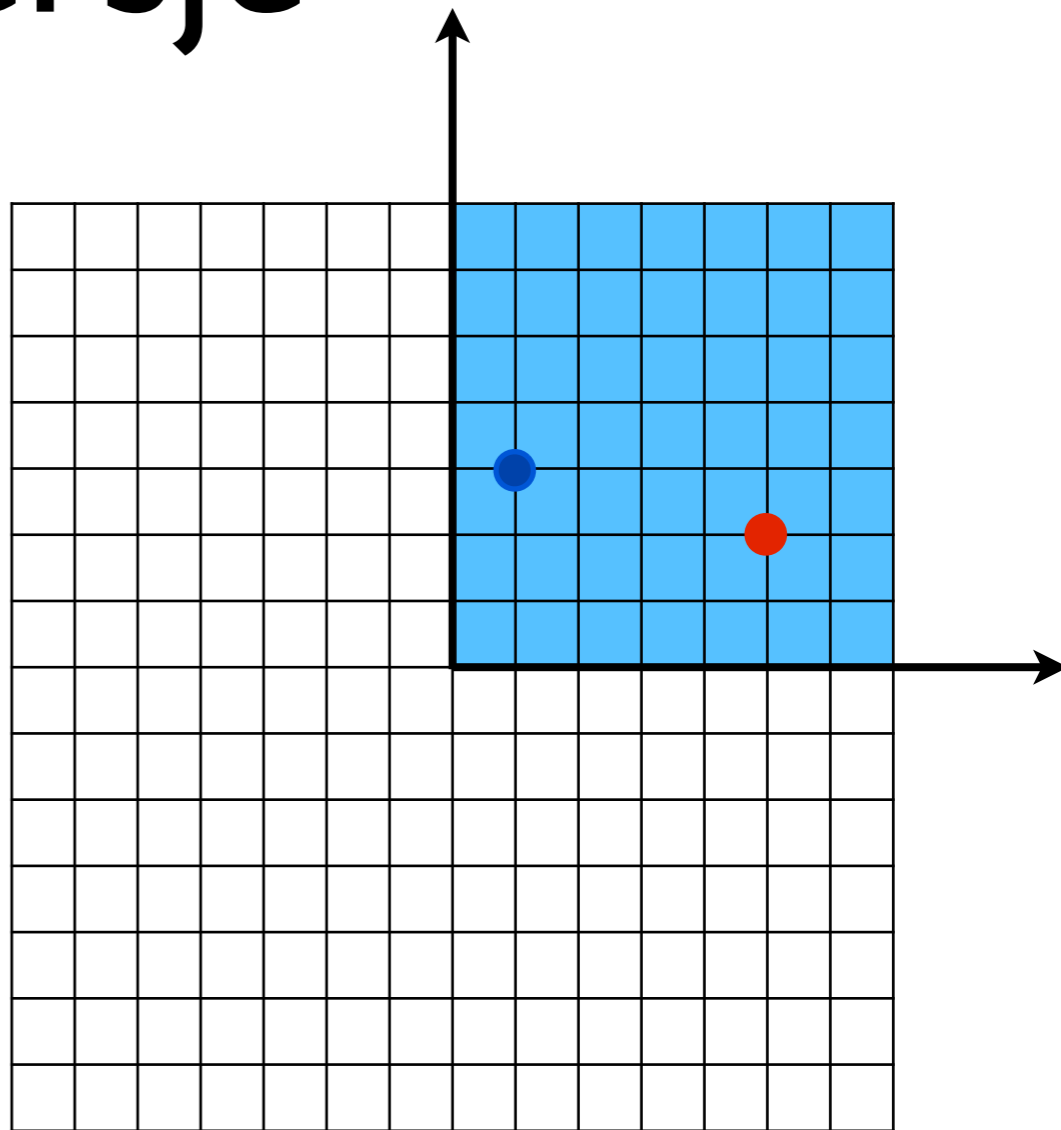
Rozstrzygalna,
Tower-trudna

Dwie wersje



Łatwa

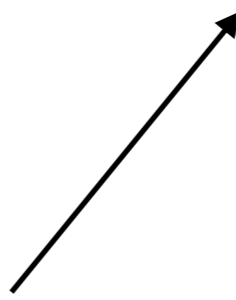
W klasie NP



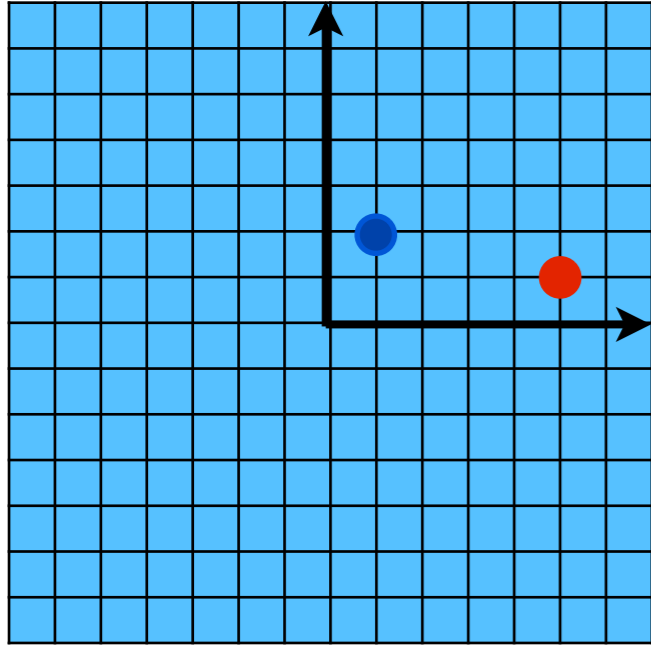
Trudna

Rozstrzygalna,
Tower-trudna

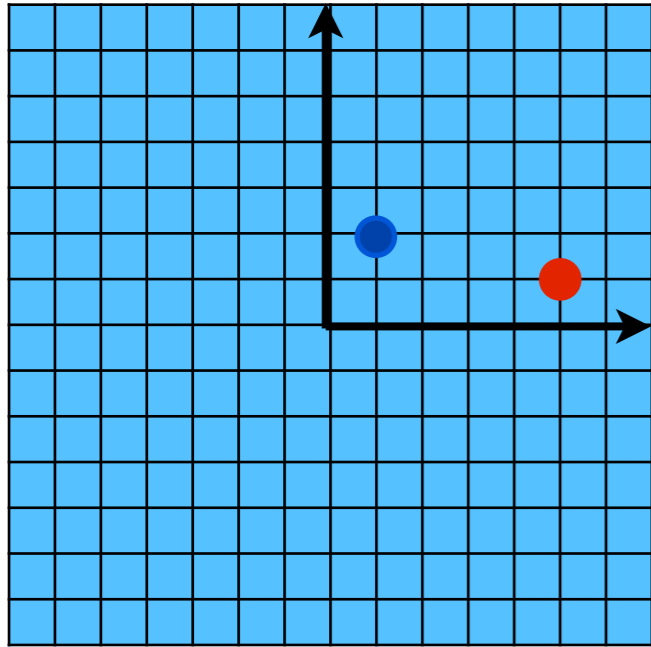
Sieci
Petriego



Osiągalność w Z^d

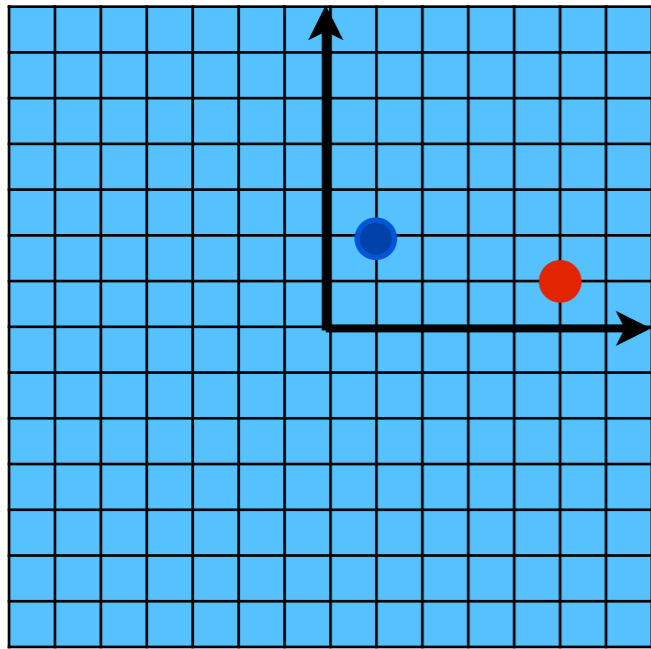


Osiągalność w Z^d



Ruchy to: $(3, 5)$, $(3, -1)$, $(-2, -3)$

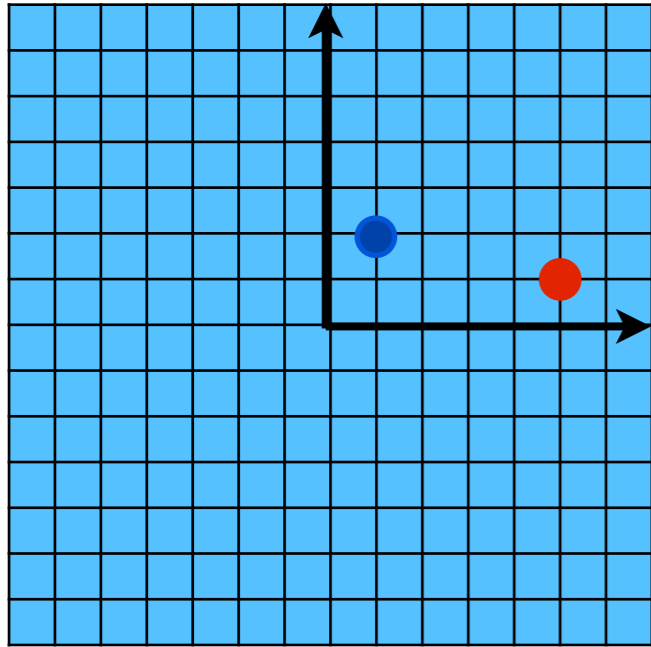
Osiągalność w Z^d



Ruchy to: $(3,5)$, $(3,-1)$, $(-2,-3)$

Koniec - Początek to: $(4,-1)$

Osiągalność w Z^d

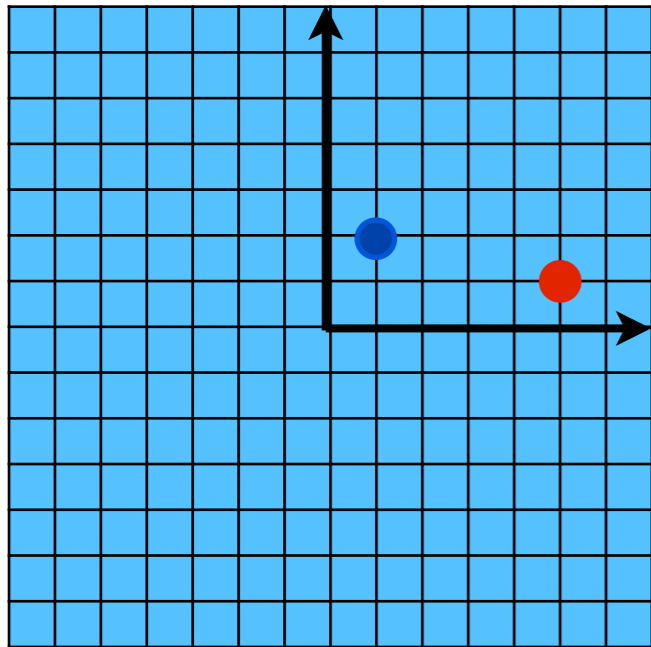


Ruchy to: $(3,5)$, $(3,-1)$, $(-2,-3)$

Koniec - Początek to: $(4,-1)$

$$a(3,5) + b(3,-1) + c(-2,-3) = (4,-1)$$

Osiągalność w \mathbb{Z}^d



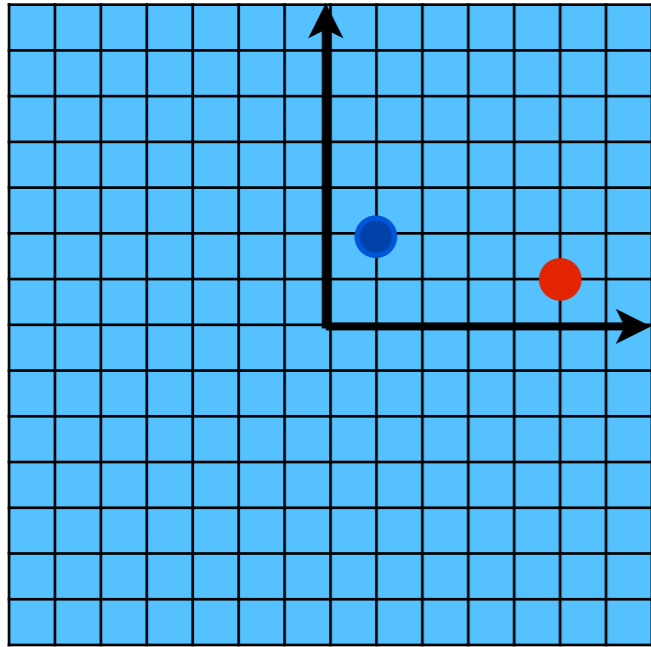
Ruchy to: $(3,5)$, $(3,-1)$, $(-2,-3)$

Koniec - Początek to: $(4,-1)$

$$a(3,5) + b(3,-1) + c(-2,-3) = (4,-1)$$

Wystarczy rozwiązać
układ równań liniowych w liczbach naturalnych

Osiągalność w \mathbb{Z}^d



Ruchy to: $(3,5)$, $(3,-1)$, $(-2,-3)$

Koniec - Początek to: $(4,-1)$

$$a(3,5) + b(3,-1) + c(-2,-3) = (4,-1)$$

Wystarczy rozwiązać
układ równań liniowych w liczbach naturalnych

$$a = 8, b = 2, c = 13$$

Zagadka

Zagadka

Dane wektory u_1, u_2, \dots, u_n w \mathbb{R}^d o sumie 0

Zagadka

Dane wektory u_1, u_2, \dots, u_n w \mathbb{R}^d o sumie 0

Normy ograniczone przez 1

Zagadka

Dane wektory u_1, u_2, \dots, u_n w \mathbb{R}^d o sumie 0

Normy ograniczone przez 1

Czy istnieje stała C_d taka, że zawsze możemy zrobić wycieczkę (z 0 do 0) używając wektorów u_1, u_2, \dots, u_n taką żeby zawsze być C_d -blisko zera?

Lemat Steinitza (1914)

Lemat Steinitza (1914)

Dla każdego d istnieje stała C_d taka, że zawsze możemy zrobić wycieczkę (z 0 do 0) używając wektorów u_1, u_2, \dots, u_n taką żeby zawsze być C_d -blisko zera?

Lemat Steinitza (1914)

Dla każdego d istnieje stała C_d taka, że zawsze możemy zrobić wycieczkę (z 0 do 0) używając wektorów u_1, u_2, \dots, u_n taką żeby zawsze być C_d -blisko zera?

Jak duża jest C_d ?

Lemat Steinitza (1914)

Dla każdego d istnieje stała C_d taka, że zawsze możemy zrobić wycieczkę (z 0 do 0) używając wektorów u_1, u_2, \dots, u_n taką żeby zawsze być C_d -blisko zera?

Jak duża jest C_d ?

Borgström 1931 $C_d \leq \sqrt{(4^d + 1)}/3$

Lemat Steinitza (1914)

Dla każdego d istnieje stała C_d taka, że zawsze możemy zrobić wycieczkę (z 0 do 0) używając wektorów u_1, u_2, \dots, u_n taką żeby zawsze być C_d -blisko zera?

Jak duża jest C_d ?

Borgström 1931 $C_d \leq \sqrt{(4^d + 1)}/3$

Sevastyanow 1978 $C_d \leq d$

Dowód

Dowód

Lemat

Istnieją zbiory $A_d \subseteq A_{d+1} \subseteq \dots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = \{1, \dots, n\}$

oraz wagi $\lambda_{i_k}^i$ dla $1 \leq i \leq n$, $d \leq k \leq n$ takie, że:

(1) rozmiar A_k to k ,

(2) $0 \leq \lambda_{i_k}^i \leq 1$

(3) $\sum_{i \in A_k} \lambda_{i_k}^i = d$

(4) $\sum_{i \in A_k} \lambda_{i_k}^i u_i = \sum_{i \in A_k} u_i$

Wniosek

Wniosek

Jeśli u_1, u_2, \dots, u_n należą do \mathbb{R}^d oraz dla każdego i mają normy ograniczone przez M , to istnieje taka ich permutacja $u_{i_1}', u_{i_2}', \dots, u_{i_n}'$ że podróż z 0 do $\sum u_i$ odbywa się wewnątrz tunelu między 0 do $\sum u_i$ o szerokości $4dM$.

Równania liniowe

Równania liniowe

Rozważmy układ n równań liniowych o współczynnikach całkowitych $Mx = y$, gdzie M jest macierzą $n \times d$, a y wektorem z Z^d . Niech N to maksimum z norm M oraz y . Wówczas istnieje rozwiązanie układu w liczbach naturalnych o normie nie większej niż $(5dN+1)^d$

Dziękuję!