

Teoria węzłów - młoda klasyka, zmiany, zmiany, zmiany...

P.Traczyk@mimuw.edu.pl

21 February 2020

Ten odczyt jest poświęcony teorii węzłów. Teoria węzłów jako prawdziwa matematyka jest bardzo młoda — pojawiła się może ze 150 lat temu. Poniżej zamieszczam obrazek węzła, żeby było wiadomo o czym mowa.

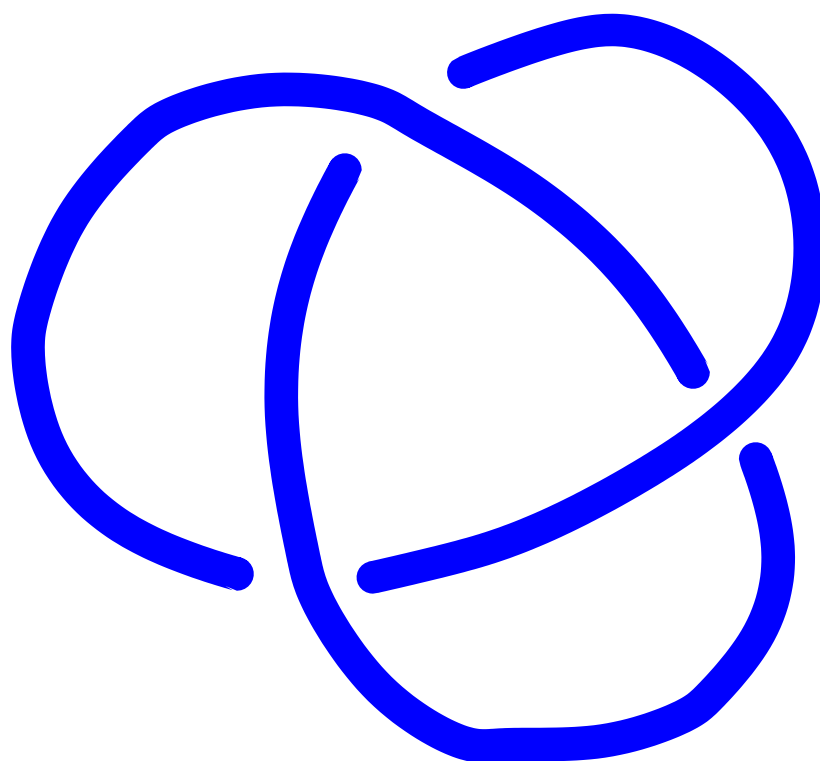


figure WDCK1

Ten węzeł jest nietrywialny, to znaczy nie da się go przerobić na zwykły okrąg bez oszukiwania, to znaczy samym tylko deformowaniem, ale bez rozcinania chociaż na chwilę. Czyli: to jest węzeł nietrywialny — nie jest taki, jak węzeł trywialny, czyli zwykły okrąg. Ale za to jest taki jak drugi węzeł, pokazany poniżej.

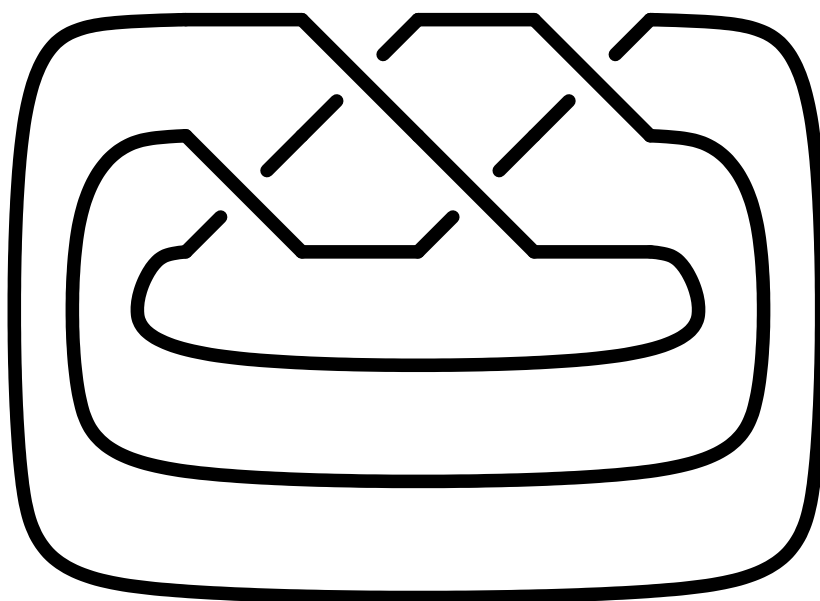


figure WDCK2

Tak zwykle rysujemy węzły — w postaci takich diagramów, które przedstawiają rzut węzła na odpowiednią płaszczyznę, ale z zaznaczeniem, co jest wyżej, a co niżej w skrzyżowaniu. Istnieje piękne twierdzenie, które mówi, kiedy dwa diagramy reprezentują równoważne węzły: wtedy gdy można jeden diagram przerobić na drugi, za pomocą ciągu tzw. ruchów Reidemeistera:

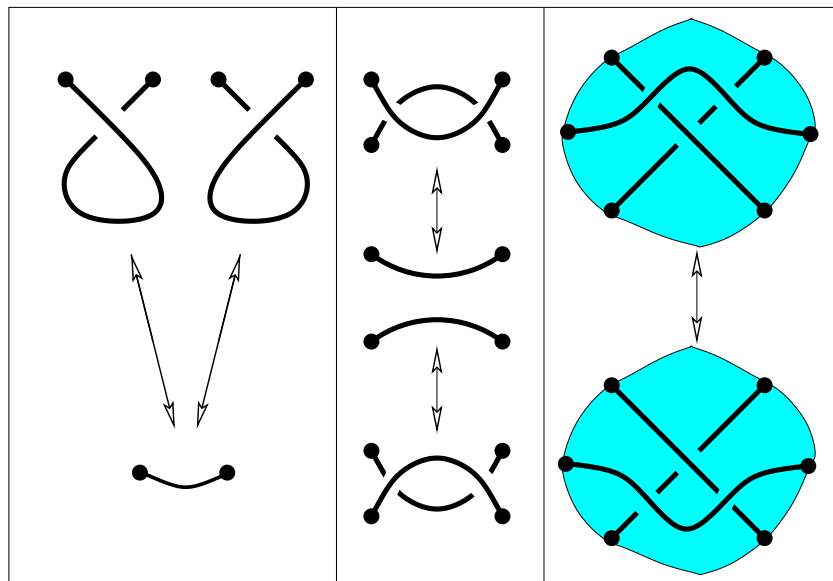


figure WDCK3

Przez długie lata podstawowym narzędziem teorii węzłów była topologia algebraiczna. Bardziej konkretnie: dla danego węzła K możemy rozpatrywać grupę podstawową dopełnienia węzła. Jeżeli rozpatrujemy ten sam węzeł, chociaż podany w jakiś sposób taki, że tego nie widać, to grupa podstawowa powinna wyjść ta sama. Jeżeli wychodzi inna, to węzły są różne.

Ale: w pewnym momencie 1984 nastąpiła rewolucyjna zmiana: pojawił się wielomian Jonesa, współcześnie bardziej znany w postaci, jaką mu nadał Kauffman. Na następnym obrazku pokazane są reguły definiujące wielomian Jonesa w wersji Kauffmana. Tak naprawdę, to rysunek opisuje nawias Kauffmana, coś co się minimalnie technicznie różni od wielomianu Jonesa w wersji Kauffmana. Nawias Kauffmana $\langle D \rangle$ przypisuje niezorientowanemu diagramowi D wielomian Laurenta o współczynnikach całkowitych, według następujących reguł:

$$1. \langle \bigcirc \rangle = 1$$

$$2. \langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle + A^{-1} \langle \text{cup-cap} \rangle$$

$$3. \langle \text{D} \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle \text{D} \rangle$$

figure WDCK4

Wystarczy spojrzeć na zasadę rekurencji podaną powyżej, żeby zobaczyć, że to się zawsze da policzyć, bo po skończonej liczbie kroków zawsze dojdziemy do diagramu, który już nie ma żadnych skrzyżowań, co oznacza, że jego nawias Kauffmana jest zdeterminowany przez ostatnią regułę (wychodzi $(-A^{-2} - A^2)^{c-1}$, gdzie c oznacza liczbę składowych w końcowym obrazku).

Te końcowe diagramy bez skrzyżowań to są tak zwane stany. Na przykład dla trójlistnika:

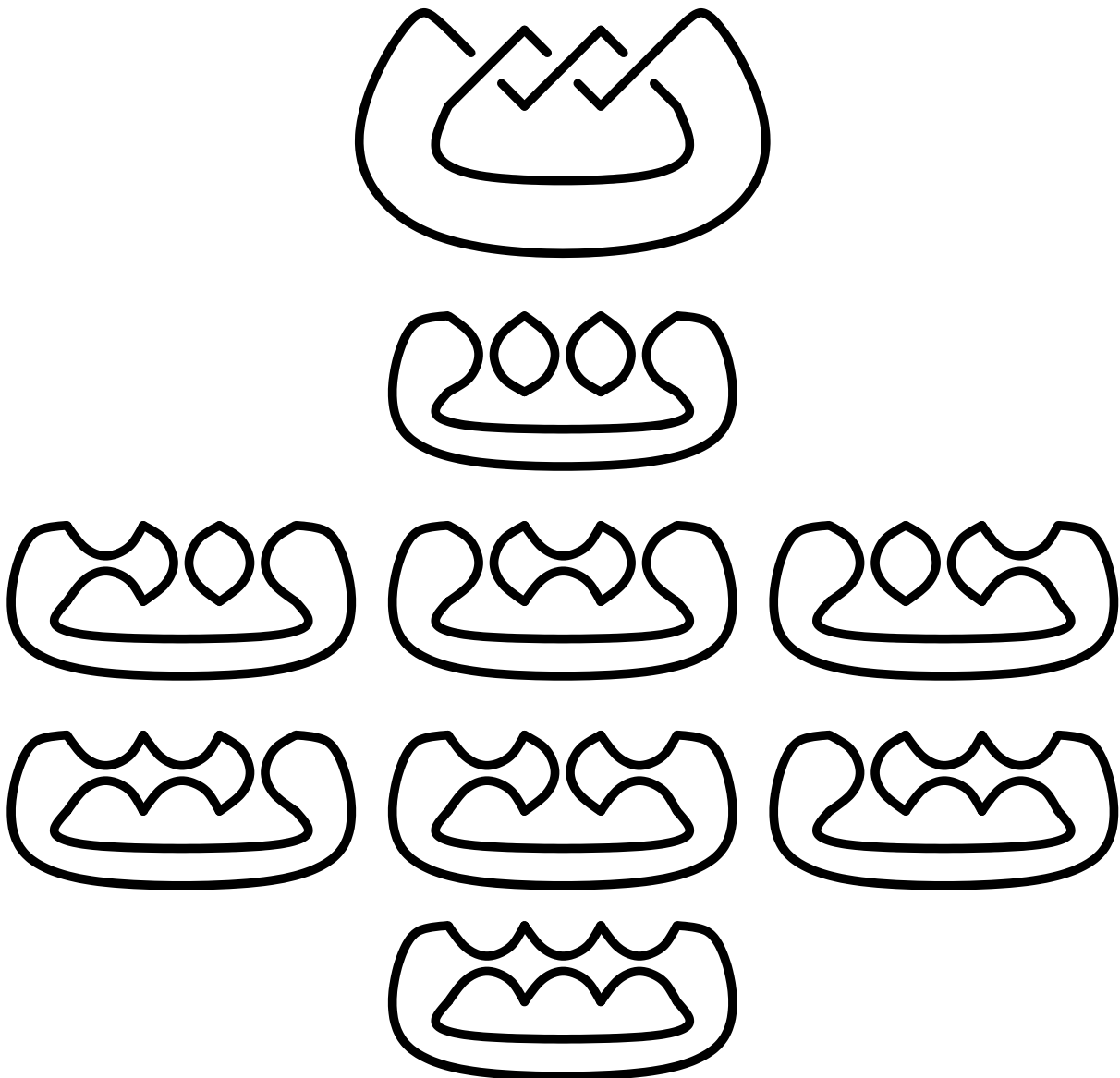


figure WDCK5

Tak zdefiniowany nawias Kauffmana jest niezmienniczy ze względu na ruchy Reidemeistera I i II, ale nie ze względu na R III. Ale to nie jest wielki niedostatek, bo łatwo można to poprawić, jeżeli diagram jest zorientowany. Trzeba mianowicie pomnożyć nawias Kauffmana przez odpowiedni czynnik, definiując w ten sposób wielomian Jonesa w wersji Kauffmana:

$$f_D = (-A)^{-3tw(D)} \langle D \rangle.$$

W tym zapisie $tw(D)$ oznacza sumę znaków skrzyżowań, a znak skrzyżowania jest określony jak na następnym rysunku.

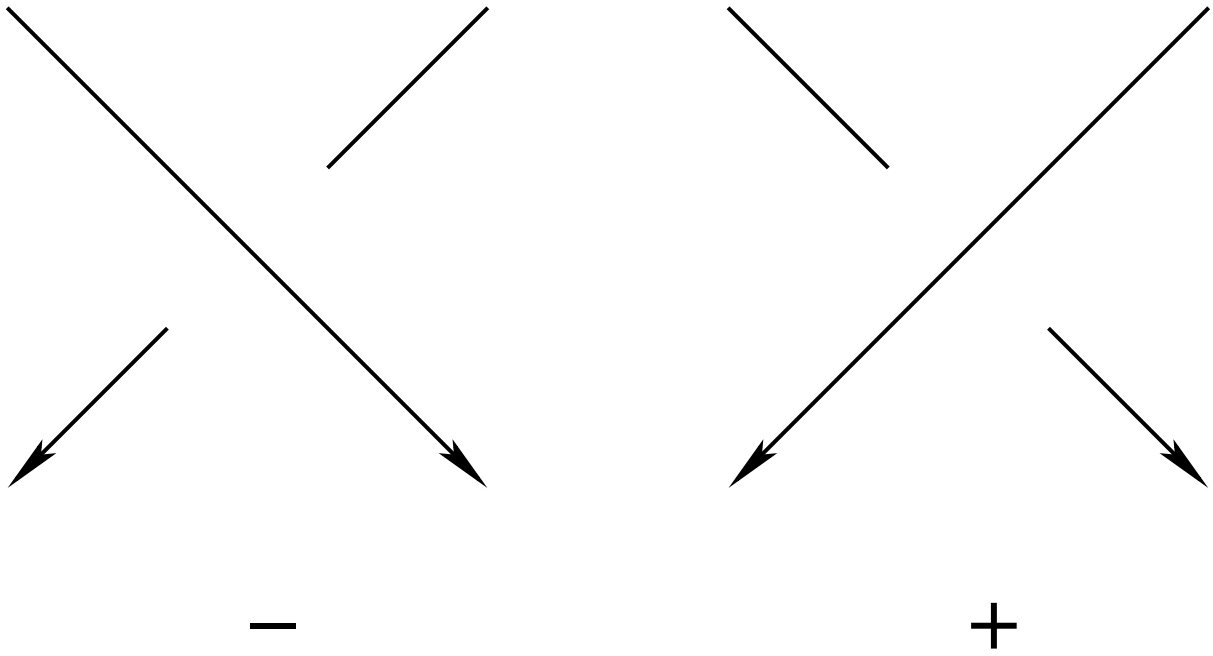


figure WDCK6

Krótki przerywnik, wyjaśniający dlaczego wielomian Jonesa zrobił w teorii węzłów błyskawiczną karierę. Przede wszystkim

1. pozwolił on udowodnić dwie stare hipotezy Taita. Jedna z nich mówi, że w zredukowanym diagramie alternującym liczba skrzyżowań jest minimalna, po wszystkich diagramach reprezentujących dany węzeł. Co więcej, dowód jest łatwy: pokazuje się, że dla każdego diagramu D rozpiętość wielomianu Jonesa nie przekracza liczby skrzyżowań pomnożonej przez cztery, a dla diagramu alternującego akurat zawsze wychodzi *dokładnie* tyle.

Poniższa ilustracja pokazuje, co to znaczy że diagram jest alternujący:

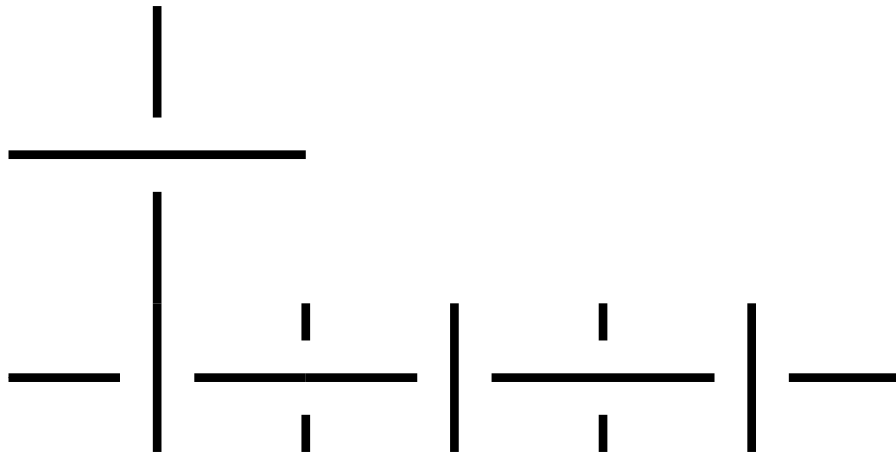


figure WDCK7

Kolejna: co to znaczy, że diagram nie jest zredukowany:

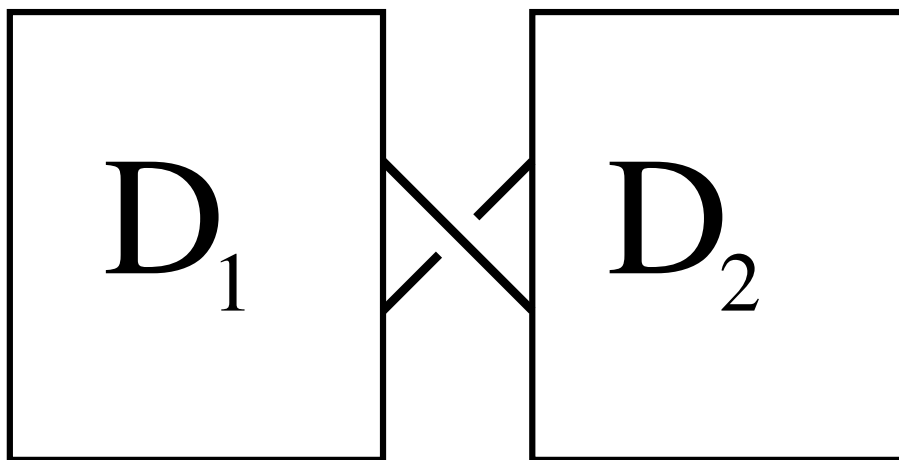


figure WDCK8

2. Wielomian Jonesa dosyć skutecznie odróżnia węzły, w szczególności bardzo często odróżnia węzeł od jego odbicia lustrzanego. Rysunek ilustruje pojęcie odbicia lustrzanego węzła. Ta para jest zresztą akurat dobrana tak, że obydwa warianty są równoważne.

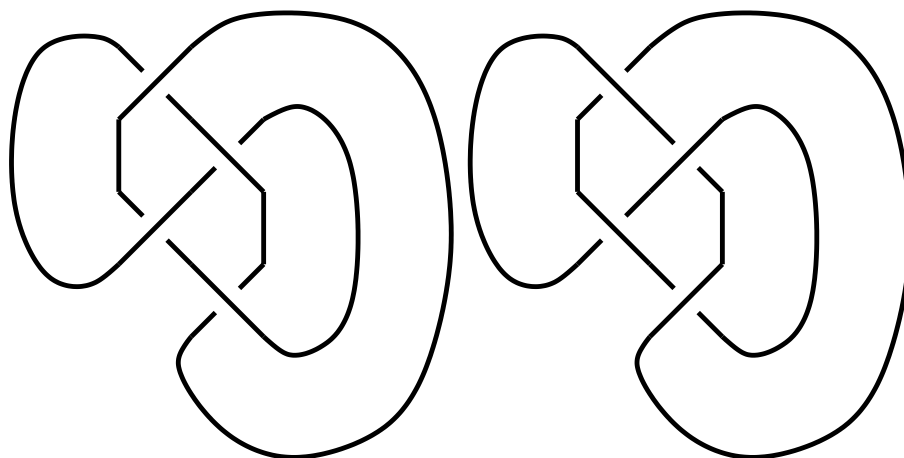


figure WDCK9

Ale: nie wiadomo, czy istnieje nietrywialny węzeł, którego wielomian Jonesa jest równy 1. Czyli nie wiadomo, czy wielomian Jonesa rozpoznaje nietrywialność węzła.

Teraz przejdziemy do ostatniego tematu tego odczytu: powrót do topologii algebraicznej, a właściwie do algebry homologicznej. Algebra homologiczna zajmuje się, najogólniej mówiąc, sytuacją taką: mamy przestrzeń liniową V nad ciałem K i odwzorowanie liniowe $d: V \rightarrow V$, takie że $d \circ d$ jest odwzorowaniem zerowym. Wówczas $\text{Im } d \subseteq \ker d$, a to oznacza że sensowne jest rozpatrywanie przestrzeni ilorazowej $\ker d / \text{Im } d$. Ten iloraz to są tak zwane homologie (grupa homologii) kompleksu (V, d) . Jeżeli ktoś miał dotychczas w życiu zerową ekspozycję na algebrę homologiczną, to teraz zostały już tylko szczegóły.

Wracając do teorii węzłów: powiem teraz o homologiach Khovanova, znanych też jako kohomologie Khovanova — to żadna różnica. Będzie tylko bardzo ogólny zarys pewnej konstrukcji i podkreślenie jej zalet.

Po pierwsze, byłoby lepiej, gdyby Kauffman, wymyśliwszy swój nawias przypisał trywialnemu okręgowi nie wielomian stały 1, tylko wielomian $-A^{-2} - A^2$. Wtedy można by powiedzieć, że stan S , który ma s okręgów wnosi do nawiasu Kauffmana $(-A^{-2} - A^2)^s$. Gdyby w dodatku te stany wzbogacić o znak przypisany każdemu okręgowi, to każdemu wzbogaconemu stanowi można by przypisać w oczywisty sposób wielomian A^i , a suma by była równa $(-A^{-2} - A^2)^s$. To teraz tworzymy przestrzeń liniową, która jest pewną sumą prostą po wszystkich stanach. A co sumujemy? Każdemu stanowi przypisujemy iloczyn tensorowy dwuwymiarowych przestrzeni, generowanych (dla konkretnego okręgu danego stanu) przez dwa wektory e_+ i e_- .

Na tej bardzo dużej przestrzeni liniowej określimy różniczkę d . Nie będę jej dokładnie opisywał, chciałbym tylko podkreślić jedno: ta różniczka jest zrobiona tak, że prawie wcale nie miesza stanów, jak to pokazuje rysunek zrobiony dla diagramu z trzema skrzyżowaniami. Na tym rysunku jest zaznaczonych osiem stanów, w lewym dolnym przednim rogu stan uzyskany przez same wygładzenia dodatnie, w prawym górnym z tyłu przez same wygładzenia ujemne, a pomiędzy nimi, według oczywistej reguły, stany pośrednie. Schemat pokazany na rysunku wskazuje, że różniczka policzona dla danego stanu ma niezerowe (być może) współczynniki w przestrzeni odpowiadającej innemu stanowi tylko wtedy, gdy ten stan jest wskazany strzałką — czyli tylko dla stanów różniących się sposobem wygładzenia jednego skrzyżowania).

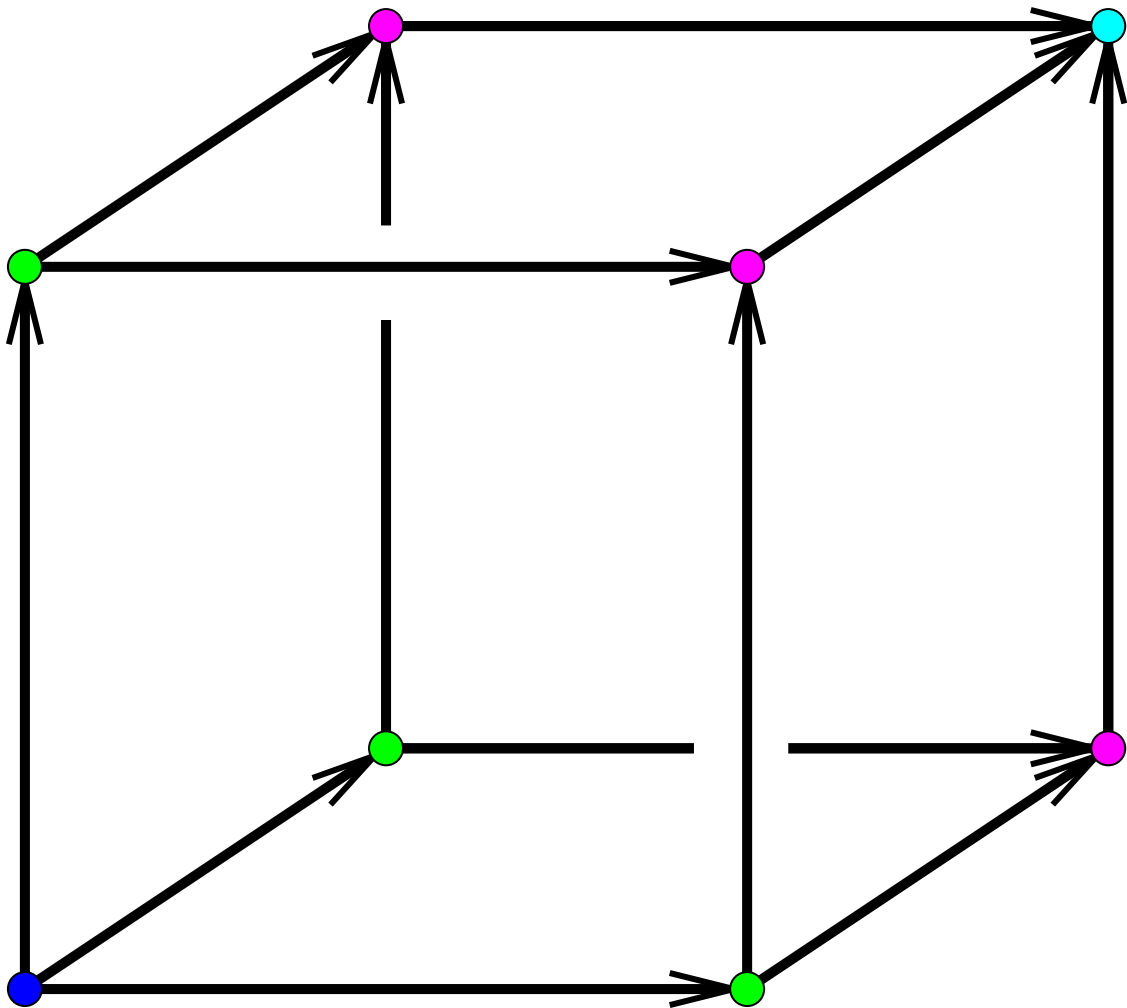


figure WDCK10

I już zupełnie na koniec, definicja różniczki.

Najpierw podajemy definicję dla pojedynczej zamiany cięcia, takiej która zmniejsza liczbę okręgów w stanie.

$$e_- \otimes e_- \mapsto 0$$

$$e_- \otimes e_+ \mapsto e_-$$

$$e_+ \otimes e_- \mapsto e_-$$

$$e_+ \otimes e_+ \mapsto e_+$$

A teraz dla zmiany sposobu wygładzenia w jednym skrzyżowaniu, takiej która zwiększa liczbę okręgów w stanie.

$$e_- \mapsto e_- \otimes e_-$$

$$e_+ \mapsto e_- \otimes e_+ + e_+ \otimes e_-$$

Nie jest trudno sprawdzić na siłę, że to ma własności, jakie algebra homologiczna stawia różniczce, to znaczy: $d \circ d = 0$.

Homologie Khovanova są niezmiennicze (nie zależą od wyboru diagramu węzła). Trudno byłoby z góry przewidzieć, czy ta konstrukcja prowadzi do czegoś ciekawszego niż wielomian Jonesa. Ale:

Homologie Khovanova rozpoznają węzeł trywialny.

Prawdę powiedziawszy, algebra homologiczna często działa w sposób nieco bardziej skomplikowany niż powiedziałem (ale zaznaczyłem, że jeszcze są pewne szczegóły). Tak też i jest w tym przypadku. Przy odrobinie uwagi można rozpatrywanej przestrzeni nadać podwójną gradację, to znaczy przedstawić ją jako sumę prostą pewnych przestrzeni, z których każda ma podwójny indeks (i, j) . Różniczka, dosłownie ta sama okazuje się być w odpowiedni sposób zgodna z taką podwójną gradacją, co powoduje, że homologie też mają podwójną gradację. To już tylko kwestia uwagi i cierpliwości. I dopiero teraz otrzymujemy prawdziwą niespodziankę — homologie Khovanova, odpowiednio sprytnie

użyte, pozwalają udowodnić tzw. hipotezę Milnora–Bennequina. Dla zilustrowania o co chodzi spojrzymy na nie najbardziej ogólny przykład. Na rysunku mamy węzeł, przedstawiony w postaci tzw. dodatniego warkocza z $s = 4$ pasmami i $c = 11$ skrzyżowaniami — wszystkie skrzyżowania są tego samego typu. Hipoteza mówi, że żadnego diagramu tego węzła nie da się przerobić na diagram węzła trywialnego poprzez przerobienie mniej niż $\frac{c-s+1}{2}$ skrzyżowań.

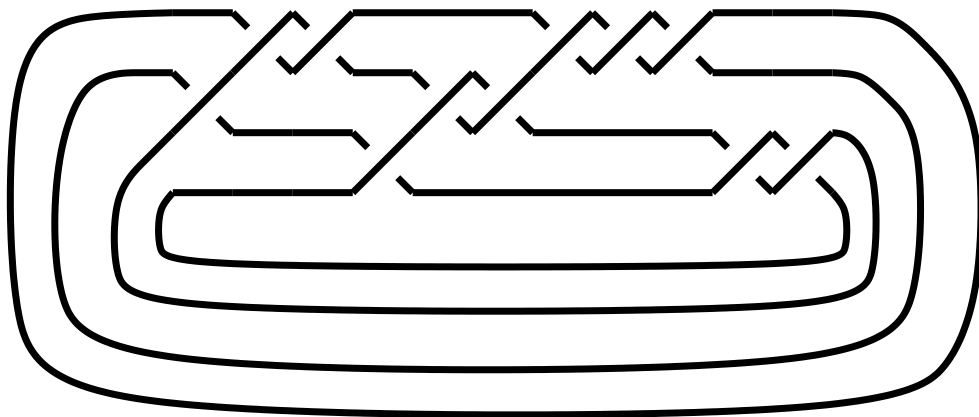


figure WDCK10

To tylko przykład. Ogólne stwierdzenie, że dla węzłów, które dają się tak przedstawić, potrzeba nie mniej niż $\frac{c-s+1}{2}$ przeróbek skrzyżowań (minimum po wszystkich diagramach!) żeby uzyskać węzeł trywialny, było przez kilkadziesiąt lat jedną z najpoważniejszych nieroztrzygniętych hipotez teorii węzłów.

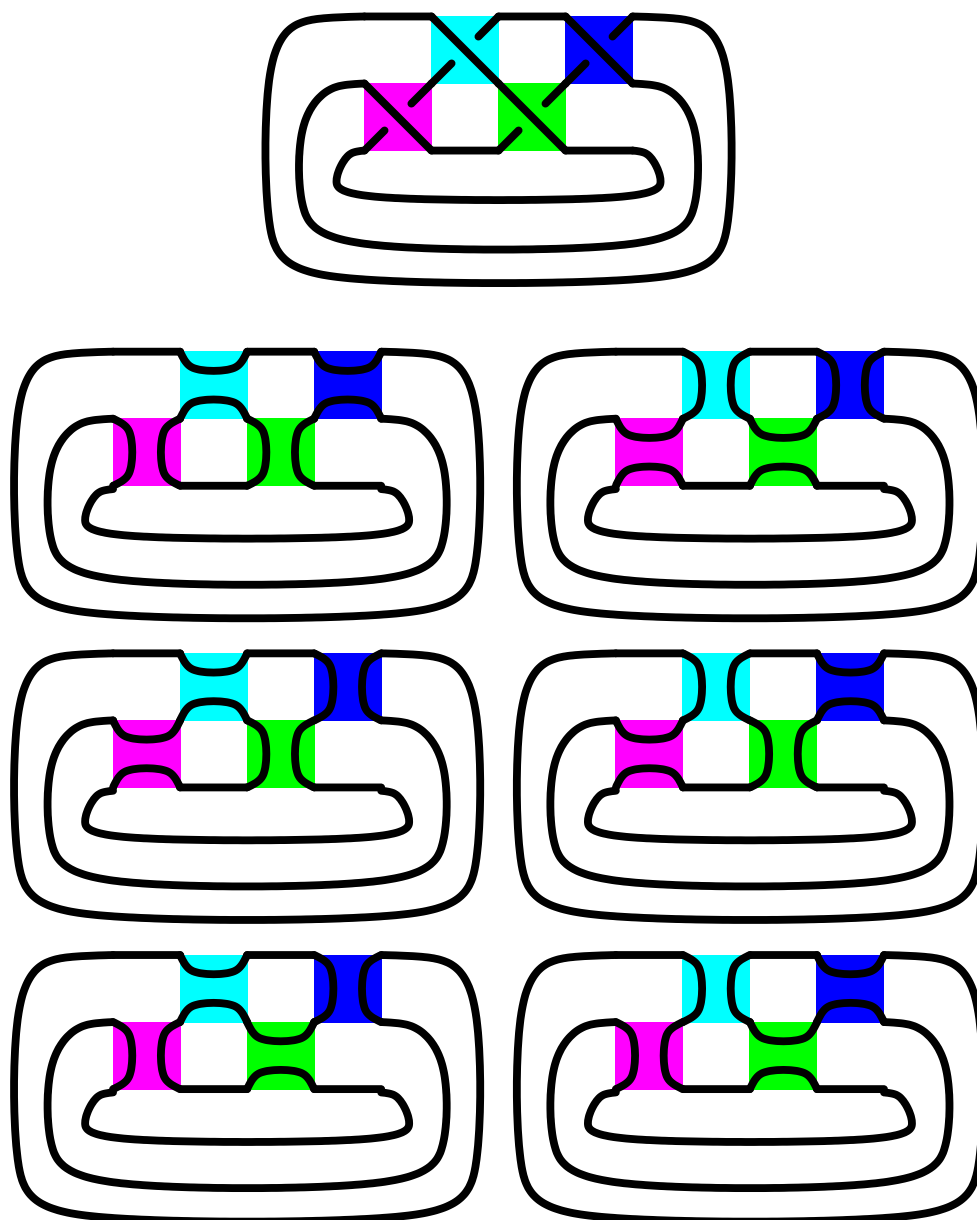


figure WDCK11

Sześć stanów diagramu podanego na górze (spośród szesnastu), same takie w których dwa skrzyżowania rozcięto dodatnio, a dwa ujemnie.