Odczyt Laureata Medalu Filca LX Szkoły

Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

MIM

Wydział
Matematyki, Informatyki i Mechaniki

O graniu i wygrywaniu

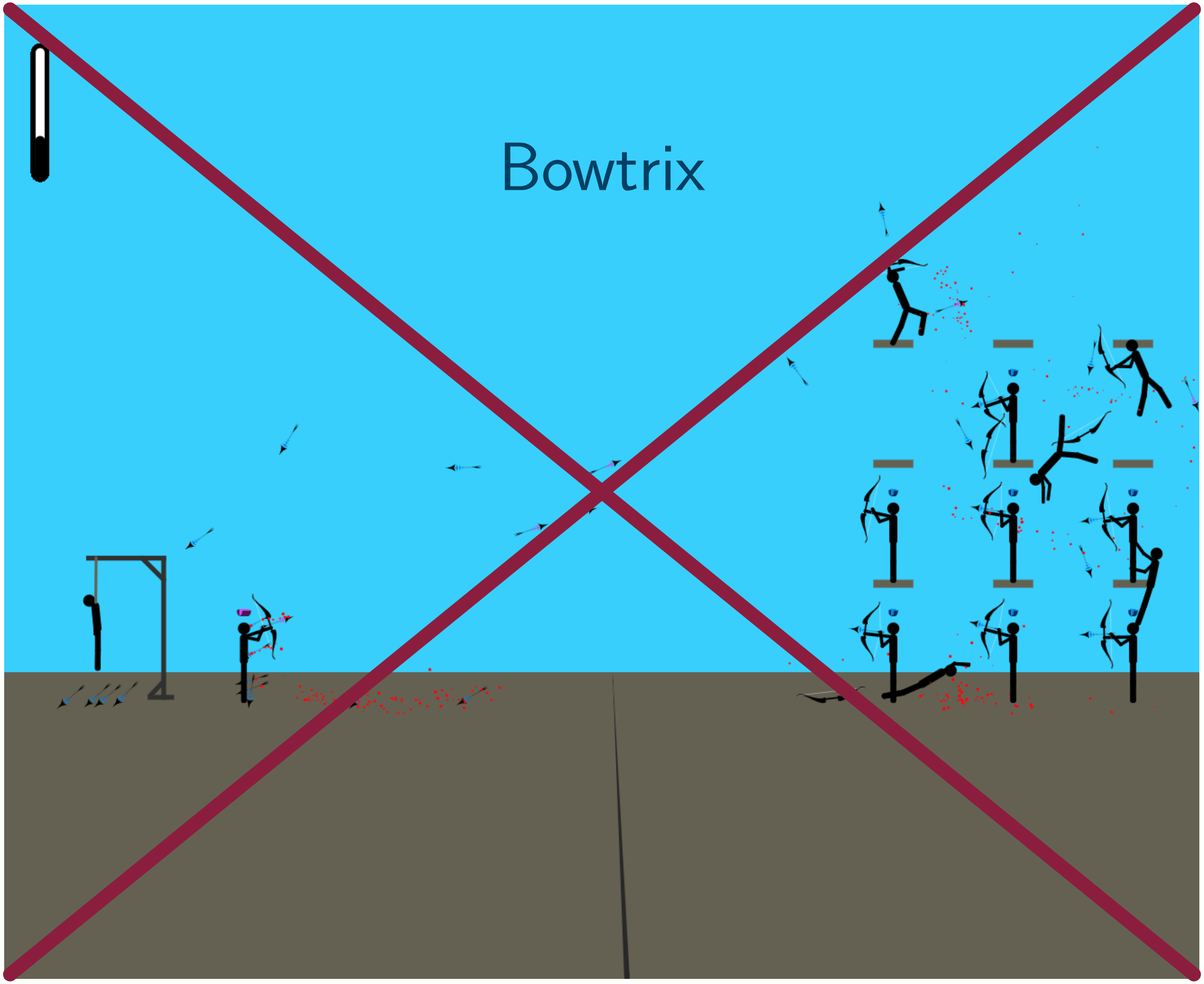
Michał Skrzypczak

Uniwersytet Warszawski

Wydział
Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Gry

Gry



Gry

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\Box$)
- Przebieg oparty na rundach

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

- Szachy (bez patów)

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

- Szachy (bez patów)
- Nim'y

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

- Szachy (bez patów)
- Nim'y
- Hex

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\Diamond$) i **A** (Adam, $\Box$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

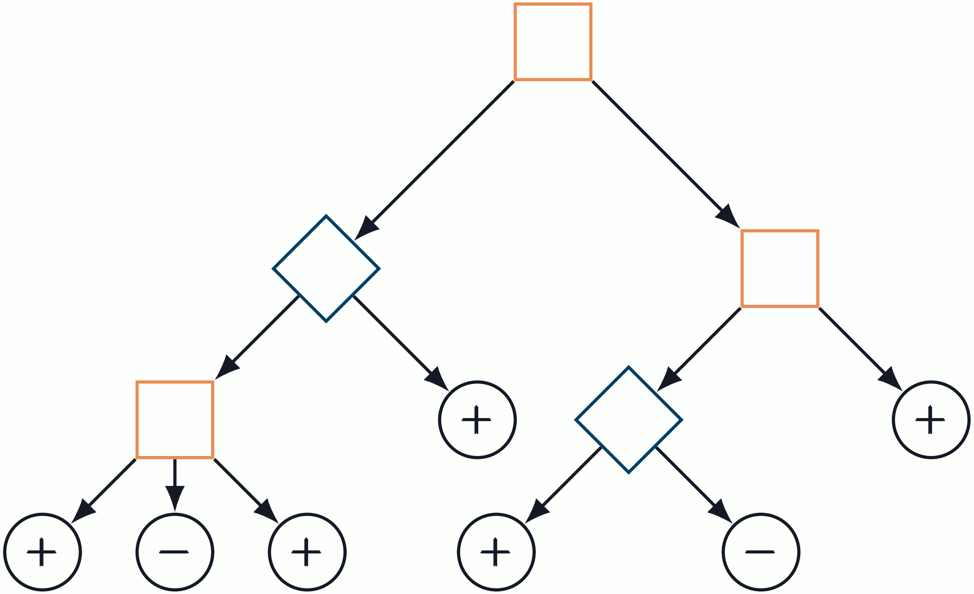
- Szachy (bez patów)
- Nim'y
- Hex
- ...

Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

- Szachy (bez patów)
- Nim'y
- Hex
- ...

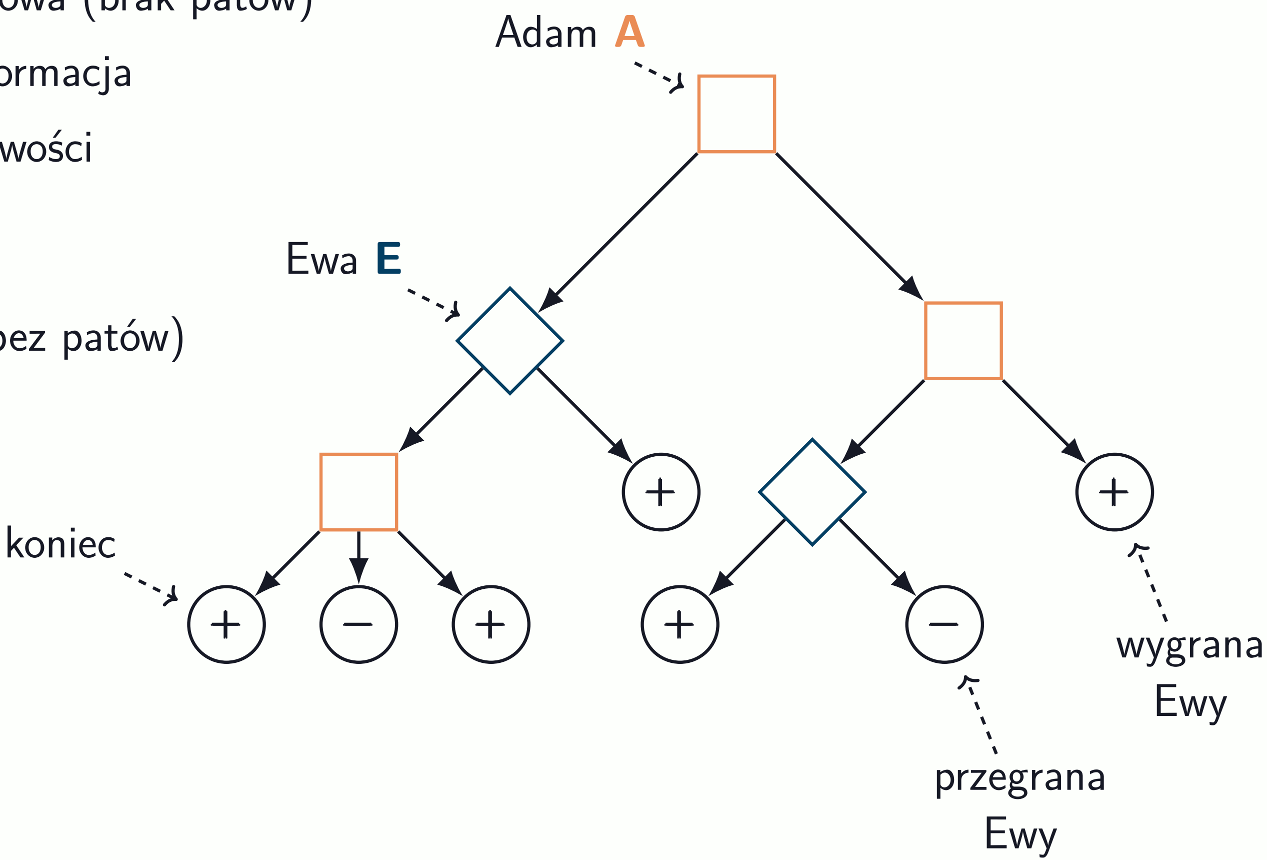


Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

- Szachy (bez patów)
- Nim'y
- Hex
- ...

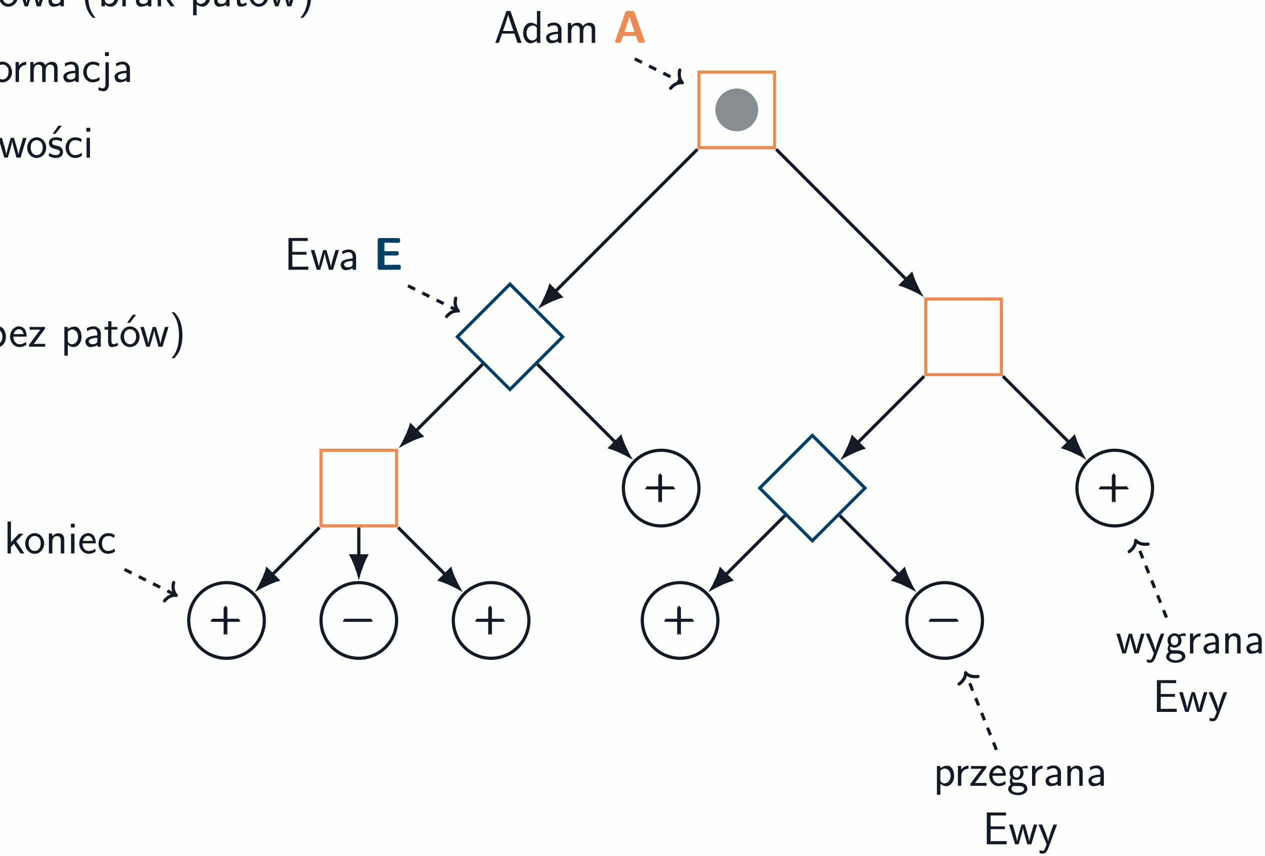


Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

- Szachy (bez patów)
- Nim'y
- Hex
- . . .

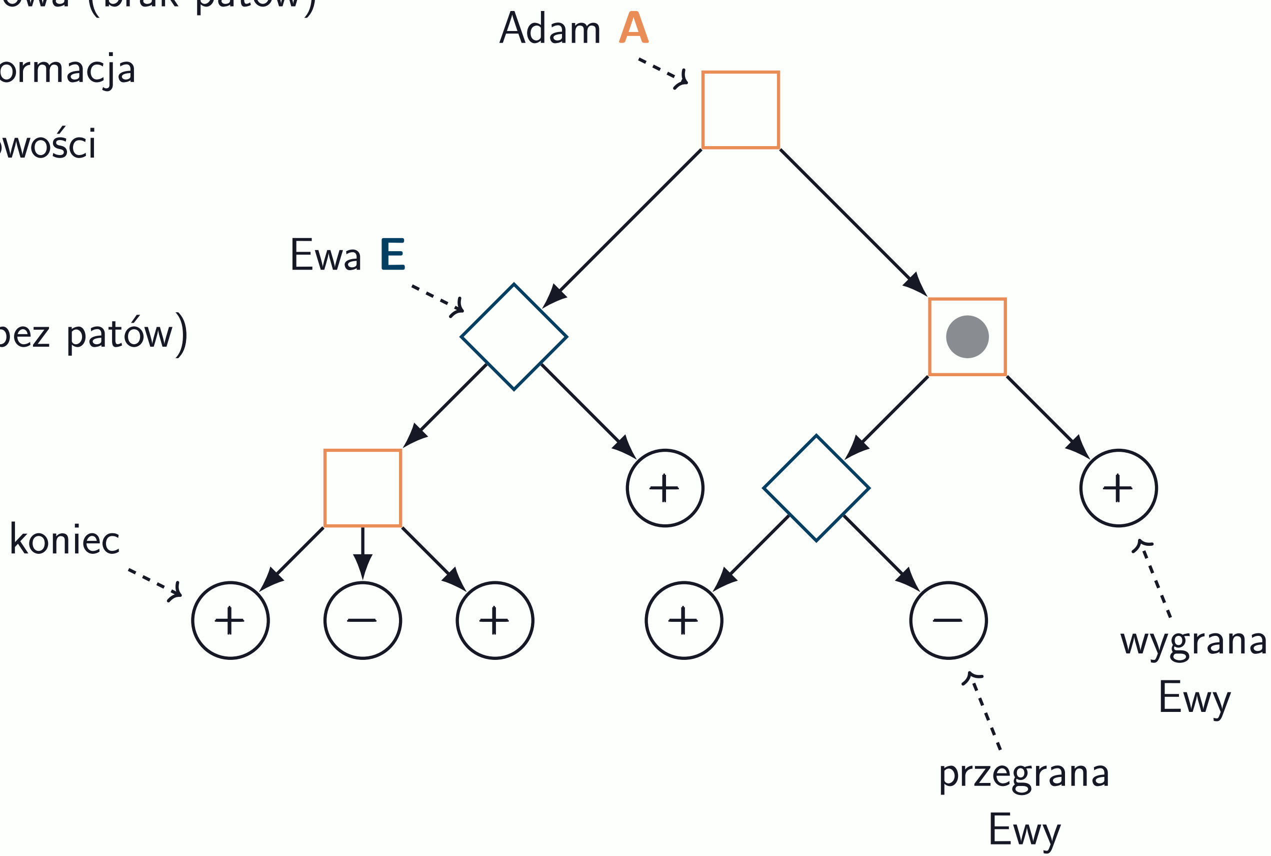


Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

- Szachy (bez patów)
- Nim'y
- Hex
- ...

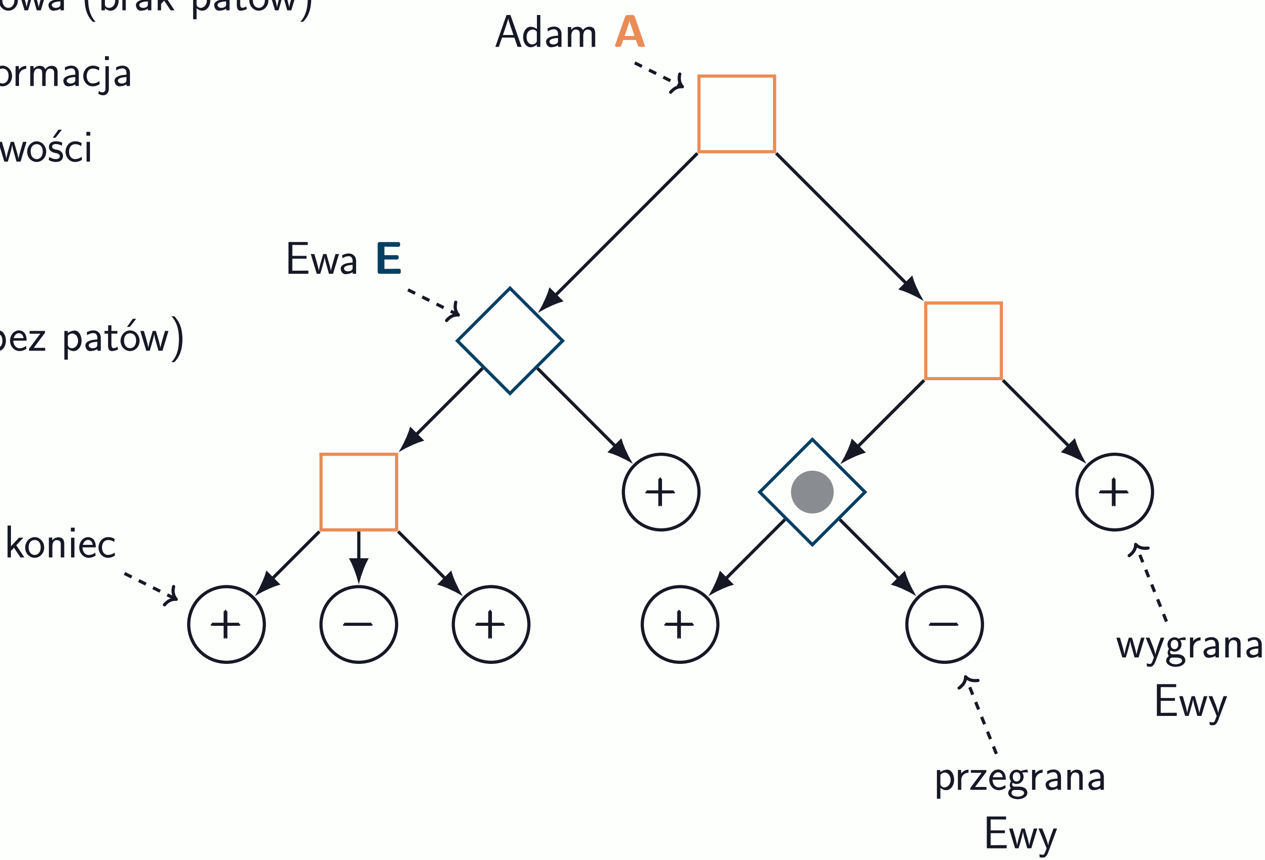


Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

Na przykład:

- Szachy (bez patów)
- Nim'y
- Hex
- ...

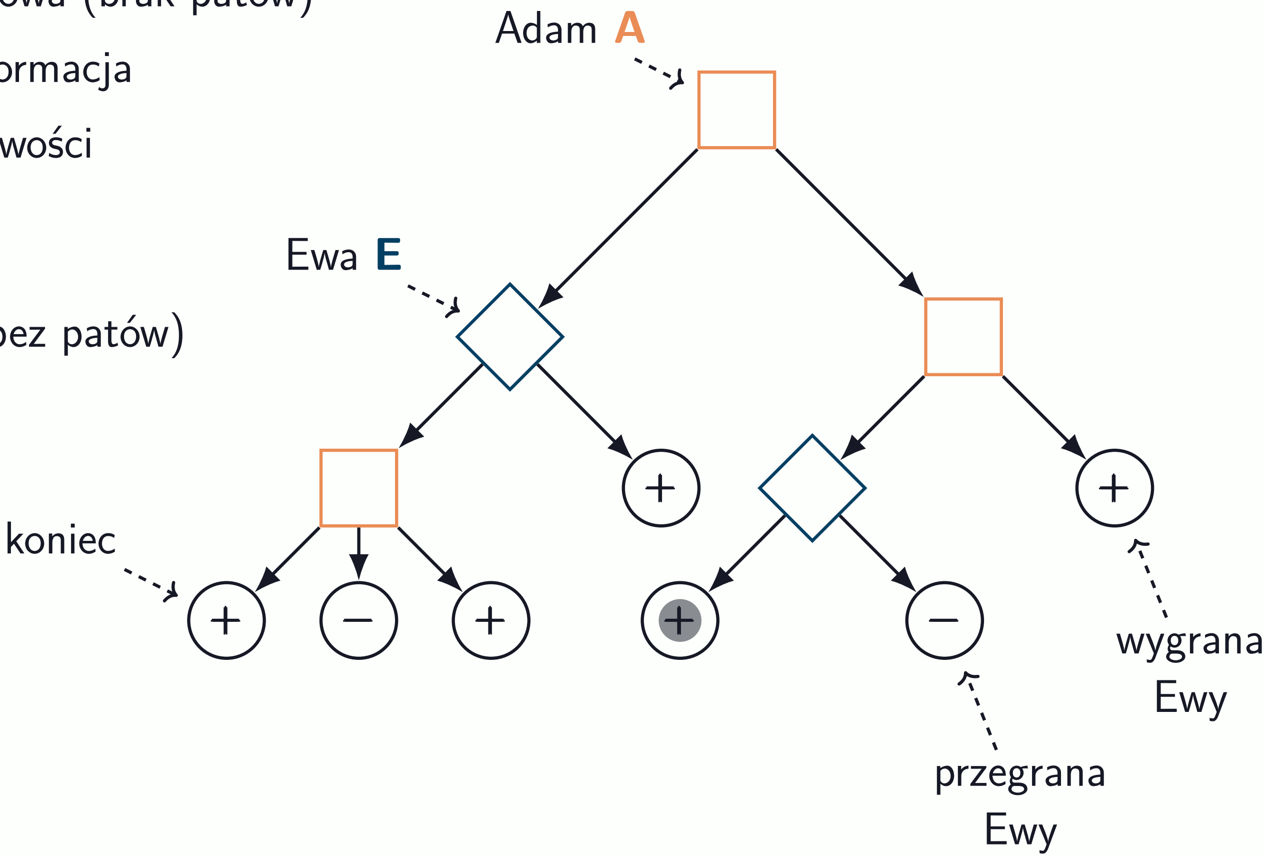


Gry

- Dwoje graczy: **E** (Ewa, $\diamond$) i **A** (Adam, $\square$)
- Przebieg oparty na rundach
- Suma zerowa (brak patów)
- Pełna informacja
- Brak losowości

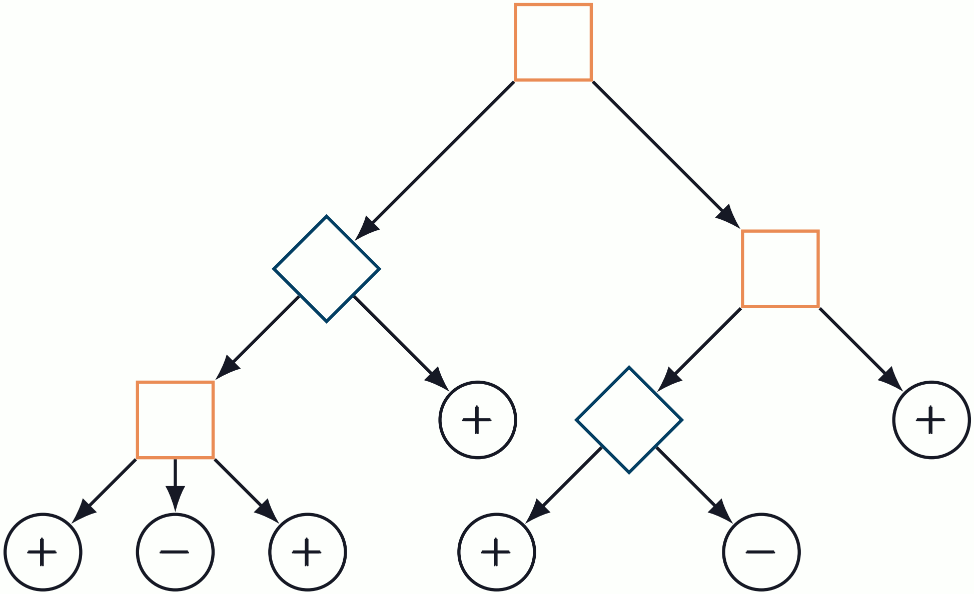
Na przykład:

- Szachy (bez patów)
- Nim'y
- Hex
- ...

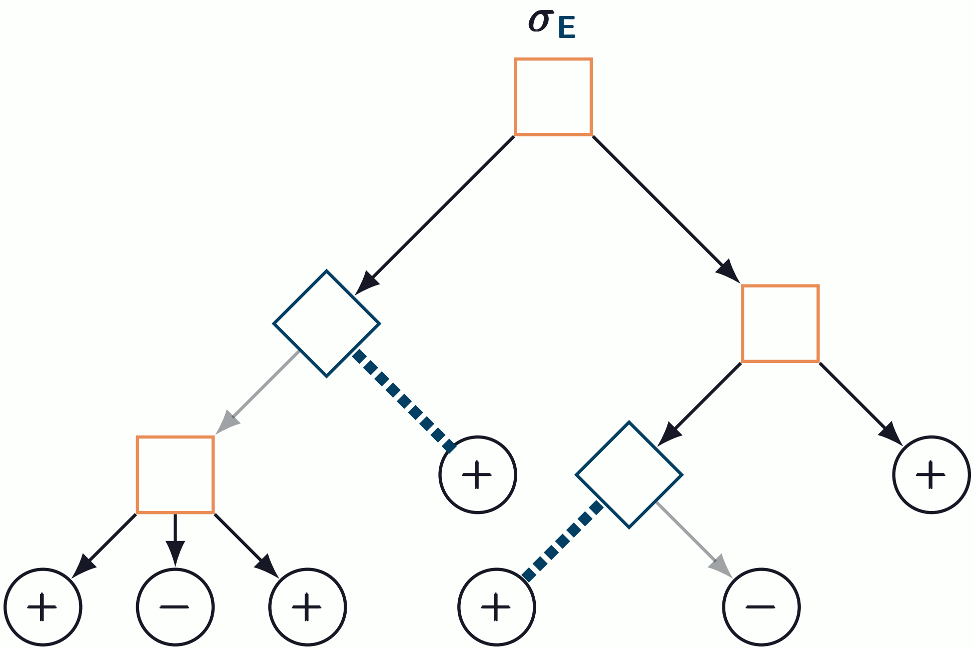


Strategie i determinacja

Strategie i determinacja

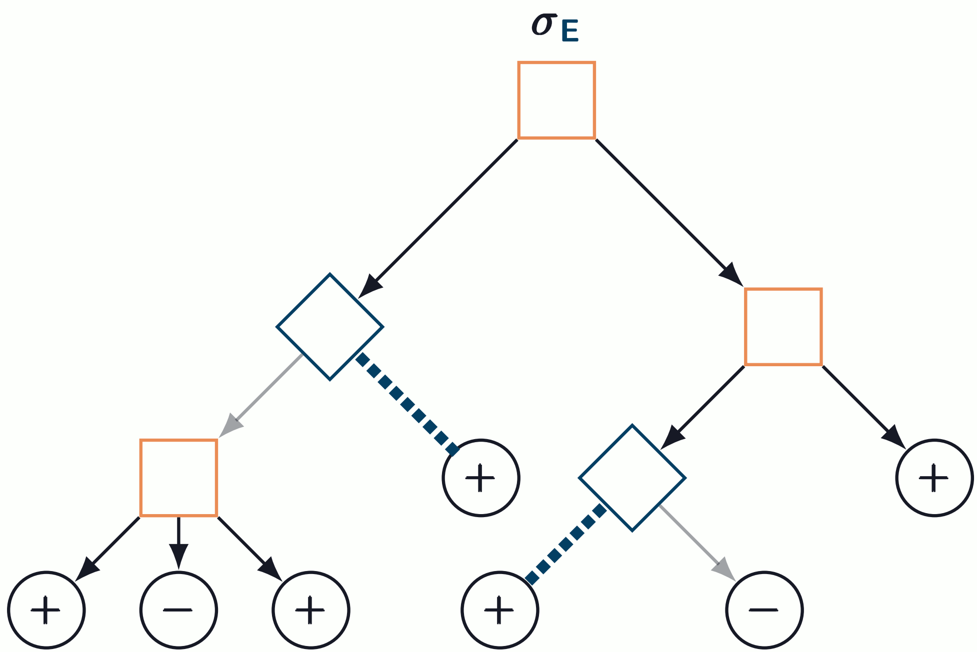


Strategie i determinacja



Strategie i determinacja

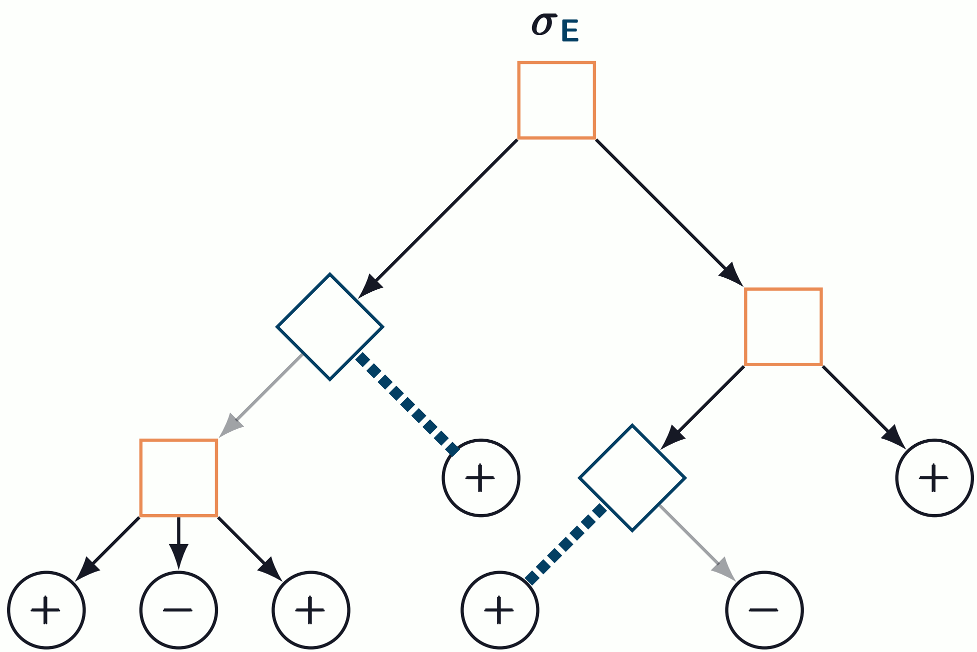
Strategia σ gracza P: funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje



Strategie i determinacja

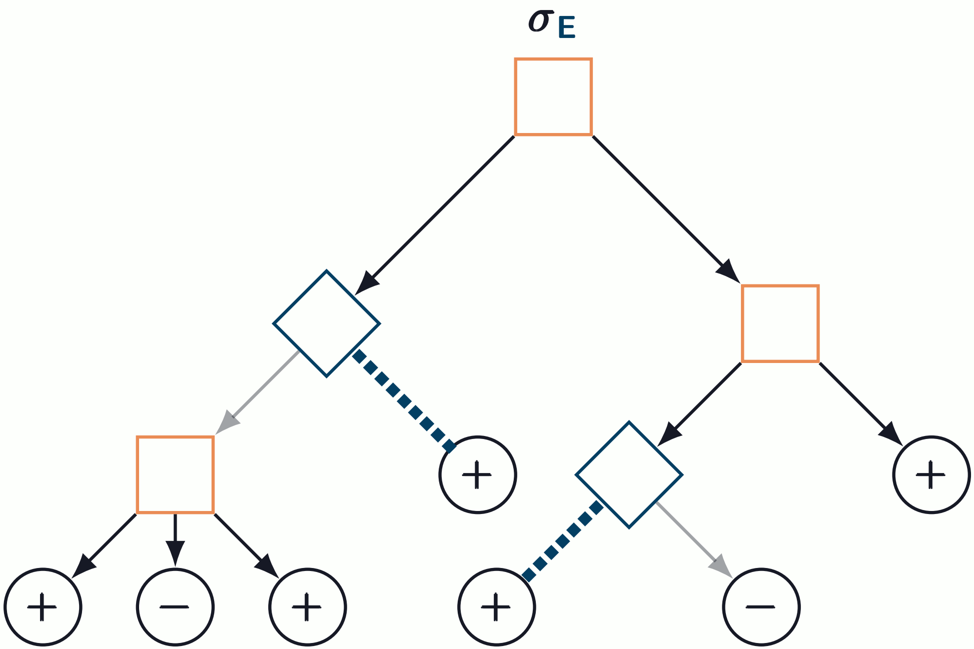
Strategia $\boldsymbol{\sigma}$ gracza P: funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje

Strategia **wygrywająca** $\boldsymbol{\sigma}$: wszystkie rozgrywki $\boldsymbol{\sigma}$ są wygrywające



Strategie i determinacja

Strategia σ gracza P:	funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje
Strategia **wygrywająca** σ:	wszystkie rozgrywki σ są wygrywające
Gracz **wygrywa** grę:	posiada w niej strategię wygrywającą

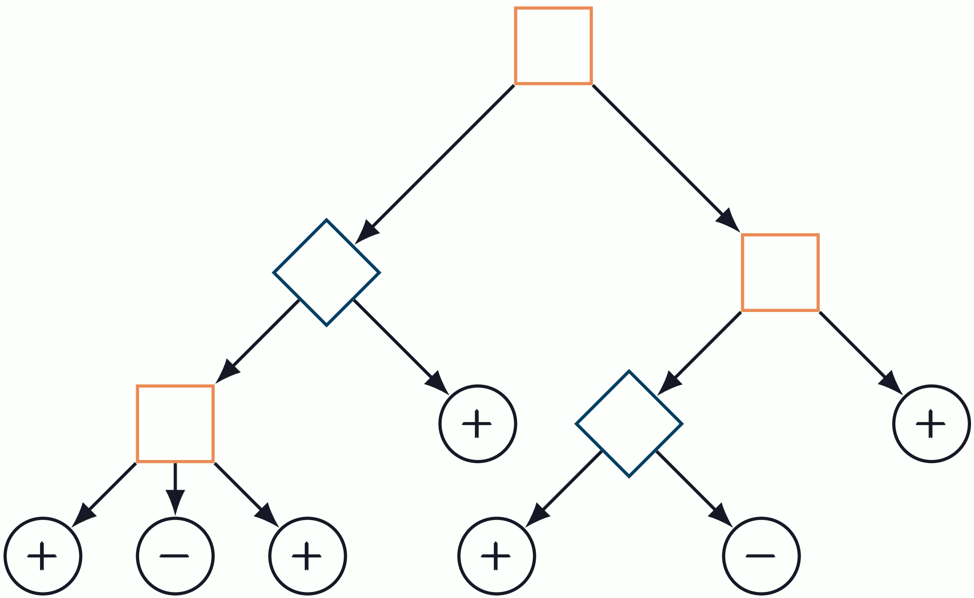


Strategie i determinacja

Strategia σ gracza P: funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje

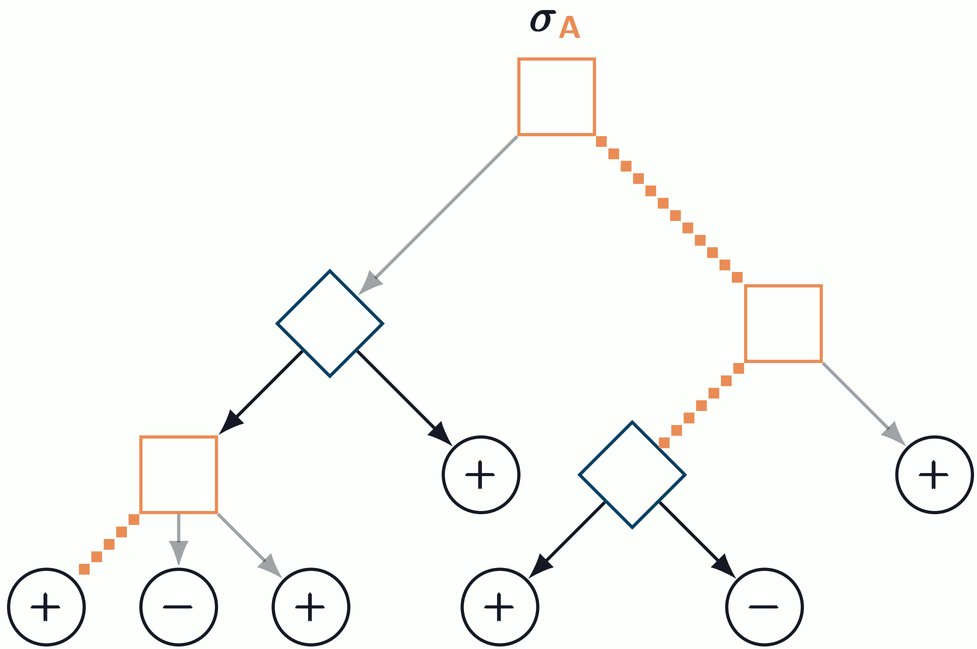
Strategia **wygrywająca** σ: wszystkie rozgrywki σ są wygrywające

Gracz **wygrywa** grę: posiada w niej strategię wygrywającą



Strategie i determinacja

Strategia σ gracza P:	funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje
Strategia **wygrywająca** σ:	wszystkie rozgrywki σ są wygrywające
Gracz **wygrywa** grę:	posiada w niej strategię wygrywającą

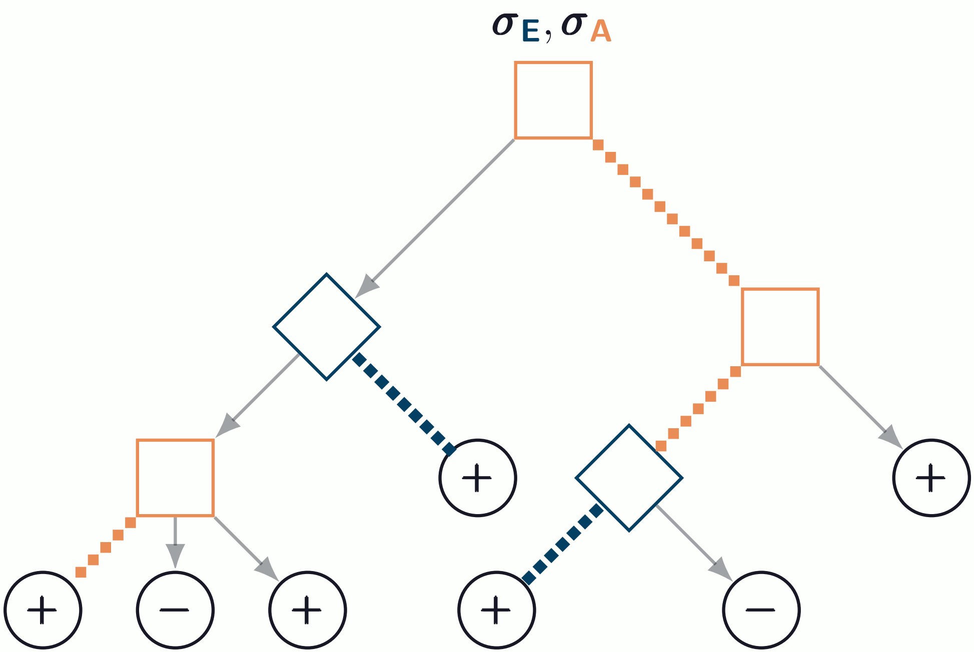


Strategie i determinacja

Strategia $\boldsymbol{\sigma}$ gracza P: funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje

Strategia **wygrywająca** $\boldsymbol{\sigma}$: wszystkie rozgrywki $\boldsymbol{\sigma}$ są wygrywające

Gracz **wygrywa** grę: posiada w niej strategię wygrywającą



Strategie i determinacja

Strategia σ gracza P: funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje

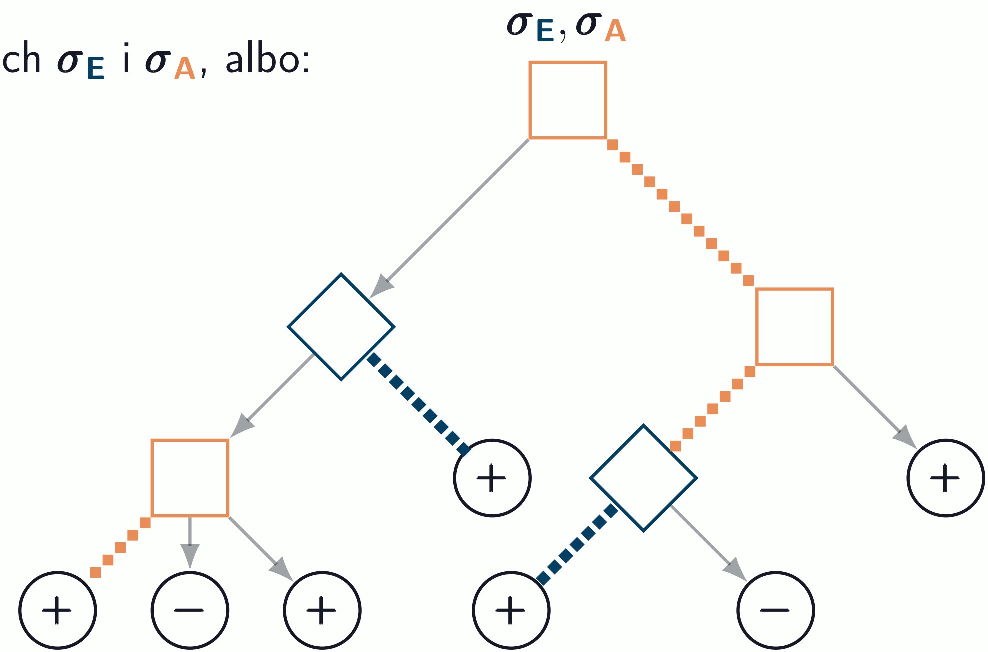
Strategia **wygrywająca** σ: wszystkie rozgrywki σ są wygrywające

Gracz **wygrywa** grę: posiada w niej strategię wygrywającą

Fakt

Przy ustalonych strategiach σ_E i σ_A, albo:

- σ_E wygrywa z σ_A, albo
- σ_A wygrywa z σ_E.



Strategie i determinacja

Strategia σ gracza P: funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje

Strategia **wygrywająca** σ: wszystkie rozgrywki σ są wygrywające

Gracz **wygrywa** grę: posiada w niej strategię wygrywającą

Fakt

Przy ustalonych strategiach σ_E i σ_A, albo:

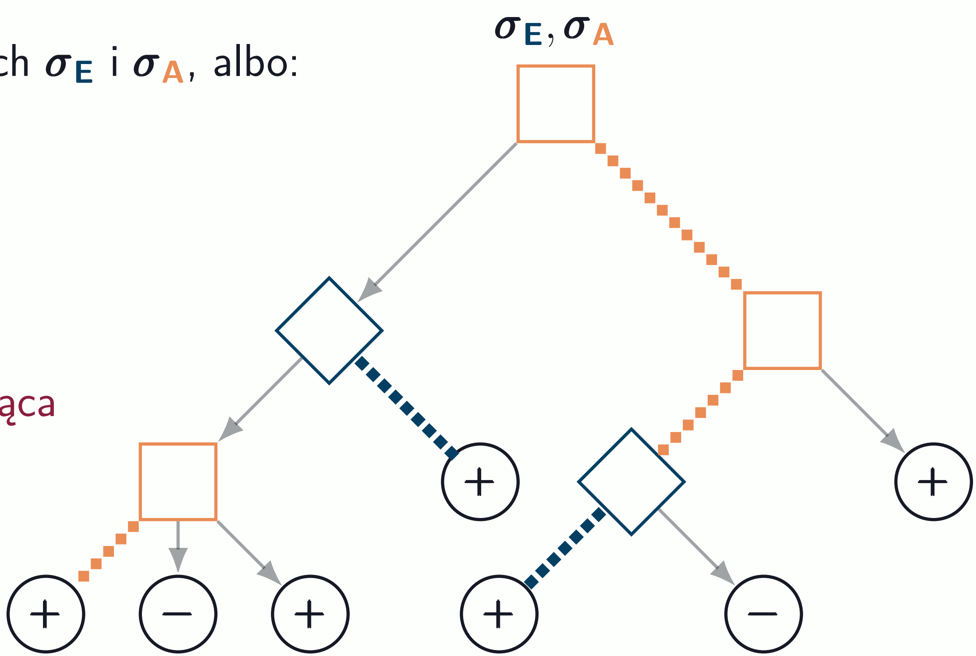
- σ_E wygrywa z σ_A, albo
- σ_A wygrywa z σ_E.

Fakt

Strategia σ jest wygrywająca

wtw.

σ wygrywa z każdą σ'



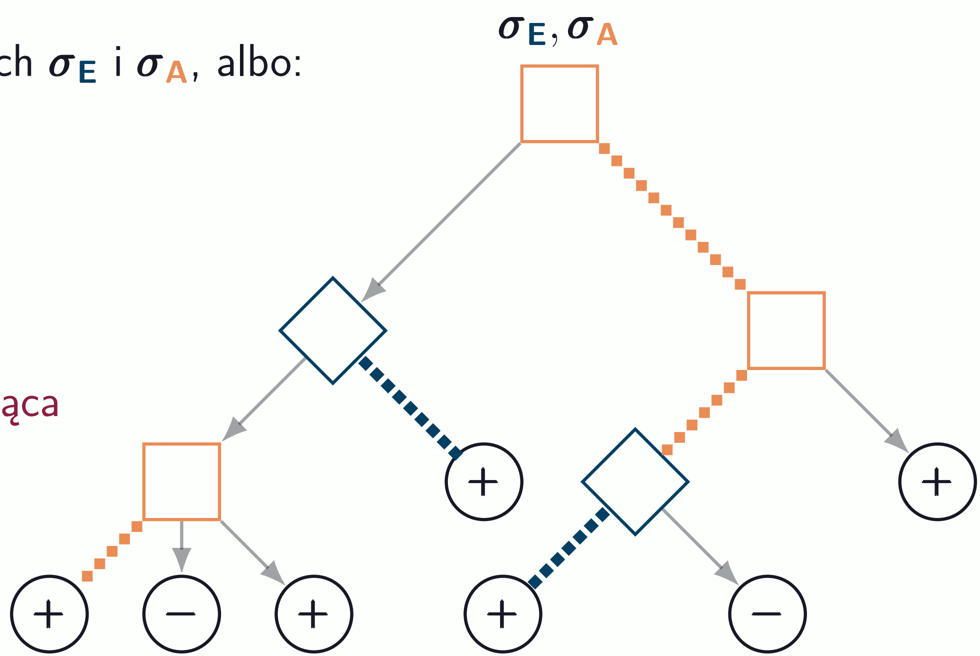
Strategie i determinacja

Strategia σ gracza P:	funkcja z pozycji P w podejmowane tam decyzje
Strategia **wygrywająca** σ:	wszystkie rozgrywki σ są wygrywające
Gracz **wygrywa** grę:	posiada w niej strategię wygrywającą
Gra **zdeterminowana**:	któryś gracz ją wygrywa

Fakt

Przy ustalonych strategiach σ_E i σ_A, albo:

- σ_E wygrywa z σ_A, albo
- σ_A wygrywa z σ_E.



Fakt

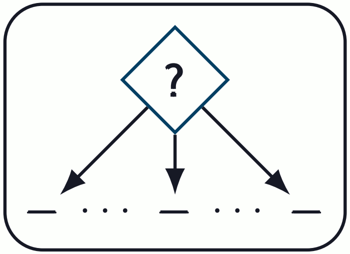
Strategia σ jest wygrywająca

wtw.

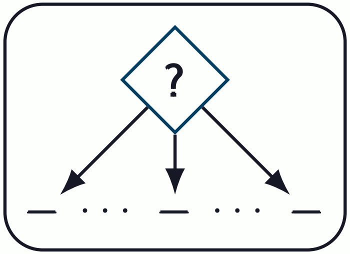
σ wygrywa z każdą σ'

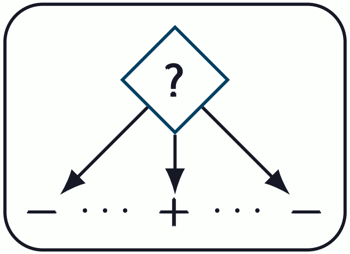
Wszystkie gry są zdeterminowane

Wszystkie gry są zdeterminowane

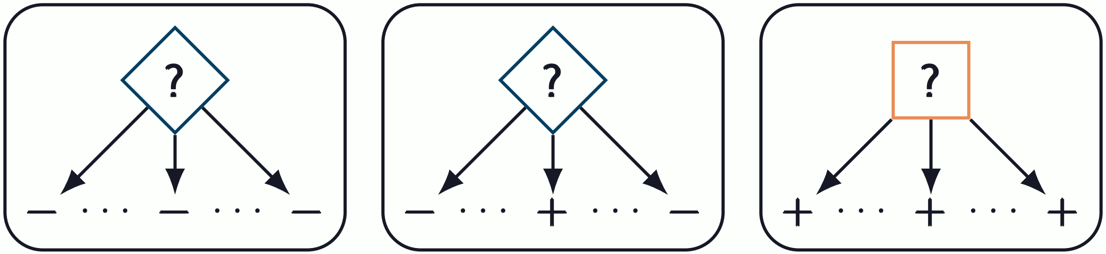


Wszystkie gry są zdeterminowane

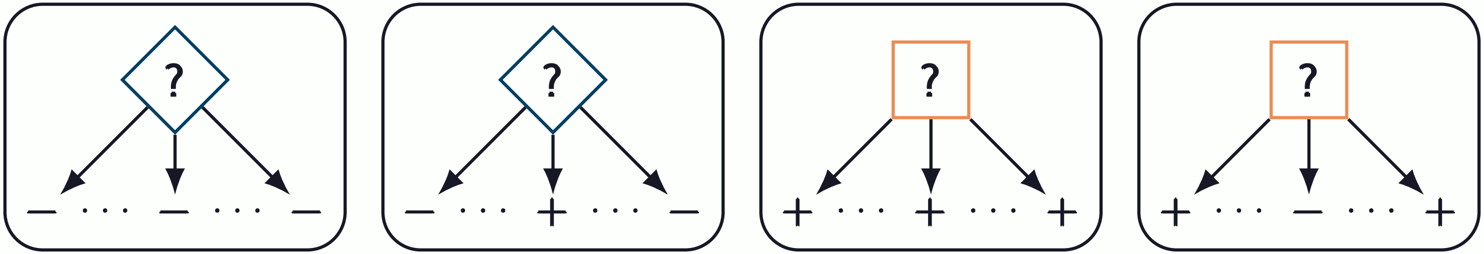




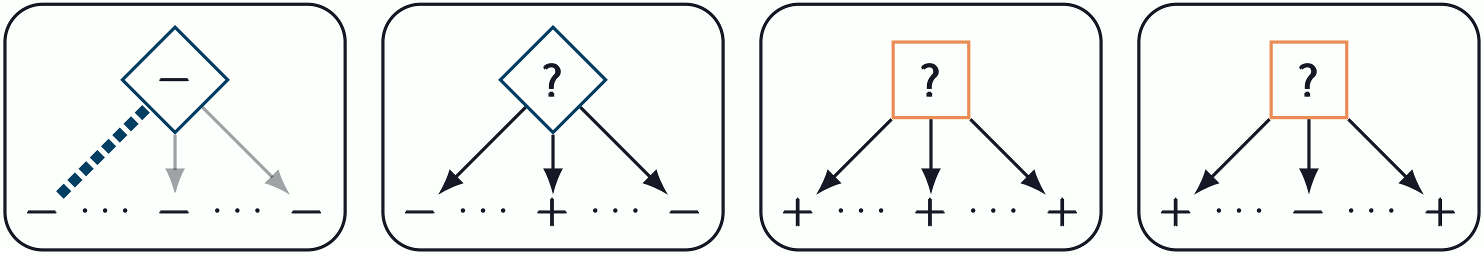
Wszystkie gry są zdeterminowane



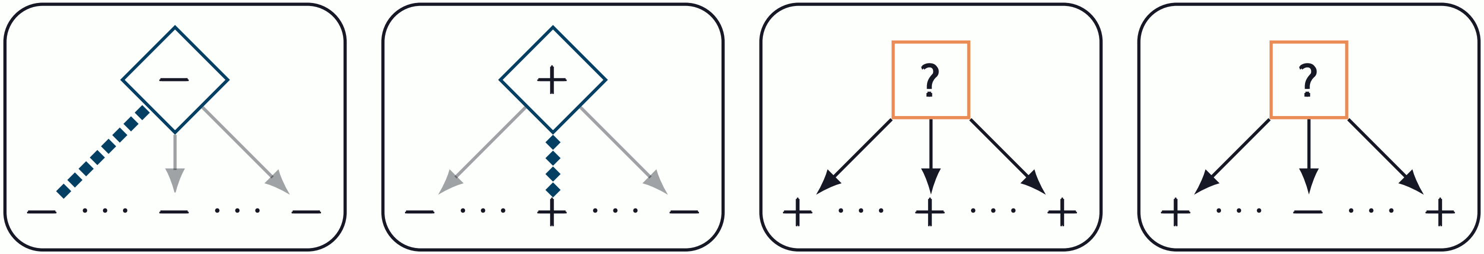
Wszystkie gry są zdeterminowane



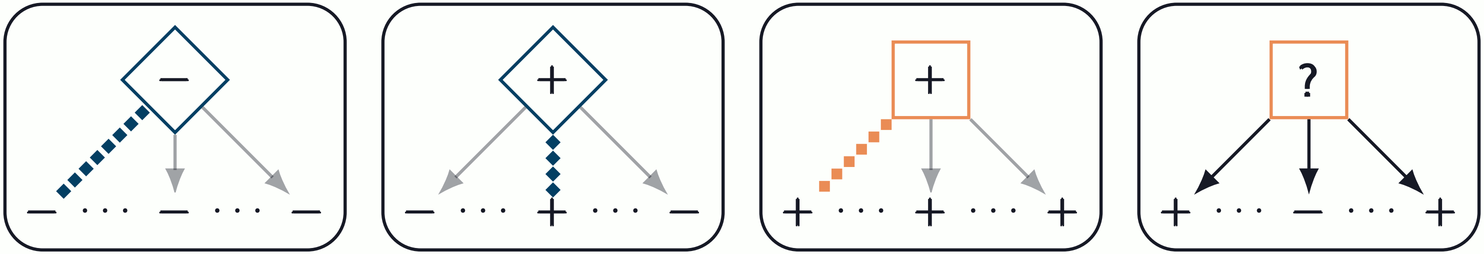
Wszystkie gry są zdeterminowane



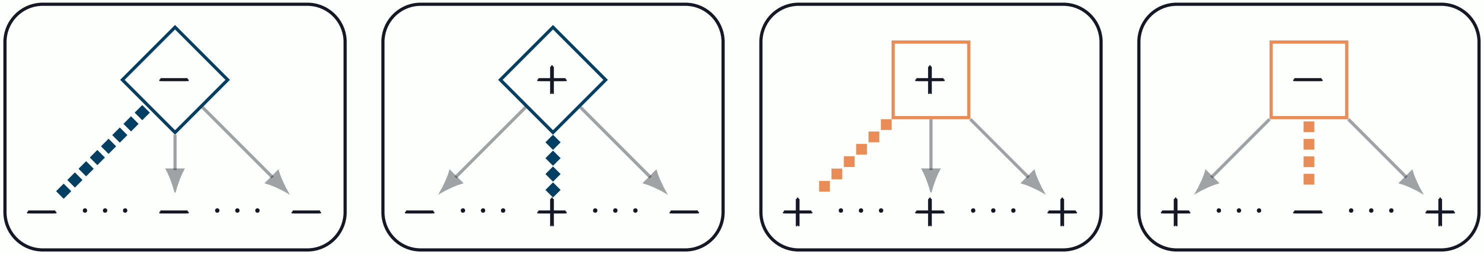
Wszystkie gry są zdeterminowane



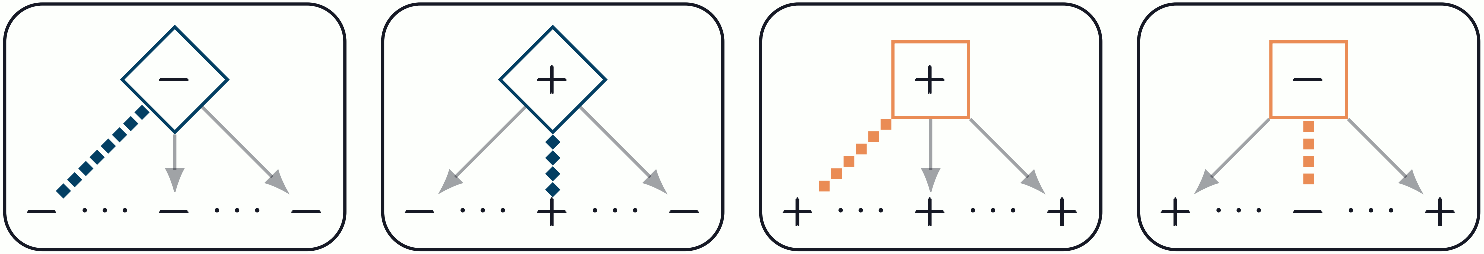
Wszystkie gry są zdeterminowane

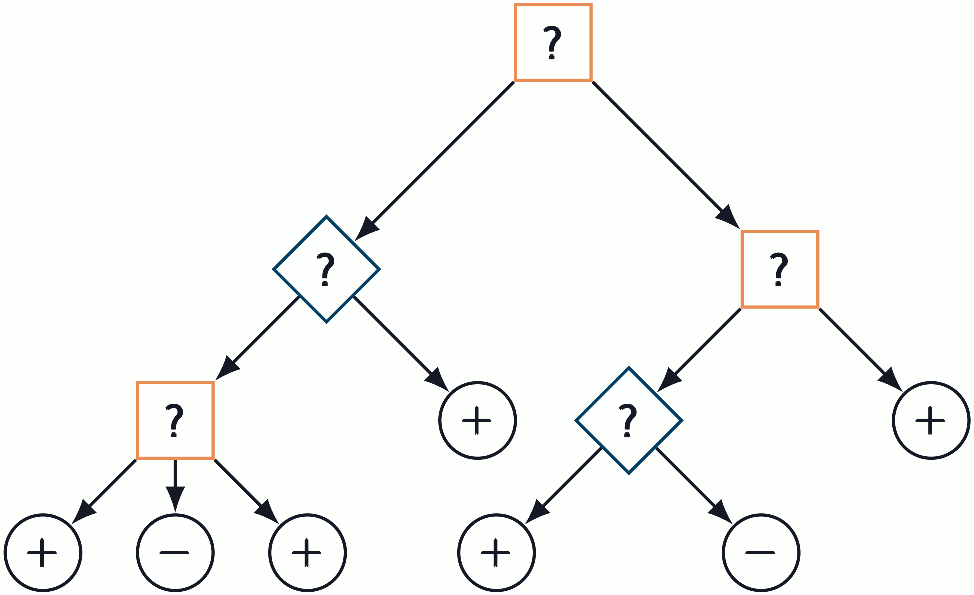


Wszystkie gry są zdeterminowane

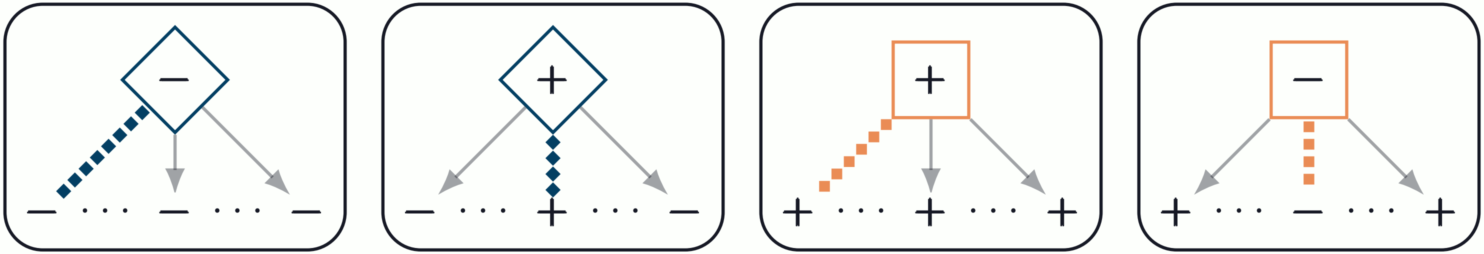


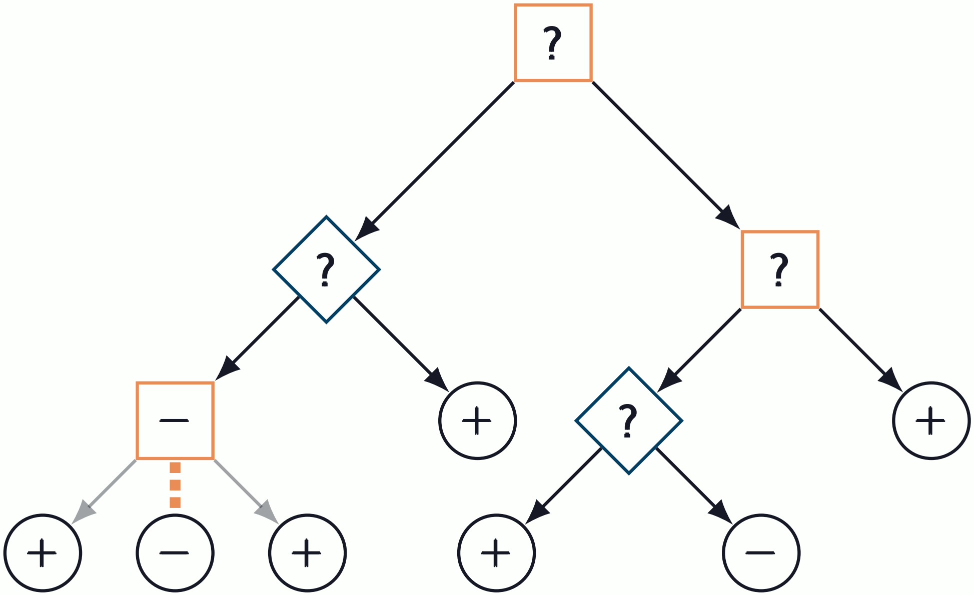
Wszystkie gry są zdeterminowane



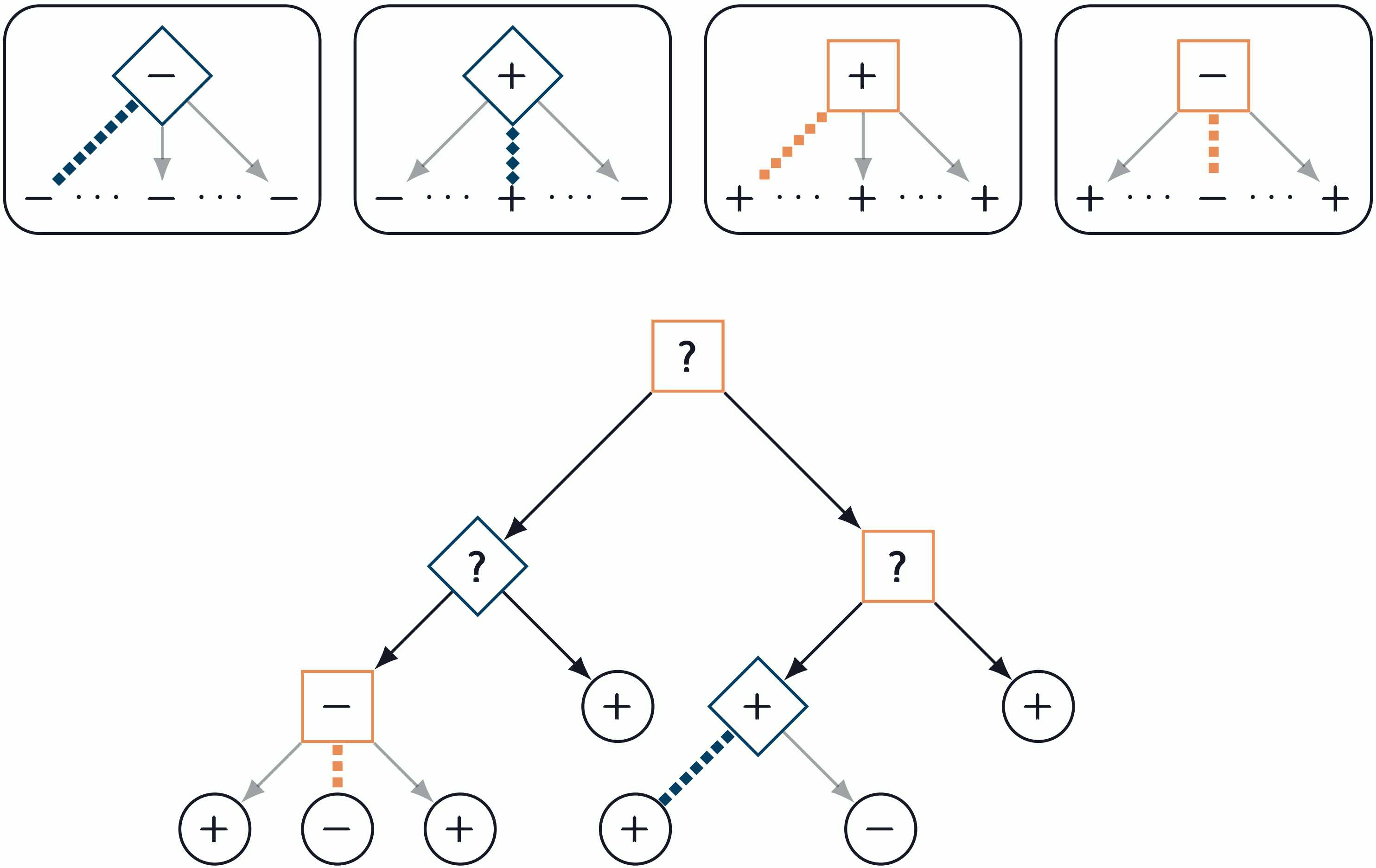


Wszystkie gry są zdeterminowane

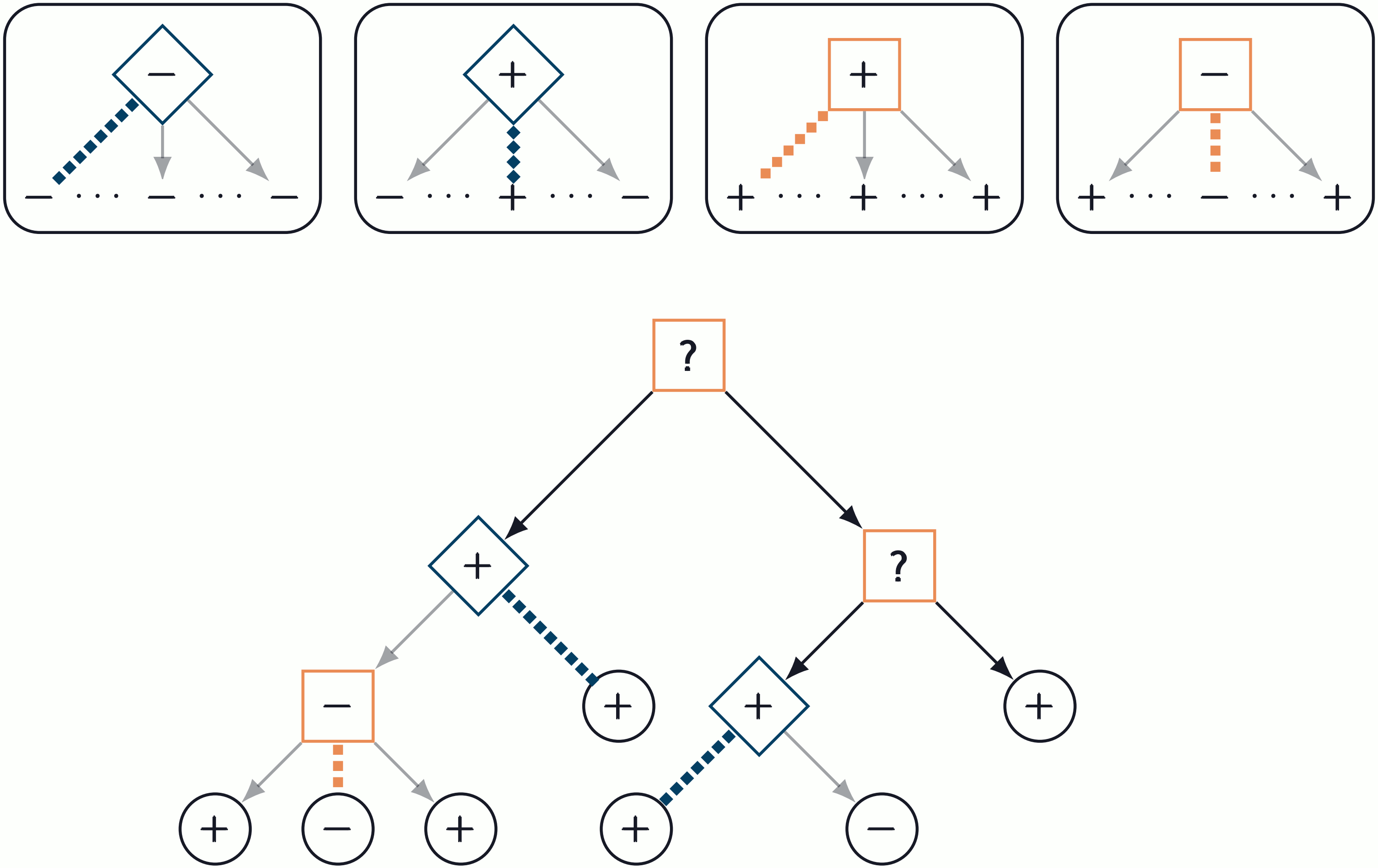




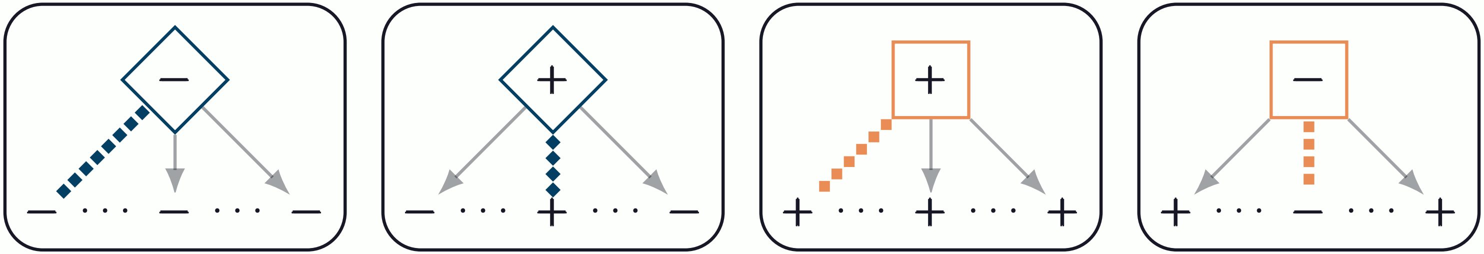
Wszystkie gry są zdeterminowane

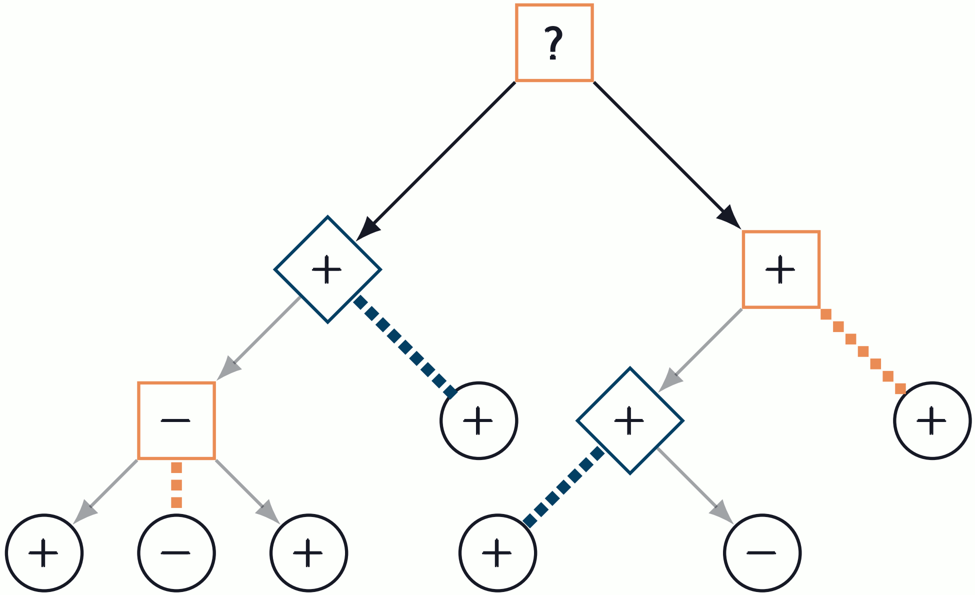


Wszystkie gry są zdeterminowane

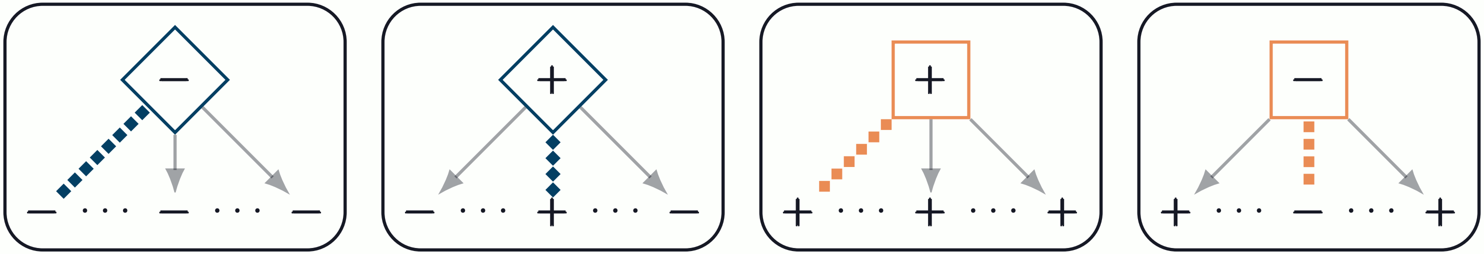


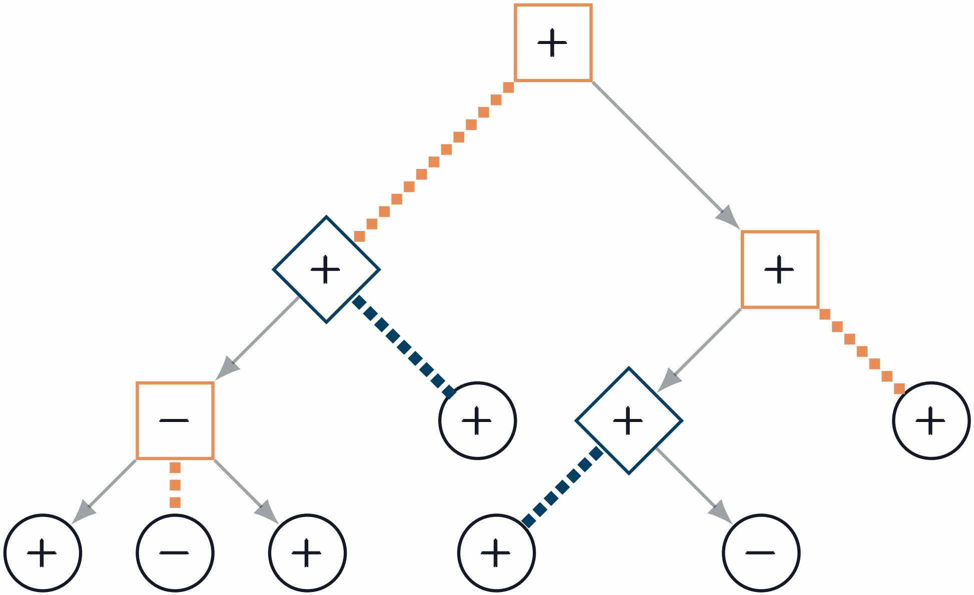
Wszystkie gry są zdeterminowane





Wszystkie gry są zdeterminowane





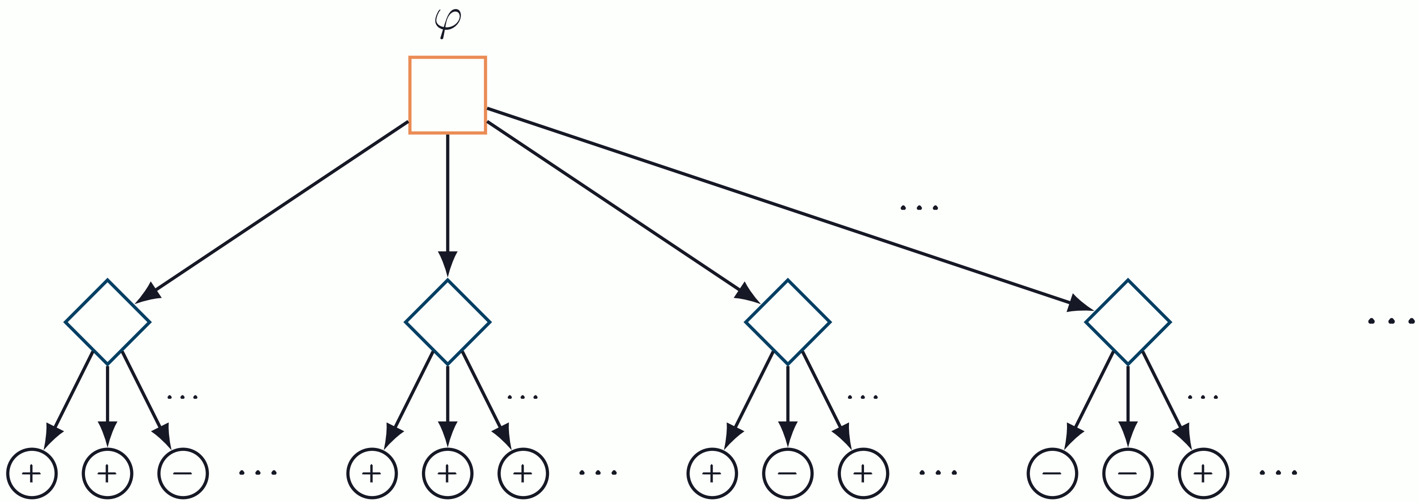
Formuła jako gra

Formuła jako gra

$$\varphi \equiv \forall x \in \mathbb{N}.\ \exists y \in \mathbb{N}.\ \psi(x, y)$$

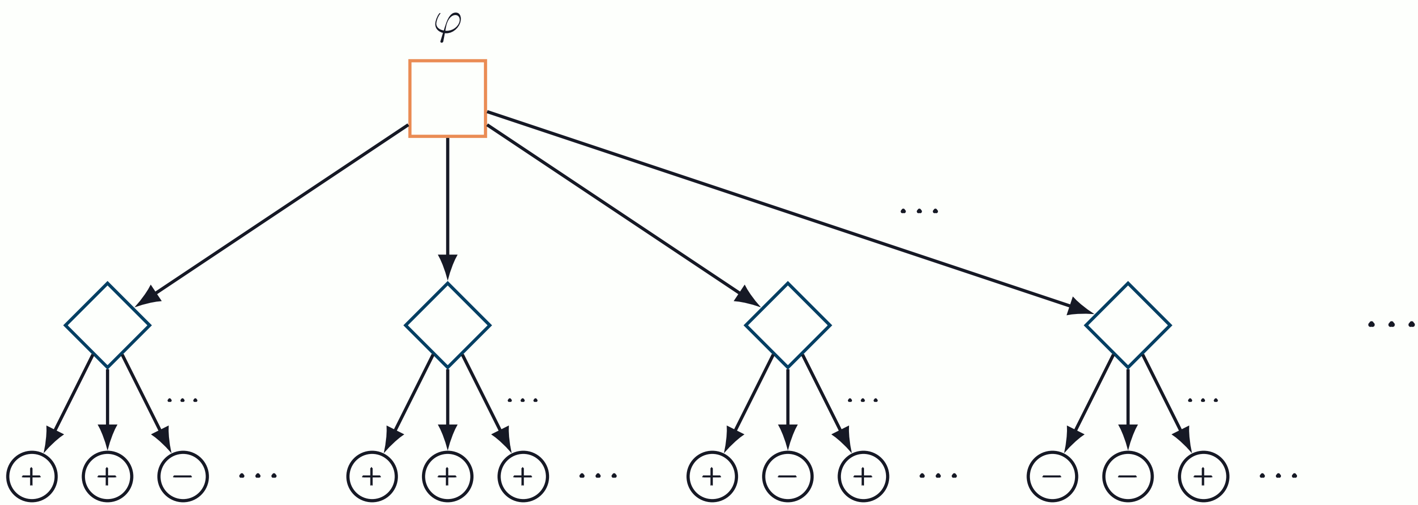
Formuła jako gra

$$\varphi \equiv \forall x \in \mathbb{N}.\ \exists y \in \mathbb{N}.\ \psi(x, y)$$



Formuła jako gra

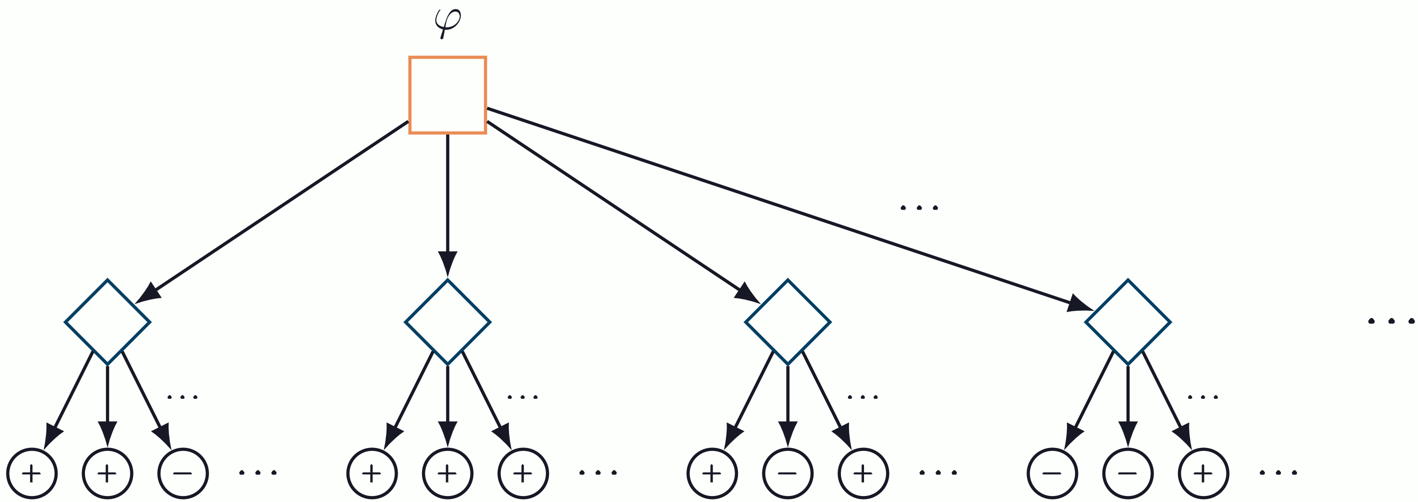
$$\varphi \equiv \forall x \in \mathbb{N}.\ \exists y \in \mathbb{N}.\ \psi(x, y)$$



E wygrywa: $\forall x \in \mathbb{N}.\ \exists y \in \mathbb{N}.\ \psi(x, y) \qquad \equiv \qquad \varphi$

Formuła jako gra

$$\varphi \equiv \forall x \in \mathbb{N}.\ \exists y \in \mathbb{N}.\ \psi(x, y)$$

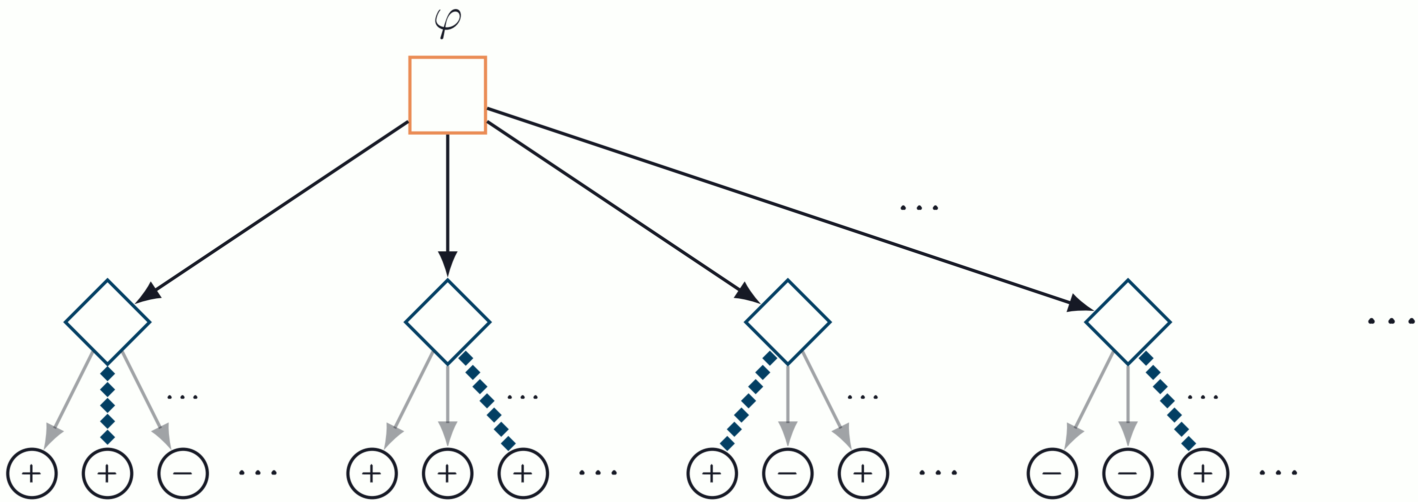


E wygrywa: $\forall x \in \mathbb{N}.\ \exists y \in \mathbb{N}.\ \psi(x, y) \equiv \varphi$

A wygrywa: $\exists x \in \mathbb{N}.\ \forall y \in \mathbb{N}.\ \neg\psi(x, y) \equiv \neg\varphi$

Formuła jako gra

$$\varphi \equiv \forall x \in \mathbb{N}.\ \exists y \in \mathbb{N}.\ \psi(x, y)$$



E wygrywa: $\forall x \in \mathbb{N}.\ \exists y \in \mathbb{N}.\ \psi(x, y) \quad \equiv \quad \varphi$

A wygrywa: $\exists x \in \mathbb{N}.\ \forall y \in \mathbb{N}.\ \neg\psi(x, y) \quad \equiv \neg\varphi$

Btw. Strategia $\equiv$ *Skolemizacja*

Nieskończone rozgrywki?

Nieskończone rozgrywki?

$\alpha = 0.$

Nieskończone rozgrywki?

$\alpha = 0.3$

A: 3

Nieskończone rozgrywki?

$\alpha = 0.\,3\,6$

A: 3

E: 6

Nieskończone rozgrywki?

$$\alpha = 0.\,3\,6\,7$$

A: 3 **A**: 7

E: 6

Nieskończone rozgrywki?

$\alpha = 0.\,3\,6\,7\,8$

A: 3 **A**: 7

E: 6 **E**: 8

Nieskończone rozgrywki?

$\alpha = 0.36787$

A: 3 **A**: 7 **A**: 7

E: 6 **E**: 8

Nieskończone rozgrywki?

$\alpha = 0.367879$

A: 3 **A**: 7 **A**: 7

E: 6 **E**: 8 **E**: 9

Nieskończone rozgrywki?

$$\alpha = 0.367879441171442321595523770161460867$$

A: 3	**A**: 7	**A**: 7	**A**: 4	**A**: 1	**A**: 7	**A**: 4	**A**: 2	**A**: 2	**A**: 5
E: 6	**E**: 8	**E**: 9	**E**: 4	**E**: 1	**E**: 1	**E**: 4	**E**: 3	**E**: 1	**E**: 9

Nieskończone rozgrywki?

$$\alpha = 0.3678794411714423215955237701614608674$$

A: 3	**A**: 7	**A**: 7	**A**: 4	**A**: 1	**A**: 7	**A**: 4	**A**: 2	**A**: 2	**A**: 5
E: 6	**E**: 8	**E**: 9	**E**: 4	**E**: 1	**E**: 1	**E**: 4	**E**: 3	**E**: 1	**E**: 9

- **E** wygrywa jeśli $\alpha \in \mathbb{Q}$

Nieskończone rozgrywki?

$$\alpha = 0.3\,6\,7\,8\,7\,9\,4\,4\,1\,1\,7\,1\,4\,4\,2\,3\,2\,1\,5\,9\,5\,5\,2\,3\,7\,7\,0\,1\,6\,1\,4\,6\,0\,8\,6\,7\,4$$

Nieskończone rozgrywki?

$$\alpha = 0.367879441171442321595523770161460867$$

W rundzie $i = 0, 1, 2 \ldots$

- **A**: d_{2i}
- **E**: d_{2i+1}

Nieskończone rozgrywki?

$$\alpha = 0.367879441171442321595523770161460867$$

W rundzie $i = 0, 1, 2 \ldots$

- **A**: d_{2i}
- **E**: d_{2i+1}

- **E** wygrywa jeśli $0.d_0 d_1 d_2 \cdots \in \mathbb{Q}$

Nieskończone rozgrywki?

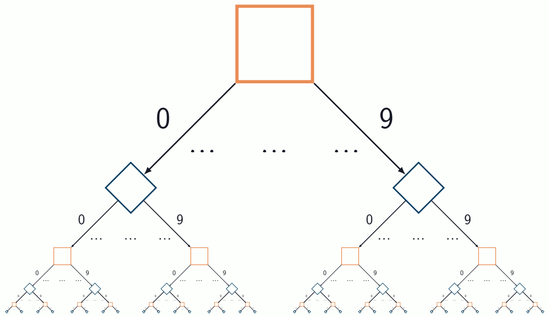
$$\alpha = 0.3678794411714423215955237701614608674$$

W rundzie $i = 0, 1, 2 \ldots$

A: d_{2i}

E: d_{2i+1}

- **E** wygrywa jeśli $0.d_0 d_1 d_2 \cdots \in \mathbb{Q}$



Nieskończone rozgrywki?

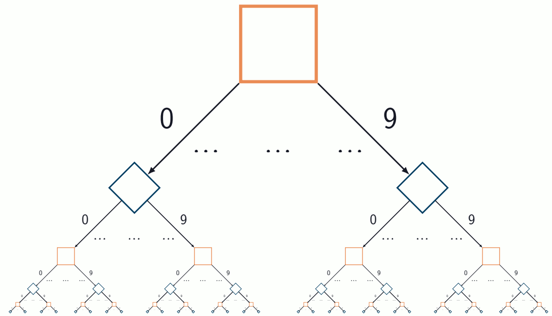
$$\alpha = 0.3678794411714423215955237701614608674$$

W rundzie $i = 0, 1, 2 \ldots$

A: d_{2i}

E: d_{2i+1}

- **E** wygrywa jeśli $0.d_0 d_1 d_2 \cdots \in \mathbb{Q}$



Bardziej formalnie

Nieskończone rozgrywki?

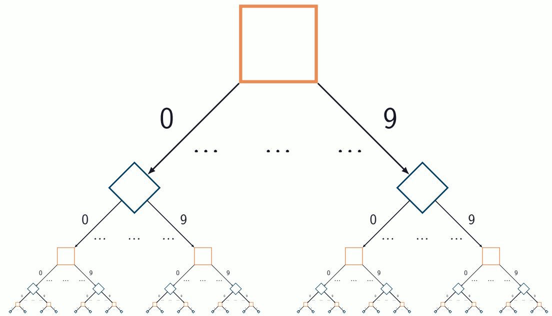
$\alpha = 0.367879441171442321595523770161460867$ …

W rundzie $i = 0, 1, 2 \ldots$

A: d_{2i}

E: d_{2i+1}

- **E** wygrywa jeśli $0.d_0 d_1 d_2 \cdots \in \mathbb{Q}$



Bardziej formalnie

- gracze podejmują decyzje: $d_i \in \mathbf{D}$ $\big($tutaj $\mathbf{D} = \{0, \ldots, 9\}\big)$

Nieskończone rozgrywki?

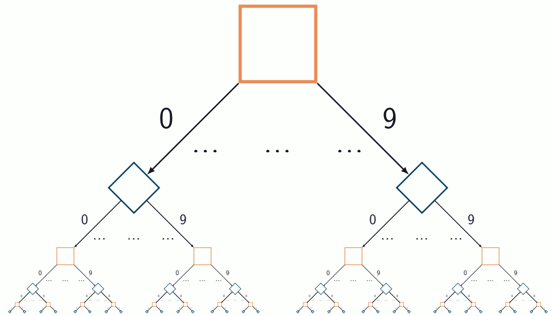
$$\alpha = 0.367879441171442321595523770161460867$$

W rundzie $i = 0, 1, 2 \ldots$

A: d_{2i}

E: d_{2i+1}

- **E** wygrywa jeśli $0.d_0 d_1 d_2 \cdots \in \mathbb{Q}$



Bardziej formalnie

- gracze podejmują decyzje: $d_i \in \mathbf{D}$ $\big(\text{tutaj } \mathbf{D} = \{0, \ldots, 9\}\big)$
- powstaje nieskończona rozgrywka: $\alpha = d_0 d_1 \cdots \in \mathbf{D}^\omega$ $\big(\text{tutaj } \alpha \cong e^{-1}\big)$

Nieskończone rozgrywki?

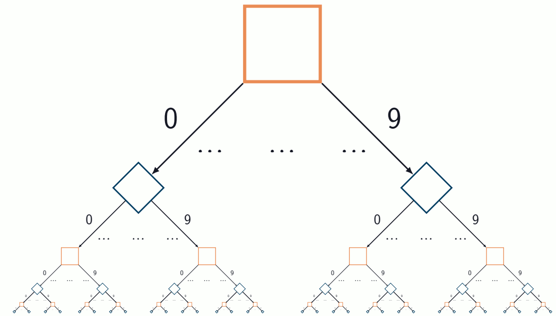
$$\alpha = 0.367879441171442321595523770161460867\ldots$$

W rundzie $i = 0, 1, 2\ldots$

A: d_{2i}

E: d_{2i+1}

- **E** wygrywa jeśli $0.d_0 d_1 d_2 \cdots \in \mathbb{Q}$



Bardziej formalnie

- gracze podejmują decyzje: $d_i \in \mathbf{D}$ $\big($tutaj $\mathbf{D} = \{0, \ldots, 9\}\big)$
- powstaje nieskończona rozgrywka: $\alpha = d_0 d_1 \cdots \in \mathbf{D}^\omega$ $\big($tutaj $\alpha \cong e^{-1}\big)$
- sprawdzamy warunek wygrywania: $\alpha \overset{?}{\in} \mathbf{W} \subseteq \mathbf{D}^\omega$ $\big($tutaj $\mathbf{W} \cong \mathbb{Q}\big)$

Nieskończone rozgrywki?

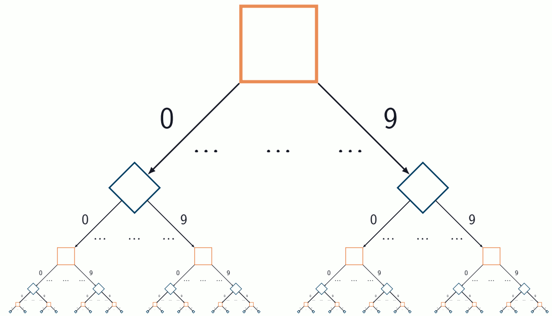
$$\alpha = 0.3678794411714423215955237701614608674$$

W rundzie $i = 0, 1, 2 \ldots$

A: d_{2i}

E: d_{2i+1}

- **E** wygrywa jeśli $0.d_0 d_1 d_2 \cdots \in \mathbb{Q}$



Bardziej formalnie

- gracze podejmują decyzje: $d_i \in \mathbf{D}$ $\big($tutaj $\mathbf{D} = \{0, \ldots, 9\}\big)$
- powstaje nieskończona rozgrywka: $\alpha = d_0 d_1 \cdots \in \mathbf{D}^\omega$ $\big($tutaj $\alpha \cong e^{-1}\big)$
- sprawdzamy warunek wygrywania: $\alpha \overset{?}{\in} \mathbf{W} \subseteq \mathbf{D}^\omega$ $\big($tutaj $\mathbf{W} \cong \mathbb{Q}\big)$

Nieskończona kwantyfikacja

Nieskończone rozgrywki?

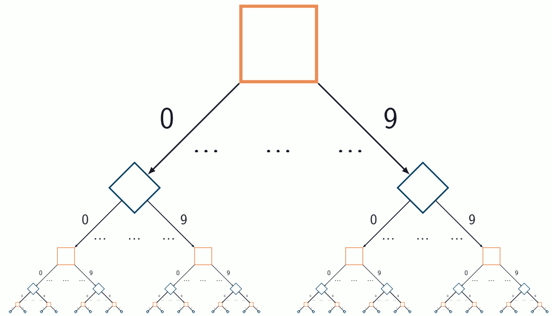
$$\alpha = 0.36787944117144232159552377016146086 7\ldots$$

W rundzie $i = 0, 1, 2 \ldots$

A: d_{2i}

E: d_{2i+1}

- **E** wygrywa jeśli $0.d_0 d_1 d_2 \cdots \in \mathbb{Q}$



Bardziej formalnie

- gracze podejmują decyzje: $d_i \in \mathbf{D}$ $\big($tutaj $\mathbf{D} = \{0, \ldots, 9\}\big)$
- powstaje nieskończona rozgrywka: $\alpha = d_0 d_1 \cdots \in \mathbf{D}^\omega$ $\big($tutaj $\alpha \cong e^{-1}\big)$
- sprawdzamy warunek wygrywania: $\alpha \overset{?}{\in} \mathbf{W} \subseteq \mathbf{D}^\omega$ $\big($tutaj $\mathbf{W} \cong \mathbb{Q}\big)$

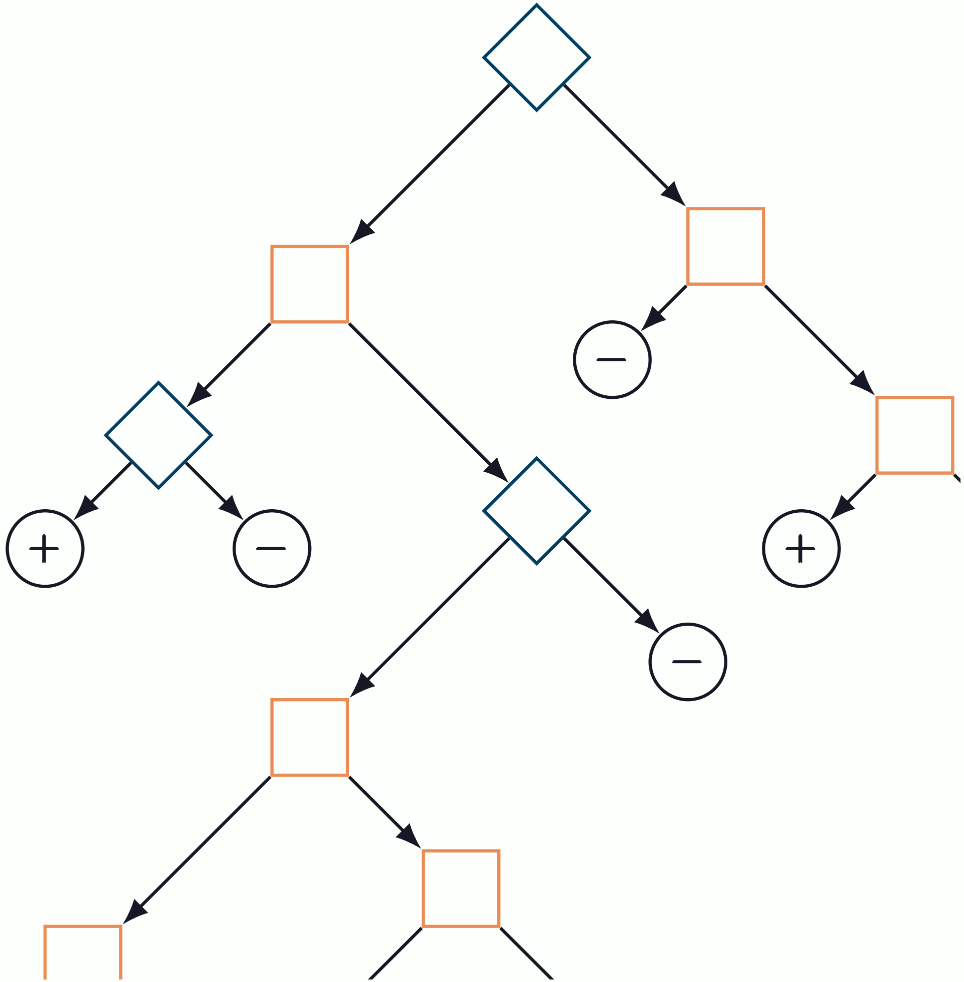
Nieskończona kwantyfikacja

$$\forall d_0 \in \mathbf{D}.\ \ \exists d_1 \in \mathbf{D}.\ \ \forall d_2 \in \mathbf{D}.\ \ \exists d_3 \in \mathbf{D}.\ \ \forall d_4 \in \mathbf{D}.\ \ \ldots$$

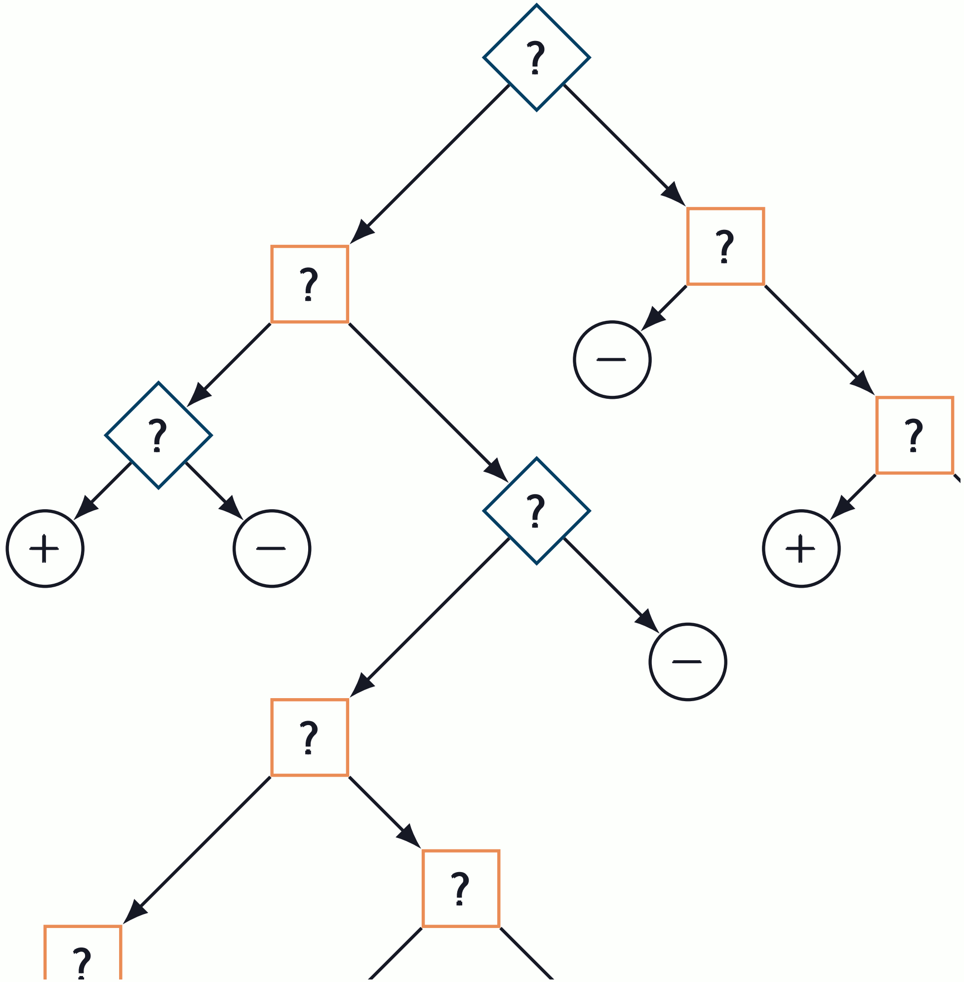
Najprostszy wariant: $\mathbf{W} = \varnothing$

Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \varnothing}_{\text{A wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$

Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \emptyset}_{\text{A wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$

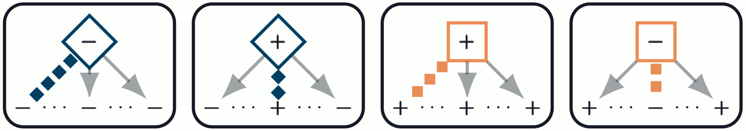


Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \varnothing}_{\text{A wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$

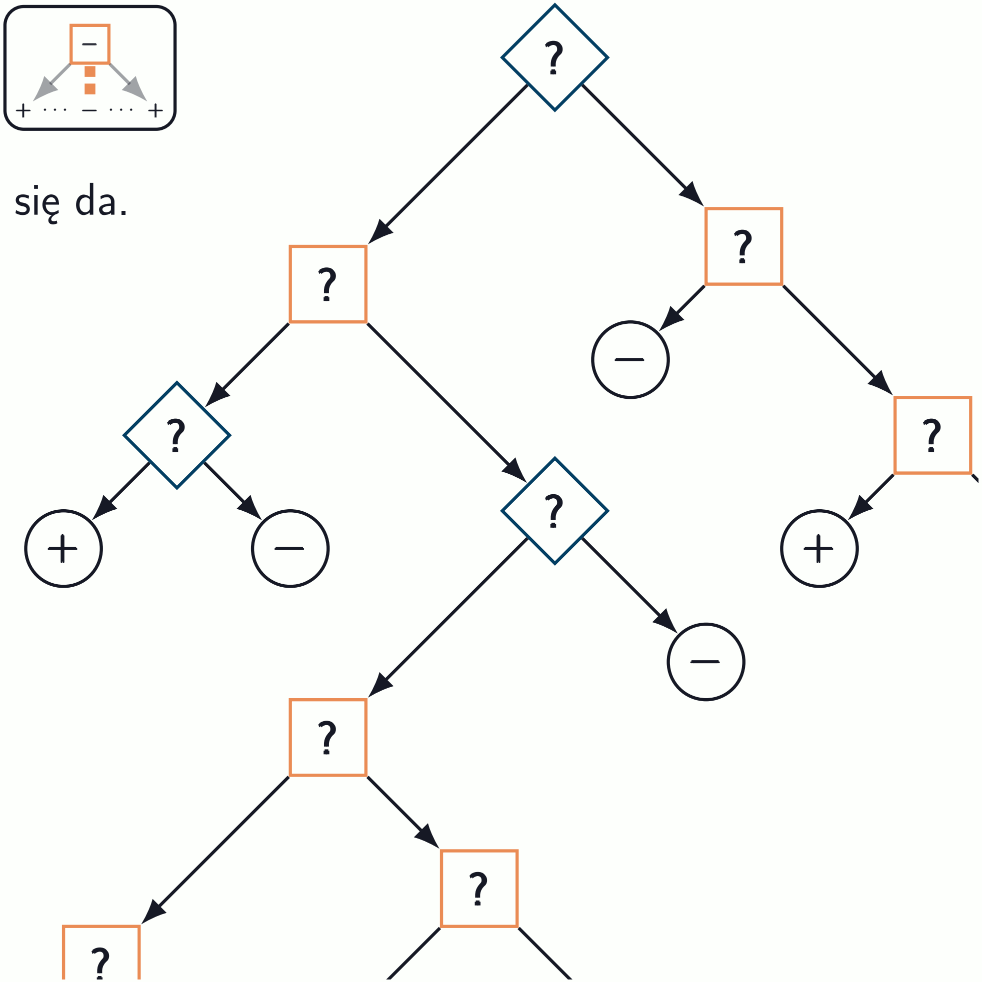


Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \varnothing}_{}$

A wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki

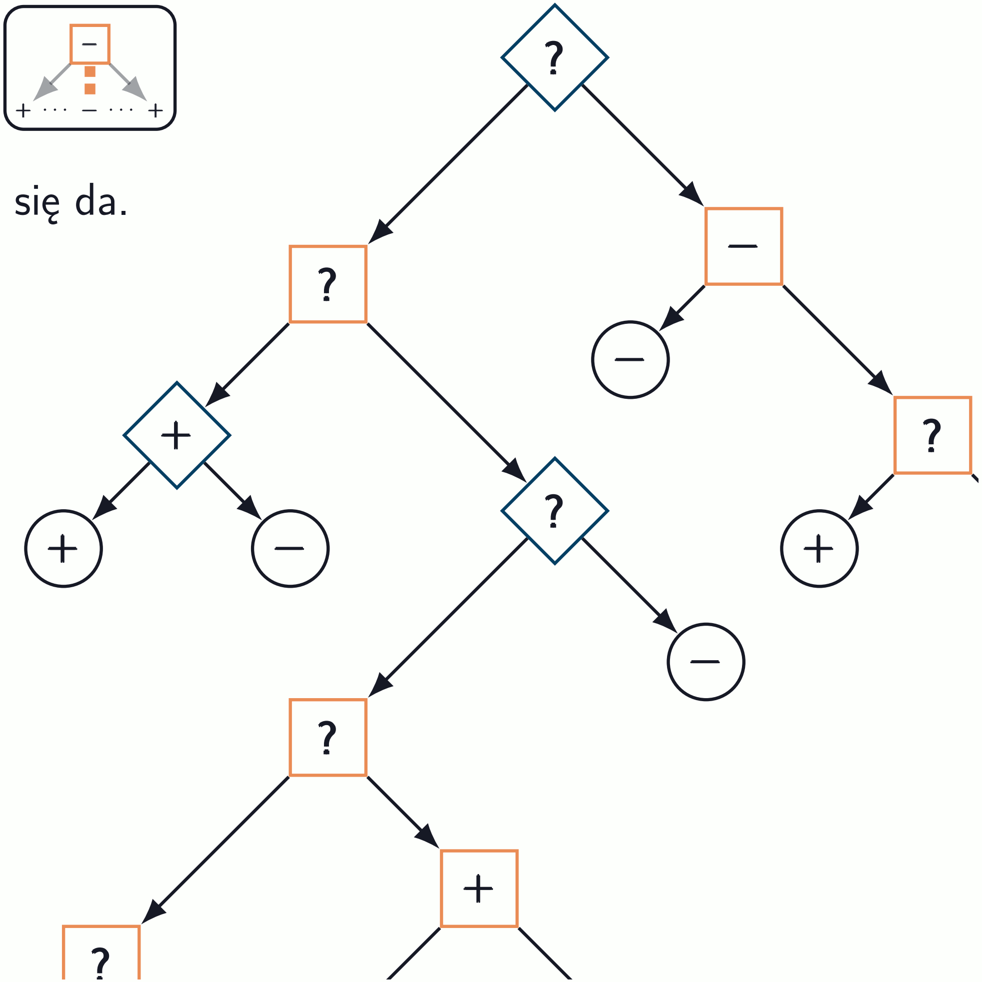


1. Stosuj lokalne zasady dopóki się da.

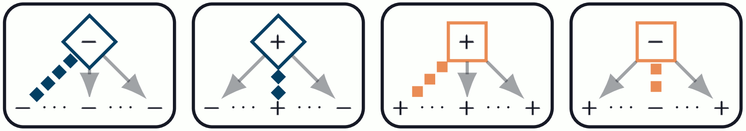


Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \varnothing}_{\textbf{A}\text{ wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$

1. Stosuj lokalne zasady dopóki się da.

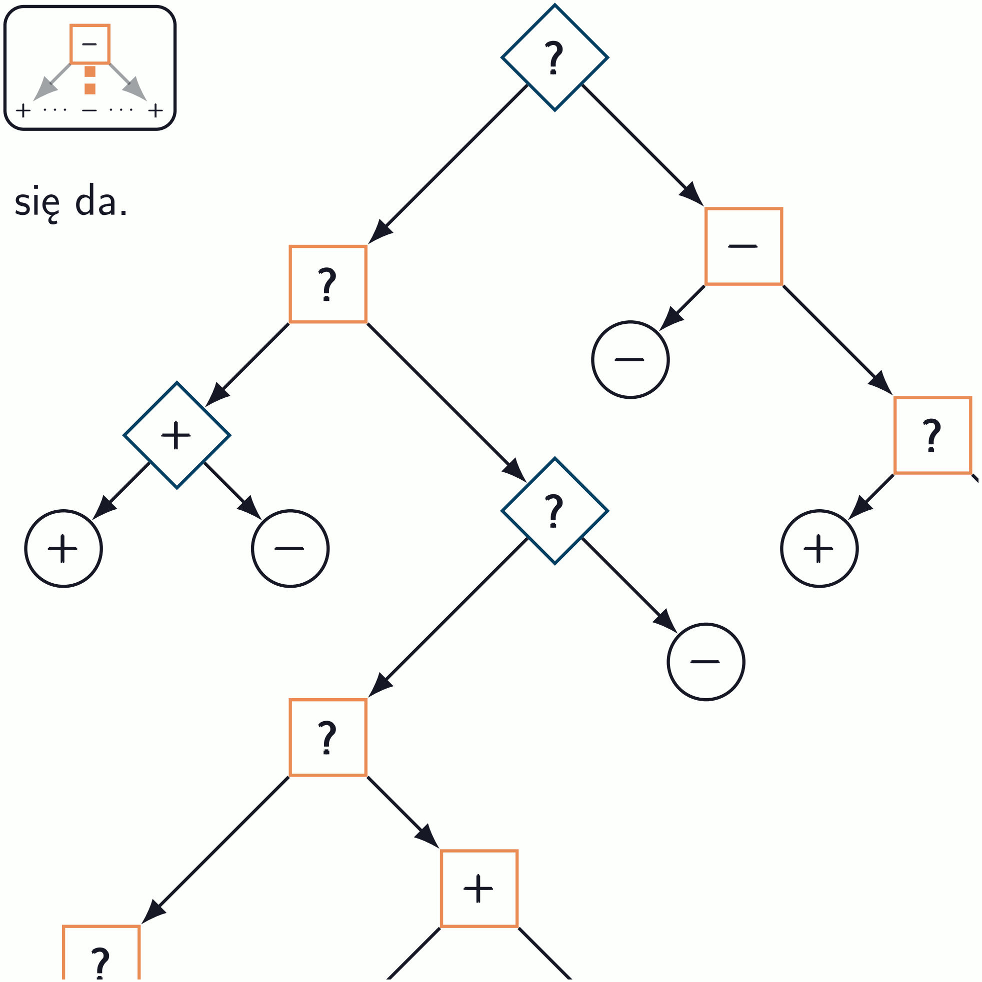


Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathsf{W} = \emptyset}_{\textsf{A wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$

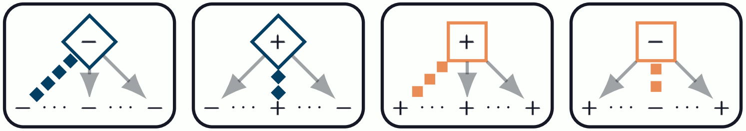


1. Stosuj lokalne zasady dopóki się da.

2. Zamień pozostałe **?** na $-$.

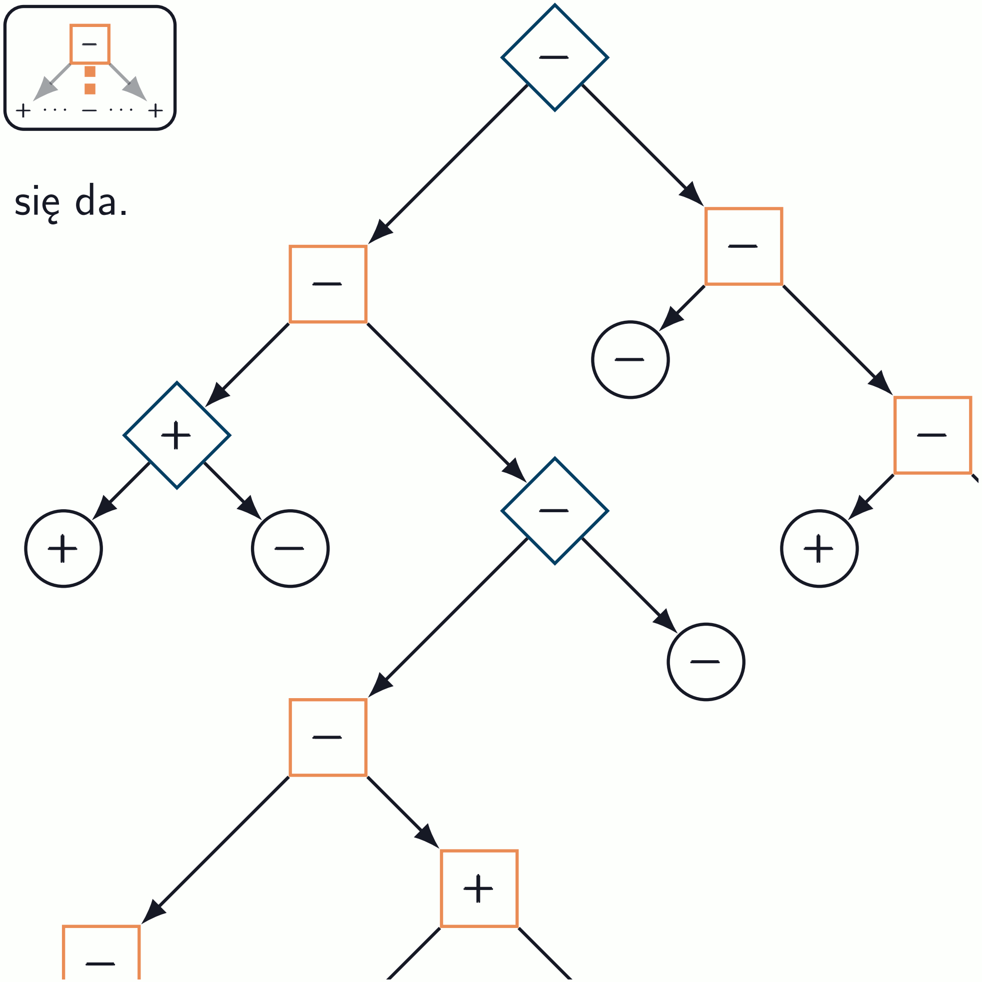


Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \emptyset}_{\textbf{A}\text{ wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$

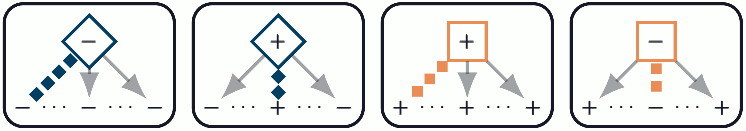


1. Stosuj lokalne zasady dopóki się da.

2. Zamień pozostałe **?** na $-$.



Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \varnothing}_{\text{A wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$

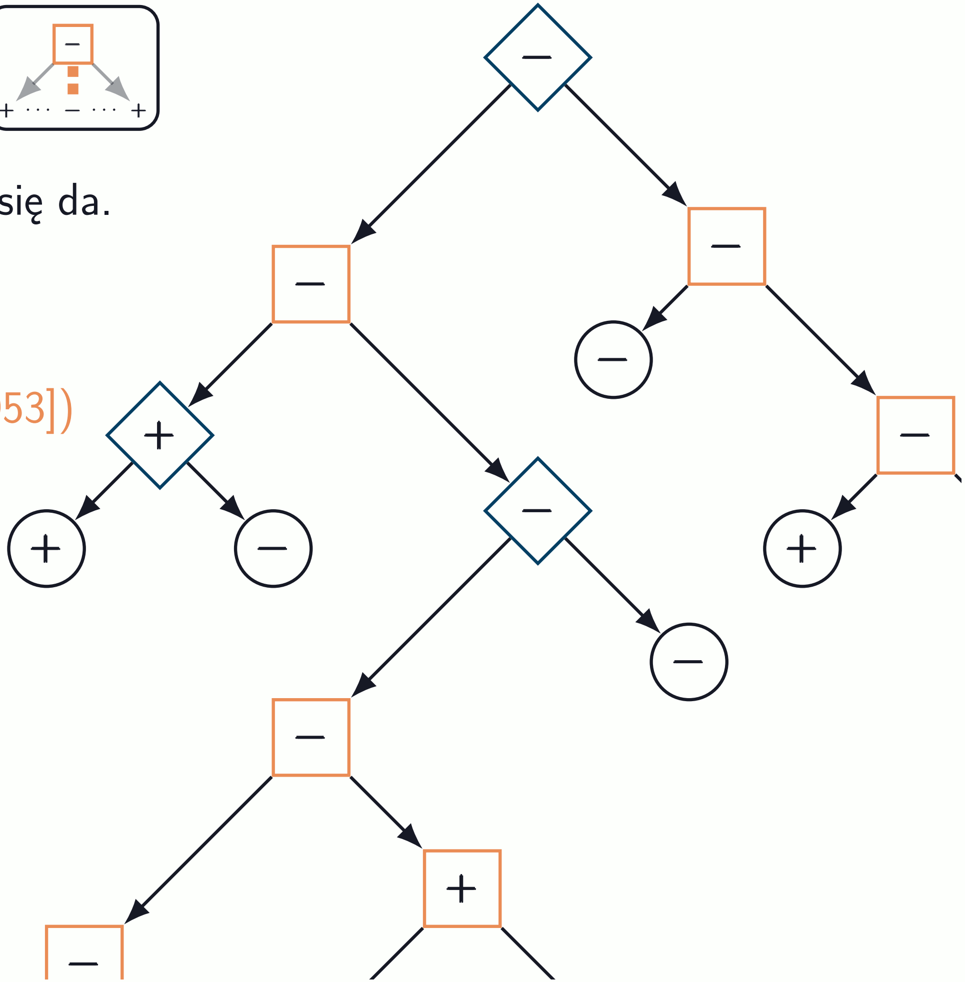


1. Stosuj lokalne zasady dopóki się da.

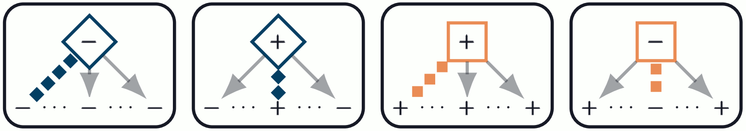
2. Zamień pozostałe **?** na $-$.

Twierdzenie (Gale, Stewart [1953])

Jeśli **W** jest otwarty ($\mathbf{\Sigma}^0_1$) to gra jest **zdeterminowana**.



Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \varnothing}_{\text{A wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$



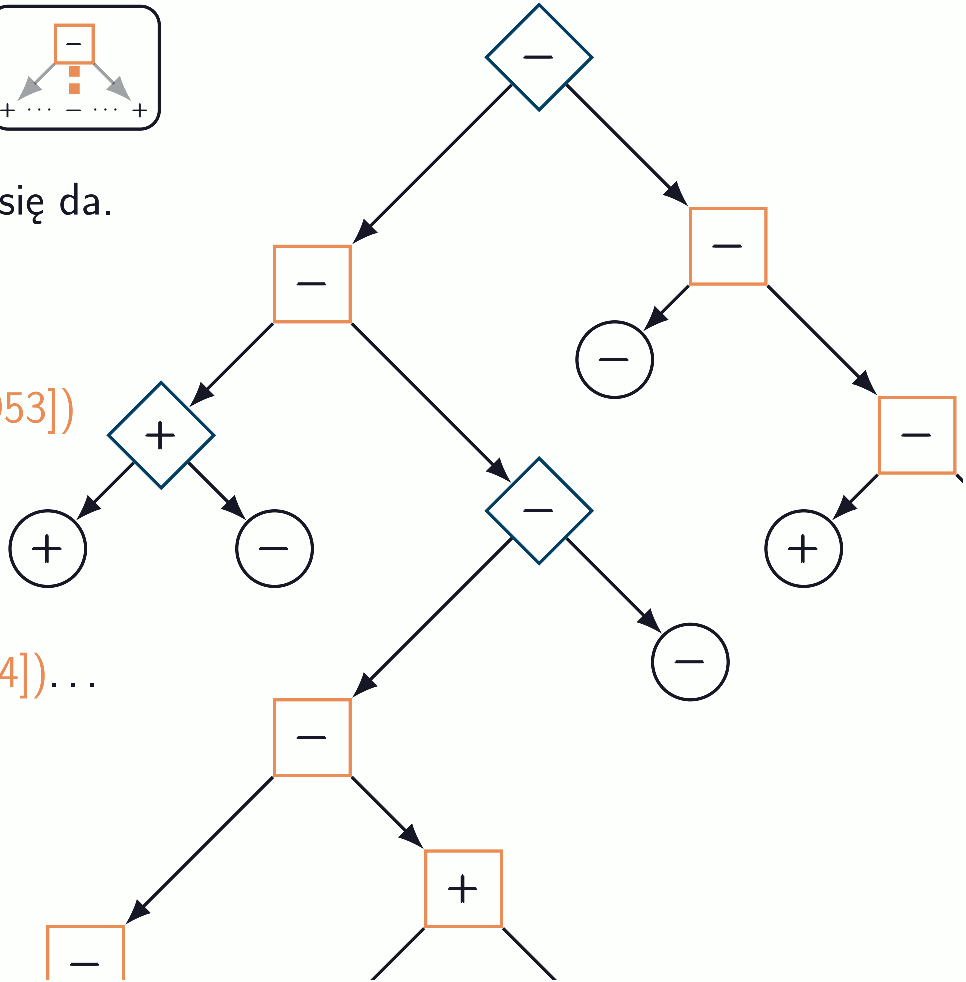
1. Stosuj lokalne zasady dopóki się da.

2. Zamień pozostałe **?** na −.

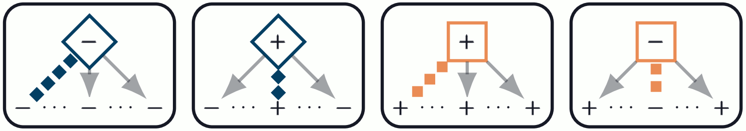
Twierdzenie (Gale, Stewart [1953])

Jeśli **W** jest otwarty ($\boldsymbol{\Sigma}^0_1$) to gra jest **zdeterminowana**.

…(Wolfe [1955])…(Davis [1964])…



Najprostszy wariant: $\underbrace{\mathbf{W} = \varnothing}_{\text{A wygrywa wszystkie nieskończone rozgrywki}}$



1. Stosuj lokalne zasady dopóki się da.

2. Zamień pozostałe **?** na $-$.

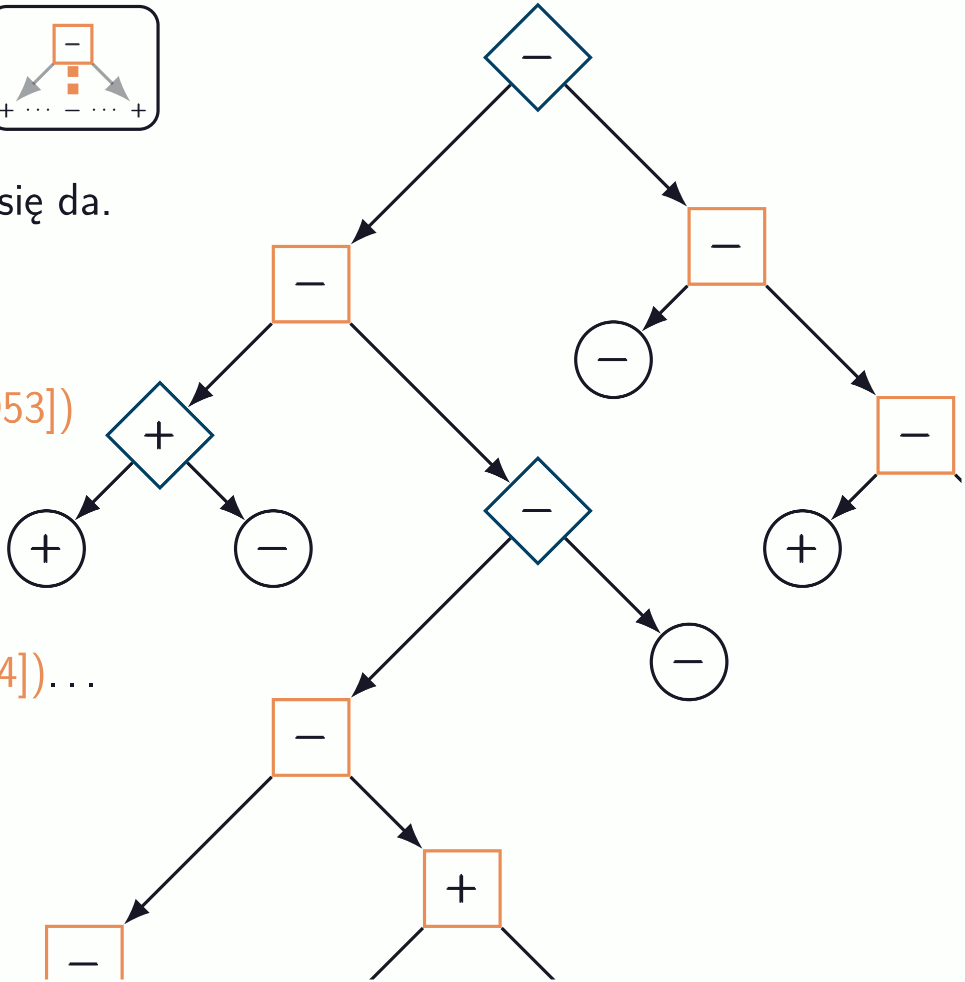
Twierdzenie (Gale, Stewart [1953])

Jeśli **W** jest otwarty ($\mathbf{\Sigma}^0_1$) to gra jest **zdeterminowana**.

…(Wolfe [1955])…(Davis [1964])…

Twierdzenie (Martin [1975])

Jeśli **W** jest borelowski to gra jest **zdeterminowana**.



Zamiana kwantyfikatorów

Zamiana kwantyfikatorów

$$\forall y. \quad \exists x. \quad \text{zachodzi } \psi(x, y)$$

$$\exists x. \quad \forall y. \quad \text{zachodzi } \psi(x, y)$$

Zamiana kwantyfikatorów

$$\forall y. \quad \exists x. \quad \text{zachodzi } \psi(x, y)$$

''one x to rule them all''

$$\exists x. \quad \forall y. \quad \text{zachodzi } \psi(x, y)$$

Zamiana kwantyfikatorów

$$\forall y.\quad \exists x.\quad \text{zachodzi } \psi(x, y)$$

''one x to rule them all''

$$\exists x.\quad \forall y.\quad \text{zachodzi } \psi(x, y)$$

Zamiana kwantyfikatorów

$$\forall y. \quad \exists x. \quad \text{zachodzi } \psi(x, y)$$

''one x to rule *them all*''

? ?

$$\exists x. \quad \forall y. \quad \text{zachodzi } \psi(x, y)$$

Zamiana kwantyfikatorów

$$\forall \sigma_{\mathsf{A}}.\ \exists \sigma_{\mathsf{E}}.\ \sigma_{\mathsf{E}} \text{ wygrywa z } \sigma_{\mathsf{A}}$$

? ?

$$\exists \sigma_{\mathsf{E}}.\ \forall \sigma_{\mathsf{A}}.\ \sigma_{\mathsf{E}} \text{ wygrywa z } \sigma_{\mathsf{A}}$$

Zamiana kwantyfikatorów

$$\forall \sigma_{\mathsf{A}}.\ \exists \sigma_{\mathsf{E}}.\ \sigma_{\mathsf{E}} \text{ wygrywa z } \sigma_{\mathsf{A}}$$

$$\Downarrow$$

$$\neg\left(\mathsf{A} \text{ wygrywa grę}\right)$$

? ?

$$\exists \sigma_{\mathsf{E}}.\ \forall \sigma_{\mathsf{A}}.\ \sigma_{\mathsf{E}} \text{ wygrywa z } \sigma_{\mathsf{A}}$$

Zamiana kwantyfikatorów

$$\forall \sigma_{\mathsf{A}}.\ \exists \sigma_{\mathsf{E}}.\ \sigma_{\mathsf{E}} \text{ wygrywa z } \sigma_{\mathsf{A}}$$

$$\Downarrow$$

$$\neg\big(\mathsf{A} \text{ wygrywa grę}\big)$$

determinacja

$$\big(\mathsf{E} \text{ wygrywa grę}\big)$$

? **?**

$$\exists \sigma_{\mathsf{E}}.\ \forall \sigma_{\mathsf{A}}.\ \sigma_{\mathsf{E}} \text{ wygrywa z } \sigma_{\mathsf{A}}$$

Zamiana kwantyfikatorów

$$\forall \sigma_{\mathsf{A}}.\ \exists \sigma_{\mathsf{E}}.\ \sigma_{\mathsf{E}} \text{ wygrywa z } \sigma_{\mathsf{A}}$$

$$\Downarrow$$

$$\neg\,(\mathsf{A} \text{ wygrywa grę})$$

determinacja

$$(\mathsf{E} \text{ wygrywa grę})$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \sigma_{\mathsf{E}}.\ \forall \sigma_{\mathsf{A}}.\ \sigma_{\mathsf{E}} \text{ wygrywa z } \sigma_{\mathsf{A}}$$

Operacja XOR ($\oplus$)

Operacja XOR ($\oplus$)

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Operacja XOR ($\oplus$)

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}_{\text{suma w } \mathbb{Z}_2}$$

Operacja XOR ($\oplus$)

$$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$$

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}_{\text{suma w } \mathbb{Z}_2}$$

Operacja XOR ($\oplus$)

$\textbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$

$\textbf{XOR}(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1) = 1$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

Operacja XOR ($\oplus$)

$$\textbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$$

$$\textbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 0, 1) = 1$$

$$\textbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{1}, 1, 0, 1) = 0$$

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}_{\text{suma w } \mathbb{Z}_2}$$

Operacja XOR ($\oplus$)

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

$$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$$

$$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 0, 1) = 1$$

$$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{1}, 1, 0, 1) = 0$$

Nieskończony XOR

Operacja XOR ($\oplus$)

$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$

$\mathbf{XOR}(0,0,1,0,\underline{0},1,0,1) = 1$

$\mathbf{XOR}(0,0,1,0,\underline{1},1,0,1) = 0$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

Nieskończony XOR

$\mathbf{XOR}(0,0,1,0,0,1,\cdots) = ???$

Operacja XOR ($\oplus$)

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

$$\textbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$$

$$\textbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 0, 1) = 1$$

$$\textbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{1}, 1, 0, 1) = 0$$

Nieskończony XOR

Operacja XOR ($\oplus$)

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$

$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 0, 1) = 1$

$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{1}, 1, 0, 1) = 0$

Nieskończony XOR

Definicja

Operacja $\mathbf{XOR}\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ to nieskończony **XOR** jeśli

Operacja XOR ($\oplus$)

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$

$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 0, 1) = 1$

$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{1}, 1, 0, 1) = 0$

Nieskończony XOR

Definicja

Operacja **XOR**: $\{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ to nieskończony **XOR** jeśli

$$\mathbf{XOR}(0110011101011\mathbf{1}11011110101\cdots) = 1$$

wtw.

$$\mathbf{XOR}(0110011101010\mathbf{0}11011110101\cdots) \neq 1$$

Operacja XOR ($\oplus$)

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

$$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$$

$$\mathbf{XOR}(0,0,1,0,\underline{0},1,0,1) = 1$$

$$\mathbf{XOR}(0,0,1,0,\underline{1},1,0,1) = 0$$

Nieskończony XOR

Definicja

Operacja $\mathbf{XOR}\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ to nieskończony **XOR** jeśli

$$\mathbf{XOR}(01100111010 1\mathbf{1}11011110101\cdots) = 1$$

wtw.

$$\mathbf{XOR}(011001110101\mathbf{0}11011110101\cdots) \neq 1$$

Fakty

Operacja XOR ($\oplus$)

$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$

$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 0, 1) = 1$

$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{1}, 1, 0, 1) = 0$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

Nieskończony XOR

Definicja

Operacja $\mathbf{XOR}\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ to nieskończony **XOR** jeśli

$$\mathbf{XOR}(0110011101011\mathbf{1}11011110101\cdots) = 1$$

wtw.

$$\mathbf{XOR}(0110011101011\mathbf{0}11011110101\cdots) \neq 1$$

Fakty

Istnieje nieskończony **XOR**. (aksjomat wyboru)

Operacja XOR ($\oplus$)

$$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$$

$$\mathbf{XOR}(0,0,1,0,\underline{0},1,0,1) = 1$$

$$\mathbf{XOR}(0,0,1,0,\underline{1},1,0,1) = 0$$

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}_{\text{suma w } \mathbb{Z}_2}$$

Nieskończony XOR

Definicja

Operacja $\mathbf{XOR}\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ to nieskończony **XOR** jeśli

$$\mathbf{XOR}(011001110101\mathbf{1}11011110101\cdots) = 1$$

wtw.

$$\mathbf{XOR}(011001110101\mathbf{0}11011110101\cdots) \neq 1$$

Fakty

Istnieje nieskończony **XOR**. (aksjomat wyboru) $\left[\text{ jest ich } 2^{\mathfrak{c}}\ \right]$

Operacja XOR ($\oplus$)

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}_{\text{suma w } \mathbb{Z}_2}$$

$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$

$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 0, 1) = 1$

$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{1}, 1, 0, 1) = 0$

Nieskończony XOR

Definicja

Operacja $\mathbf{XOR}\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ to nieskończony **XOR** jeśli

$$\mathbf{XOR}(01100111010\mathbf{1}1\,11011110101\cdots) = 1$$

wtw.

$$\mathbf{XOR}(01100111010\mathbf{0}11011110101\cdots) \neq 1$$

Fakty

Istnieje nieskończony **XOR**. (aksjomat wyboru) [jest ich $2^{\mathfrak{c}}$]

Istnieje nawet taki, że $\mathbf{XOR}(0, 0, \ldots) = 1$

Operacja XOR ($\oplus$)

$$\mathbf{XOR}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$$

$$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{0}, 1, 0, 1) = 1$$

$$\mathbf{XOR}(0, 0, 1, 0, \underline{1}, 1, 0, 1) = 0$$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

suma w $\mathbb{Z}_2$

Nieskończony XOR

Definicja

Operacja $\mathbf{XOR}\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ to nieskończony **XOR** jeśli

$$\mathbf{XOR}(01100111010\mathbf{1}11011110101\cdots) = 1$$

wtw.

$$\mathbf{XOR}(01100111010\mathbf{0}11011110101\cdots) \neq 1$$

Fakty

Istnieje nieskończony **XOR**. (aksjomat wyboru) [jest ich $2^{\mathfrak{c}}$]

Istnieje nawet taki, że $\mathbf{XOR}(0, 0, \ldots) = 1$

Każdy nieskończony **XOR** jest nieborelowski, niemierzalny, bez BP, ...

Gra niezdeterminowana (AKA *zupa ogórkowa*)

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), . . .)

A:

E:

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), . . .)

A: $\underline{01010}$

E:

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A: $\underline{01010}$

E: $\underline{11000}$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A: $\underline{01010}$ $\underline{10}$

E: $\underline{11000}$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A: 01010 10

E: 11000 0

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A: $\underline{01010}$ $\underline{10}$ $\underline{1001001}$

E: $\underline{11000}$ $\underline{0}$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A:	<u>01010</u>		<u>10</u>		<u>1001001</u>		
E:		<u>11000</u>		<u>0</u>		<u>00011</u>	

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), . . .)

A:	$\underline{01010}$		$\underline{10}$		$\underline{1001001}$		. . .
E:		$\underline{11000}$		$\underline{0}$		$\underline{00011}$	

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A: $\underline{01010}$ $\underline{10}$ $\underline{1001001}$

E: $\underline{11000}$ $\underline{0}$ $\underline{00011}$ $\cdots \rightsquigarrow \alpha \in \{0,1\}^\omega$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), …)

$$\begin{array}{llllllll} \textbf{A}: & \underline{01010} & & \underline{10} & & \underline{1001001} & & \\ \textbf{E}: & & \underline{11000} & & \underline{0} & & \underline{00011} & \cdots \end{array} \rightsquigarrow \alpha \in \{0,1\}^\omega$$

- **E** wygrywa jeśli **XOR**$(\alpha) = 1$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A: $\underline{01010}$ $\underline{10}$ $\underline{1001001}$

E: $\underline{11000}$ $\underline{0}$ $\underline{00011}$ $\cdots \rightsquigarrow \alpha \in \{0,1\}^\omega$

- **E** wygrywa jeśli **XOR**$(\alpha) = 1$

Lemat 1

E ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}} \implies$ **A** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

$$\begin{array}{llllllll} \mathbf{A}: & \underline{01010} & & \underline{10} & & \underline{1001001} & & \\ \mathbf{E}: & & \underline{11000} & & \underline{0} & & \underline{00011} & \cdots \end{array} \rightsquigarrow \alpha \in \{0,1\}^\omega$$

- **E** wygrywa jeśli $\mathbf{XOR}(\alpha) = 1$

Lemat 1

E ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}}$ $\implies$ **A** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$ $\implies$ **E** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}}$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A:	$\underline{01010}$		$\underline{10}$		$\underline{1001001}$		$\cdots \rightsquigarrow \alpha \in \{0,1\}^\omega$
E:		$\underline{11000}$		$\underline{0}$		$\underline{00011}$	

- **E** wygrywa jeśli **XOR**$(\alpha) = 1$

Lemat 1

E ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}} \implies$ **A** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}} \implies$ **E** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}}$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}} \implies$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** “strategy stealing” **]**

Lemat 2

$\mathbf{A}$ ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}} \implies \mathbf{E}$ ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: ["strategy stealing"]

$\sigma_{\mathbf{A}}$:

$\mathbf{E}$:

Lemat 2

$\mathbf{A}$ ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}} \implies \mathbf{E}$ ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: [“strategy stealing”]

$\sigma_{\mathbf{A}}$:

$\mathbf{E}$:

$\mathbf{A}$:

$\sigma_{\mathbf{E}}$:

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\implies$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** "strategy stealing" **]**

$\sigma_{\mathbf{A}}$:

E:

A: $\underline{r_0}$

$\sigma_{\mathbf{E}}$:

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}} \implies$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: ["strategy stealing"]

$\sigma_{\mathbf{A}}$: $\underline{s_0}$

E:

A: $\underline{r_0}$

$\sigma_{\mathbf{E}}$:

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\implies$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: ["strategy stealing"]

$\sigma_{\mathbf{A}}$: $\underline{s_0}$

E: $\underline{r_0 0}$

A: $\underline{r_0}$

$\sigma_{\mathbf{E}}$:

Lemat 2

$\mathbf{A}$ ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}} \implies \mathbf{E}$ ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: [“strategy stealing”]

$$\begin{array}{llll} \sigma_{\mathbf{A}}: & \underline{s_0} & & \underline{s_1} \\ \mathbf{E}: & & \underline{r_0 0} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}: & \underline{r_0} \\ \sigma_{\mathbf{E}}: & \end{array}$$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: [“strategy stealing”]

$\sigma_{\mathbf{A}}$: $\underline{s_0}$ $\underline{s_1}$

E: $\underline{r_0 0}$

A: $\underline{r_0}$

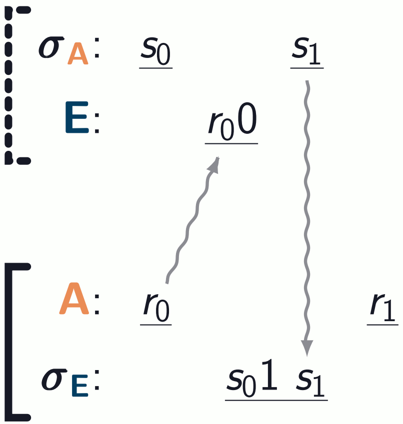
$\sigma_{\mathbf{E}}$: $\underline{s_0 1\ s_1}$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: [“strategy stealing”]



Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: [“strategy stealing”]

$$
\begin{array}{lllll}
\sigma_{\mathbf{A}}: & \underline{s_0} & & \underline{s_1} & \\
\mathbf{E}: & & \underline{r_0 0} & & \underline{r_1} \\
 & & & & \\
\mathbf{A}: & \underline{r_0} & & & \underline{r_1} \\
\sigma_{\mathbf{E}}: & & \underline{s_0 1 \; s_1} & &
\end{array}
$$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}} \implies$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: ["strategy stealing"]

$$\begin{array}{llllll} \sigma_{\mathbf{A}}: & \underline{s_0} & & \underline{s_1} & & \underline{s_2} \\ \mathbf{E}: & & \underline{r_0 0} & & \underline{r_1} & \\ & & & & & \\ \mathbf{A}: & \underline{r_0} & & & \underline{r_1} & \\ \sigma_{\mathbf{E}}: & & \underline{s_0 1\ s_1} & & & \end{array}$$

Lemat 2

$\mathbf{A}$ ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}} \implies \mathbf{E}$ ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** “strategy stealing” **]**

$$
\begin{array}{r|ccccc}
\sigma_{\mathbf{A}}: & \underline{s_0} & & \underline{s_1} & & \underline{s_2} \\
\mathbf{E}: & & \underline{r_0 0} & & \underline{r_1} & \\
\\
\mathbf{A}: & \underline{r_0} & & & \underline{r_1} & \\
\sigma_{\mathbf{E}}: & & \multicolumn{2}{c}{\underline{s_0 1 \ s_1}} & & \underline{s_2}
\end{array}
$$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\implies$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** “strategy stealing” **]**

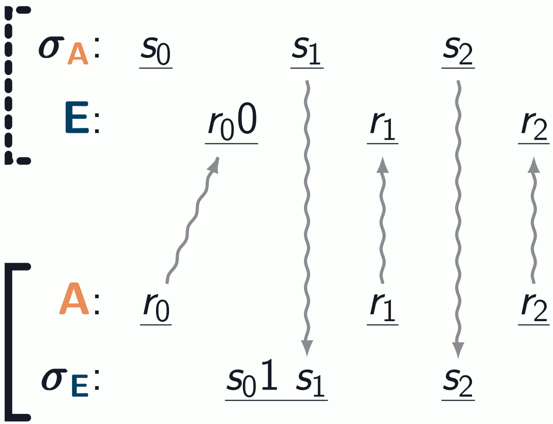
$$\begin{array}{rllllll}
\sigma_{\mathbf{A}}: & \underline{s_0} & & \underline{s_1} & & \underline{s_2} & \\
\mathbf{E}: & & \underline{r_0 0} & & \underline{r_1} & & \\
\mathbf{A}: & \underline{r_0} & & & \underline{r_1} & & \underline{r_2} \\
\sigma_{\mathbf{E}}: & & \underline{s_0 1\ s_1} & & & \underline{s_2} &
\end{array}$$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** “strategy stealing” **]**

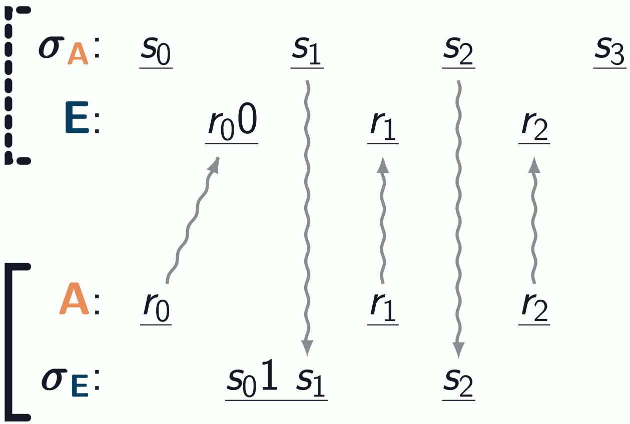


Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: [“strategy stealing”]

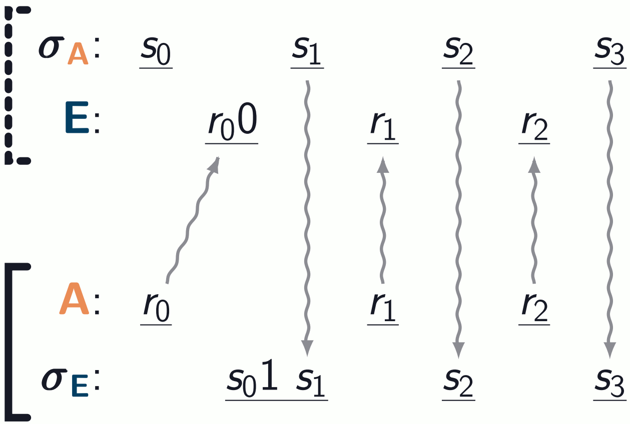


Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** "strategy stealing" **]**



Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** “strategy stealing” **]**

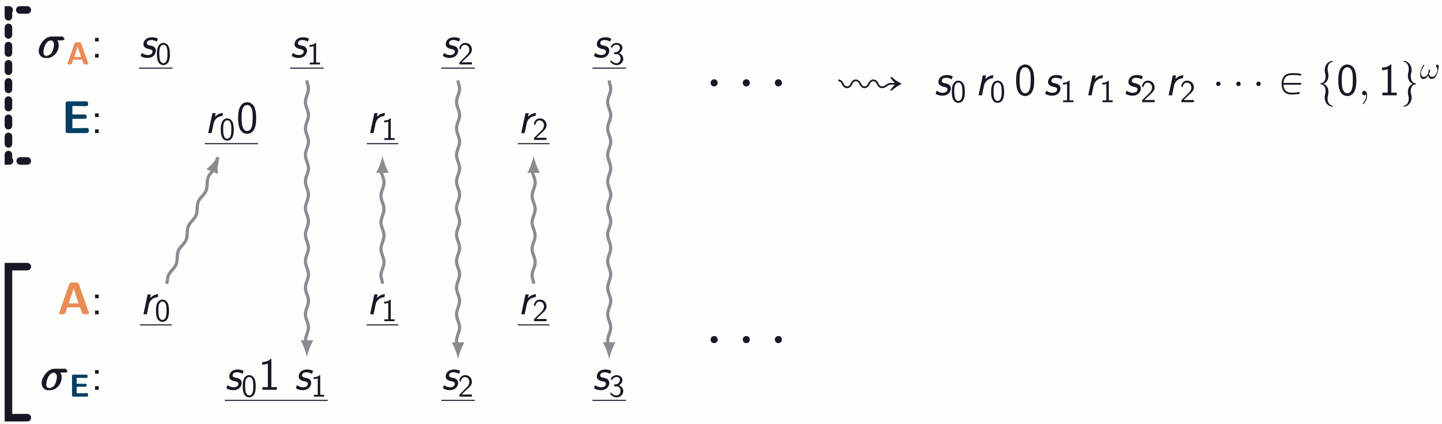
$$
\begin{array}{rcccccccc}
\sigma_{\mathbf{A}}: & \underline{s_0} & & \underline{s_1} & & \underline{s_2} & & \underline{s_3} & \cdots \\
\mathbf{E}: & & \underline{r_0 0} & & \underline{r_1} & & \underline{r_2} & & \\
& & & & & & & & \\
\mathbf{A}: & \underline{r_0} & & & \underline{r_1} & & \underline{r_2} & & \\
\sigma_{\mathbf{E}}: & & \underline{s_0 1} & \underline{s_1} & & \underline{s_2} & & \underline{s_3} & \cdots
\end{array}
$$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** "strategy stealing" **]**



Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** "strategy stealing" **]**

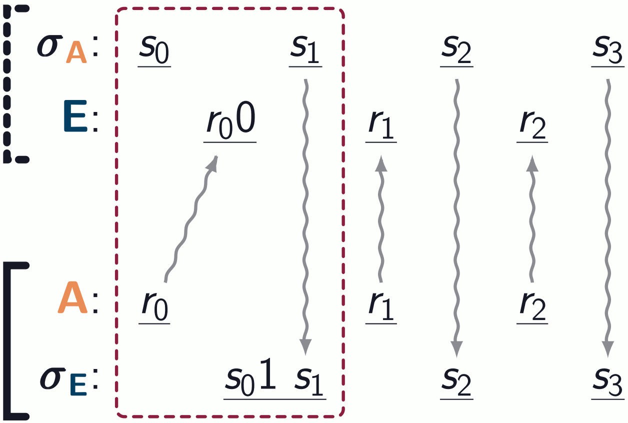
$$
\begin{array}{lcccccccccl}
\sigma_{\mathbf{A}}: & \underline{s_0} & & \underline{s_1} & & \underline{s_2} & & \underline{s_3} & \cdots & \rightsquigarrow & s_0\, r_0\, 0\, s_1\, r_1\, s_2\, r_2 \cdots \in \{0,1\}^{\omega} \\
\mathbf{E}: & & \underline{r_0 0} & & \underline{r_1} & & \underline{r_2} & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
\mathbf{A}: & \underline{r_0} & & & \underline{r_1} & & \underline{r_2} & & & & \\
\sigma_{\mathbf{E}}: & & \multicolumn{2}{c}{\underline{s_0 1 \; s_1}} & & \underline{s_2} & & \underline{s_3} & \cdots & \rightsquigarrow & r_0\, s_0\, 1\, s_1\, r_1\, s_2\, r_2 \cdots \in \{0,1\}^{\omega}
\end{array}
$$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}}$ $\Longrightarrow$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: **[** “strategy stealing” **]**



$$\cdots \rightsquigarrow \underline{s_0\, r_0\, 0}\, \underbrace{s_1\, r_1\, s_2\, r_2\, \cdots}_{\alpha} \in \{0,1\}^\omega$$

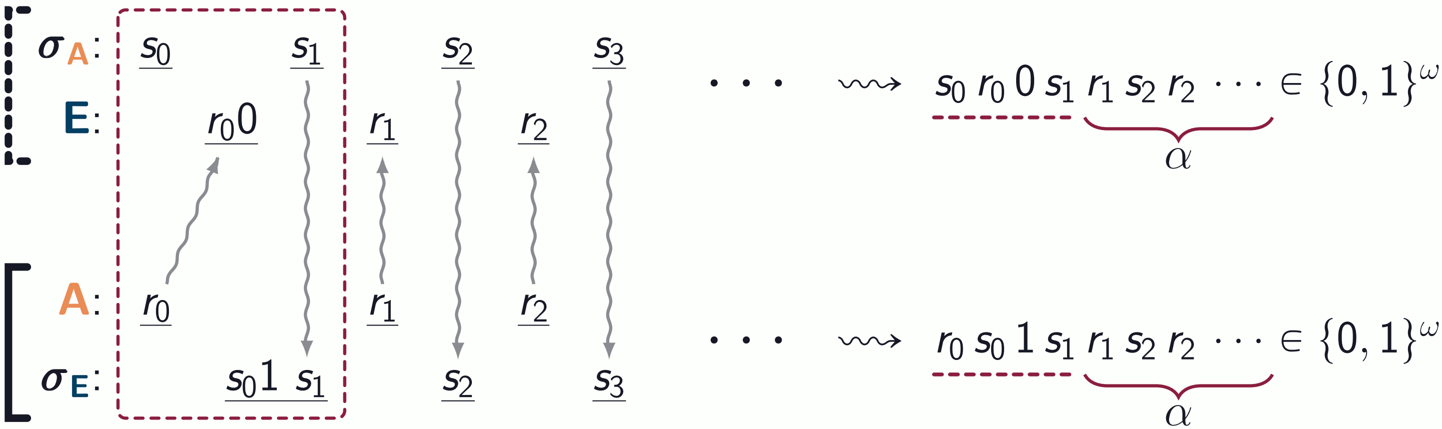
$$\cdots \rightsquigarrow \underline{r_0\, s_0\, 1}\, \underbrace{s_1\, r_1\, s_2\, r_2\, \cdots}_{\alpha} \in \{0,1\}^\omega$$

Lemat 2

$$\textbf{A} \text{ ma strat. wygr. } \sigma_{\mathsf{A}} \implies \textbf{E} \text{ ma strat. wygr. } \sigma_{\mathsf{E}}$$

Dowód

Weźmy σ_{A} i stwórzmy σ_{E}: ["strategy stealing"]



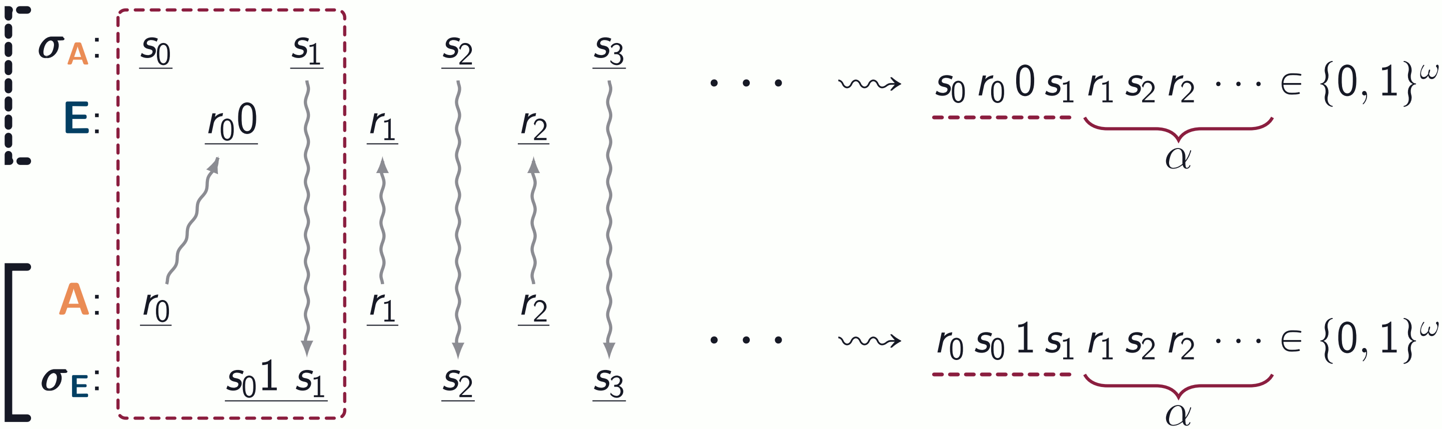
$$\sigma_{\mathsf{A}} \text{ jest wygrywająca} \implies \mathbf{XOR}(s_0\, r_0\, \mathbf{0}\, s_1\, \alpha) = 0$$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_A \implies$ E ma strat. wygr. σ_E

Dowód

Weźmy σ_A i stwórzmy σ_E: ["strategy stealing"]



σ_A jest wygrywająca $\implies \textbf{XOR}(s_0\, r_0\, \mathbf{0}\, s_1\, \alpha) = 0$

$$\Downarrow$$

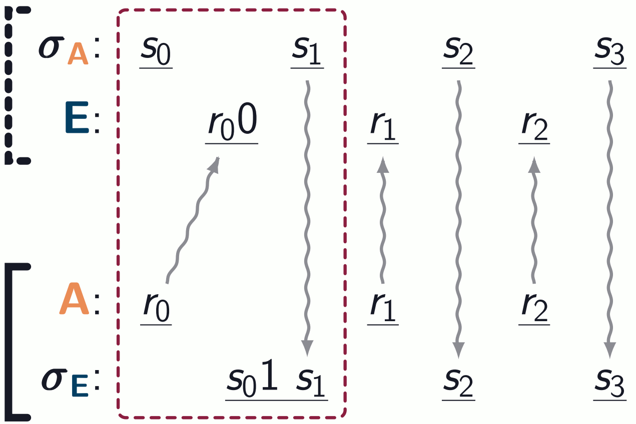
$$\textbf{XOR}(r_0\, s_0\, \mathbf{1}\, s_1\, \alpha) = 1$$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{A}} \implies$ **E** ma strat. wygr. $\sigma_{\mathbf{E}}$

Dowód

Weźmy $\sigma_{\mathbf{A}}$ i stwórzmy $\sigma_{\mathbf{E}}$: ["strategy stealing"]



$$\cdots \rightsquigarrow s_0\, r_0\, 0\, s_1\, \underbrace{r_1\, s_2\, r_2\, \cdots}_{\alpha} \in \{0,1\}^\omega$$

$$\cdots \rightsquigarrow r_0\, s_0\, 1\, s_1\, \underbrace{r_1\, s_2\, r_2\, \cdots}_{\alpha} \in \{0,1\}^\omega$$

$\sigma_{\mathbf{A}}$ jest wygrywająca $\implies$ $\mathbf{XOR}(s_0\, r_0\, \mathbf{0}\, s_1\, \alpha) = 0$

$$\Downarrow$$

$\sigma_{\mathbf{E}}$ jest wygrywająca $\impliedby$ $\mathbf{XOR}(r_0\, s_0\, \mathbf{1}\, s_1\, \alpha) = 1$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A: $\underline{01010}$ $\underline{10}$ $\underline{1001001}$
E: $\underline{11000}$ $\underline{0}$ $\underline{00011}$ $\cdots \rightsquigarrow \alpha \in \{0,1\}^\omega$

- **E** wygrywa jeśli $\mathbf{XOR}(\alpha) = 1$

Lemat 1

E ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}} \implies$ **A** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}} \implies$ **E** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}}$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

$$\begin{array}{llllllll} \mathbf{A}: & \underline{01010} & & \underline{10} & & \underline{1001001} & & \\ \mathbf{E}: & & \underline{11000} & & \underline{0} & & \underline{00011} & \cdots \rightsquigarrow \alpha \in \{0,1\}^\omega \end{array}$$

- **E** wygrywa jeśli $\mathbf{XOR}(\alpha) = 1$

Lemat 1

E ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}} \implies$ **A** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$

Lemat 2

A ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}} \implies$ **E** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}}$

Gra Banacha-Mazura [Księga Szkocka], $\mathbf{BM}\big(\mathbf{XOR}^{-1}(0)\big)$

Gra niezdeterminowana

(Kopczyński, Niwiński [2014]) (też (Khomskii [2010]), (Gale, Stewart [1953]), ...)

A:	<u>01010</u>		<u>10</u>		<u>1001001</u>		$\cdots \rightsquigarrow \alpha \in \{0,1\}^\omega$
E:		<u>11000</u>		<u>0</u>		<u>00011</u>	

- **E** wygrywa jeśli $\mathbf{XOR}(\alpha) = 1$

Lemat 1

E ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}} \implies$ **A** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}}$

Lemat 2

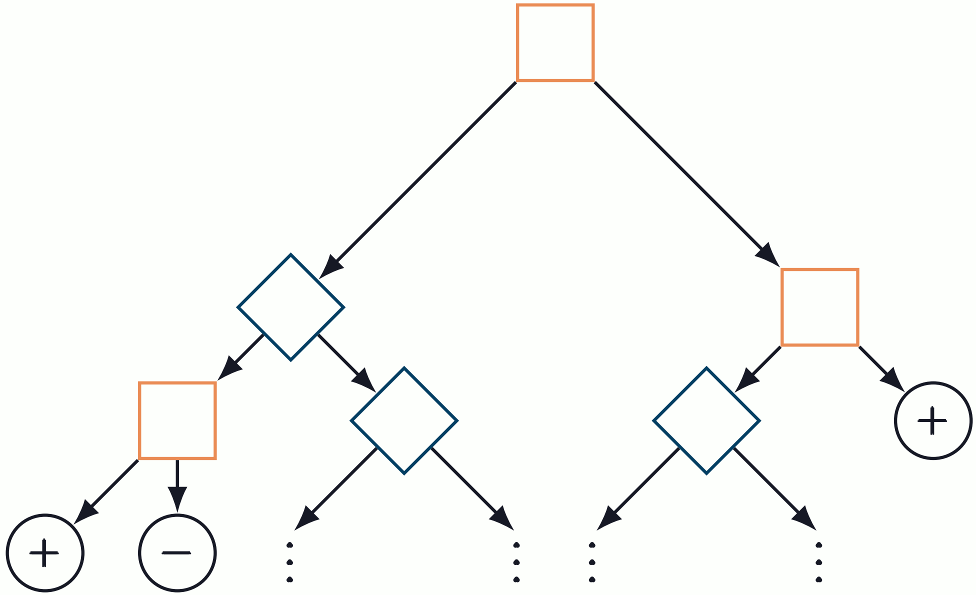
A ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{A}} \implies$ **E** ma strat. wygr. $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}}$

Gra Banacha-Mazura [Księga Szkocka], $\mathbf{BM}\big(\mathbf{XOR}^{-1}(0)\big)$

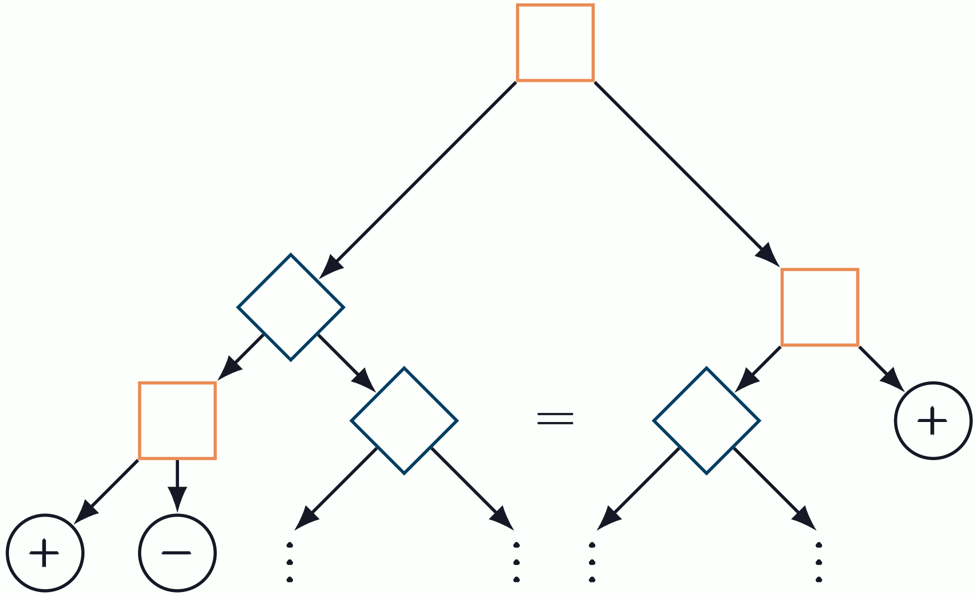
E wygrywa $\mathbf{BM}(X) \iff$ zbiór X jest pierwszej kategorii

Strategie pozycyjne

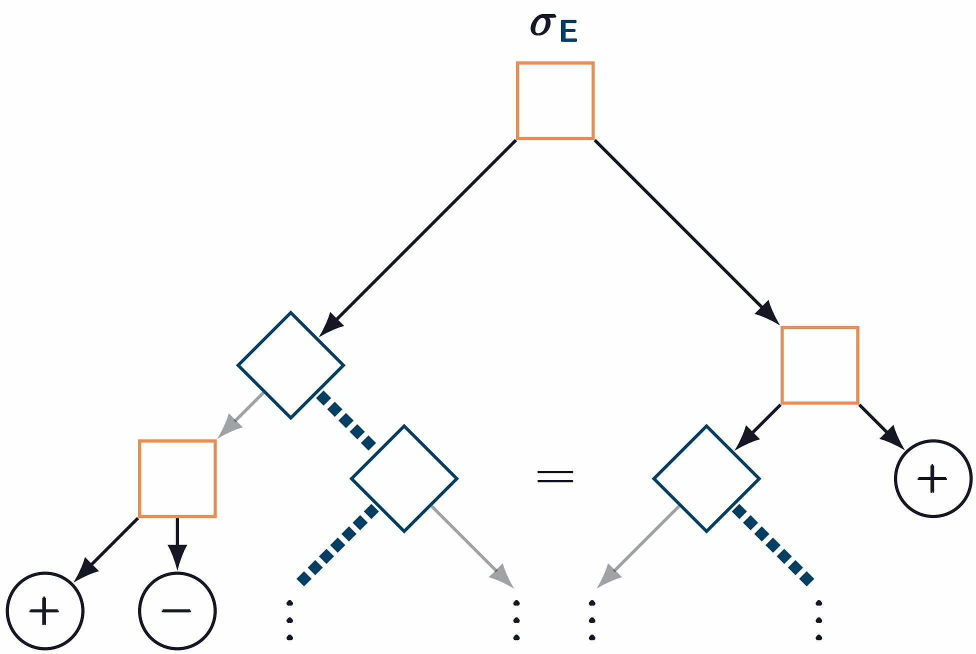
Strategie pozycyjne



Strategie pozycyjne

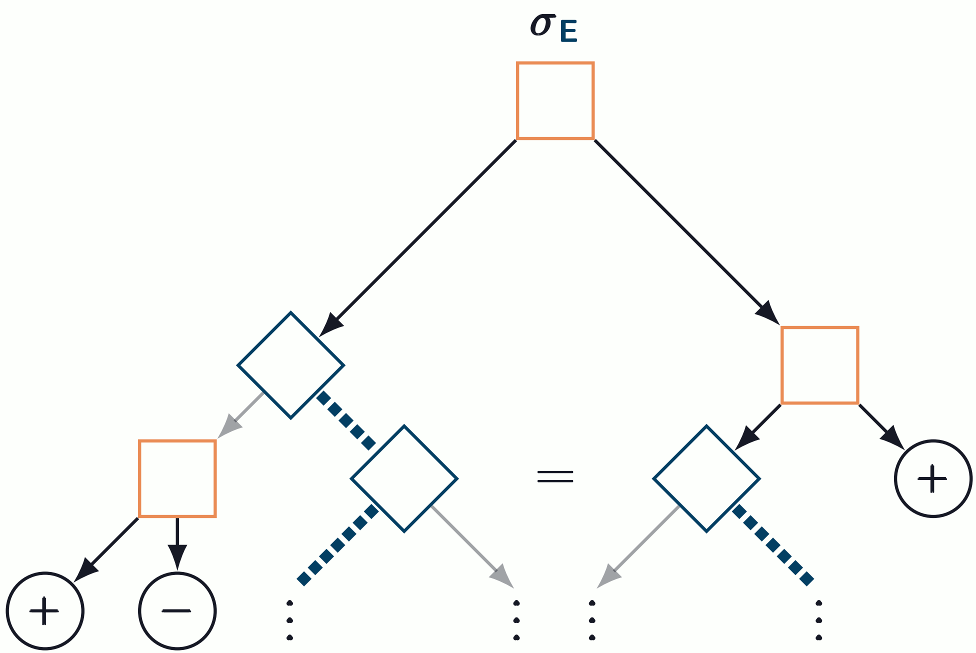


Strategie pozycyjne



Definicja

Strategia σ jest **pozycyjna** jeśli jej decyzja zależy tylko od pozycji.

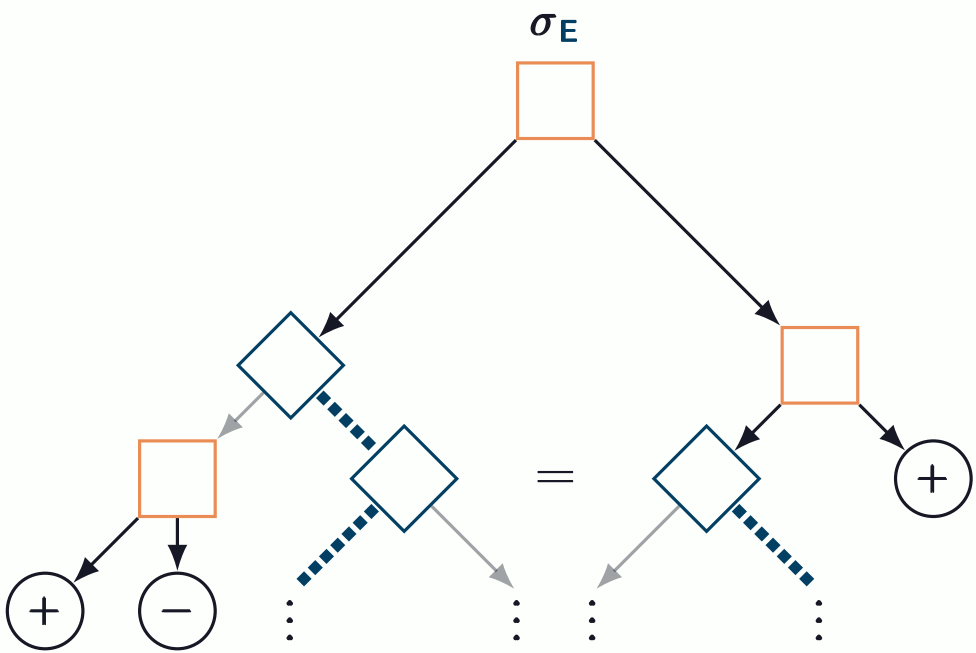


Strategie pozycyjne

Definicja

Strategia σ jest **pozycyjna** jeśli jej decyzja zależy tylko od pozycji.

[a nie od historii rozgrywki]

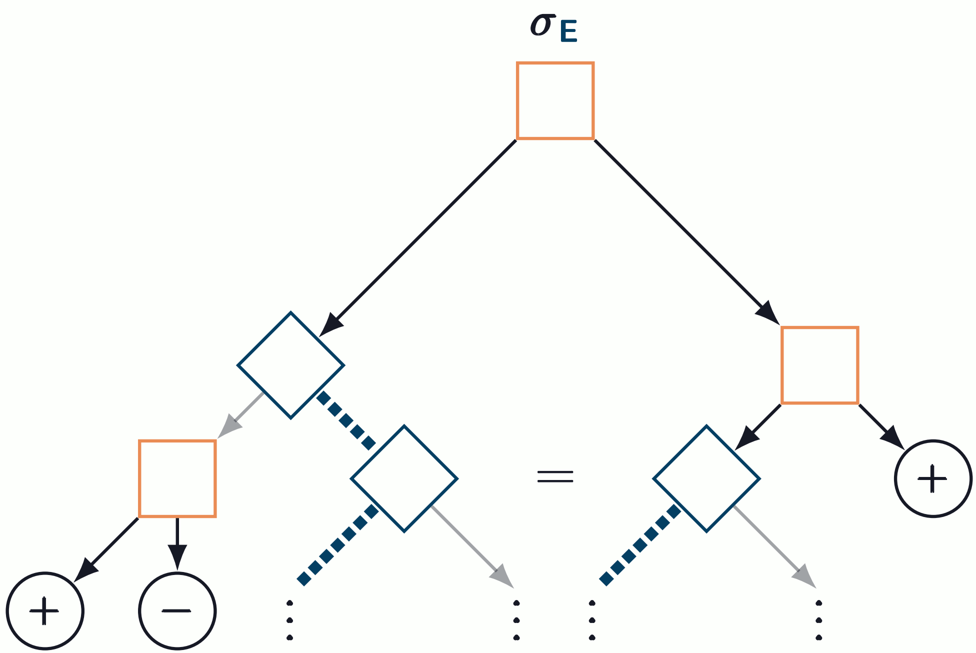


Strategie pozycyjne

Definicja

Strategia σ jest **pozycyjna** jeśli jej decyzja zależy tylko od pozycji.

[a nie od historii rozgrywki]

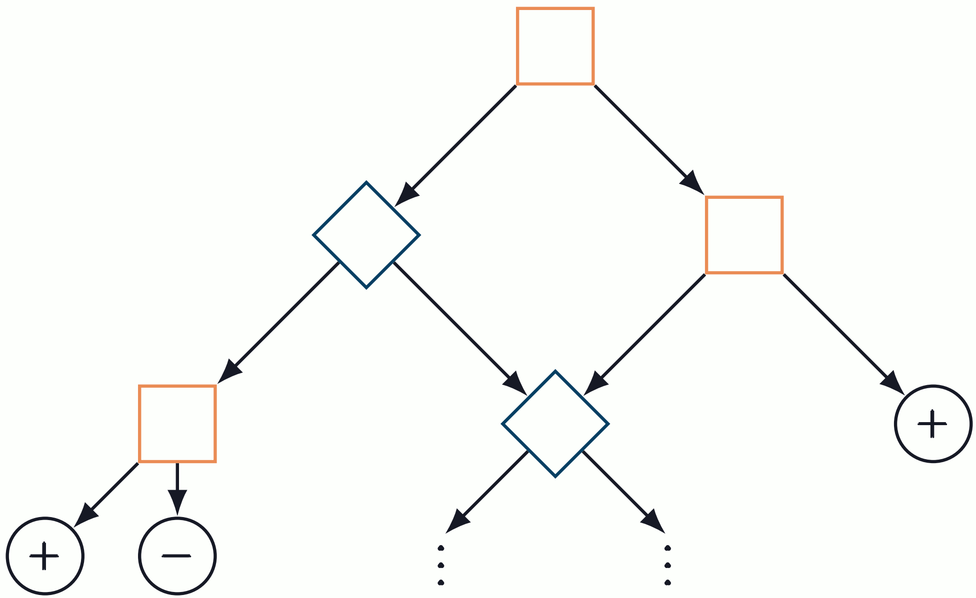


Strategie pozycyjne

Definicja

Strategia σ jest **pozycyjna** jeśli jej decyzja zależy tylko od pozycji.

[a nie od historii rozgrywki]

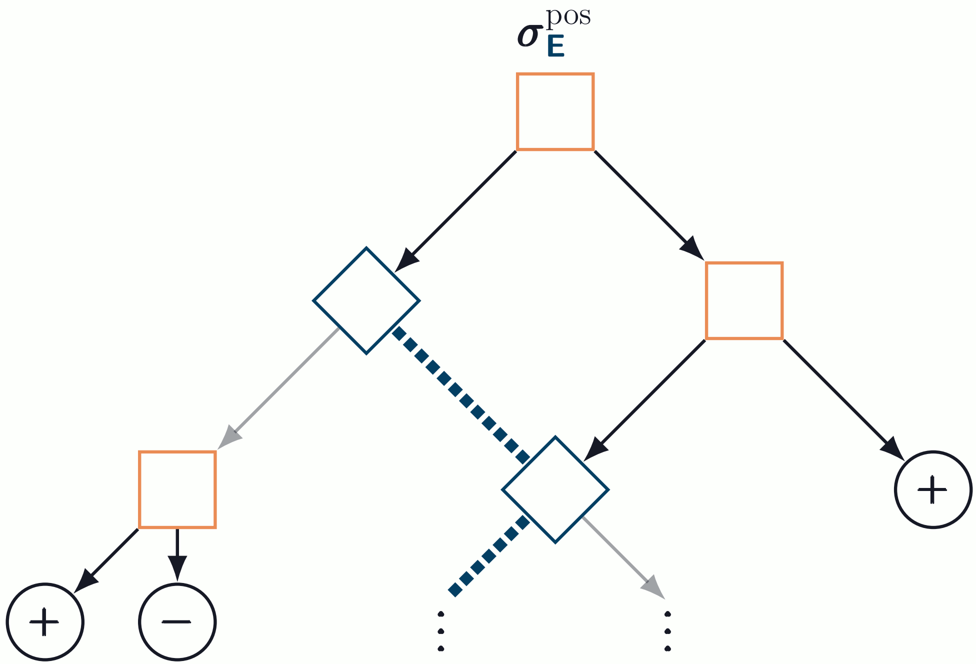


Strategie pozycyjne

Definicja

Strategia $\boldsymbol{\sigma}$ jest **pozycyjna** jeśli jej decyzja zależy tylko od pozycji.

[a nie od historii rozgrywki]



Strategie pozycyjne

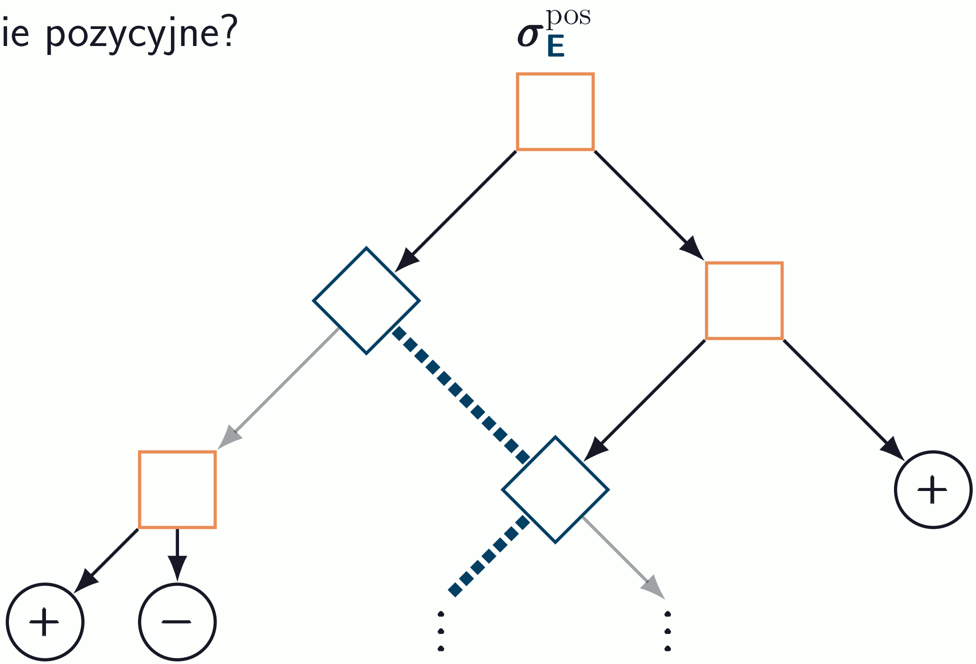
Definicja

Strategia σ jest **pozycyjna** jeśli jej decyzja zależy tylko od pozycji.

[a nie od historii rozgrywki]

Pytanie

Kiedy wystarczą strategie pozycyjne?



Strategie pozycyjne

Definicja

Strategia $\boldsymbol{\sigma}$ jest **pozycyjna** jeśli jej decyzja zależy tylko od pozycji.

[a nie od historii rozgrywki]

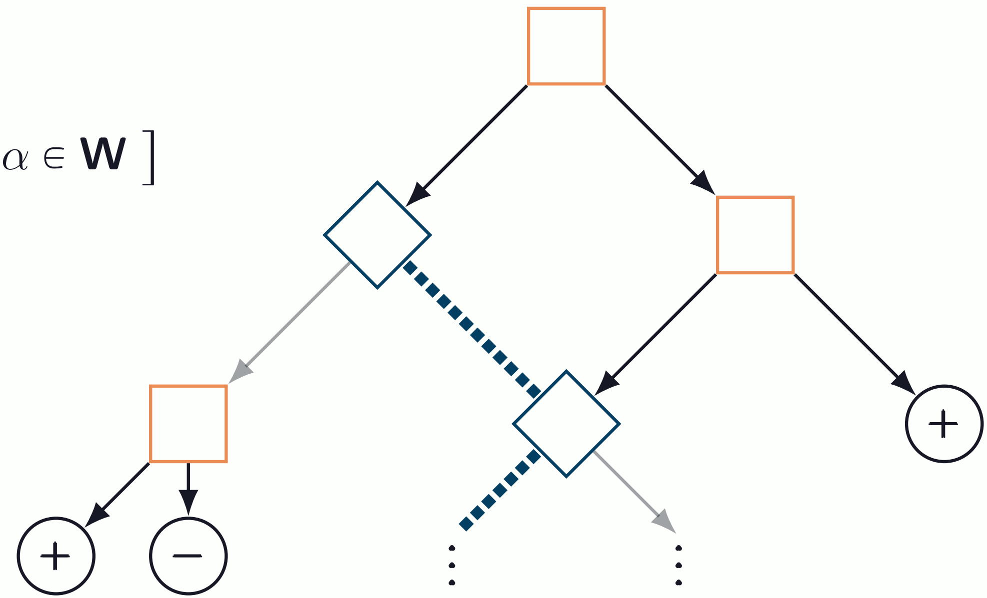
Pytanie

Kiedy wystarczą strategie pozycyjne?

Załóżmy, że

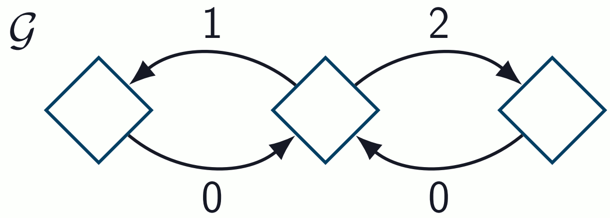
$$\left[\ u_1\,\alpha \in \mathbf{W} \iff u_2\,\alpha \in \mathbf{W}\ \right]$$

$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{E}}^{\mathrm{pos}}$

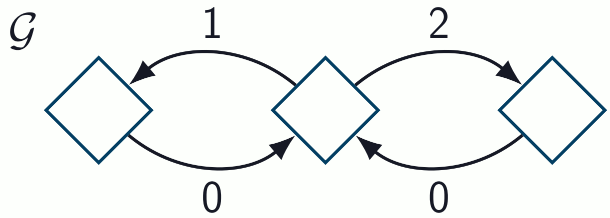


Strategie z pamięcią

Strategie z pamięcią

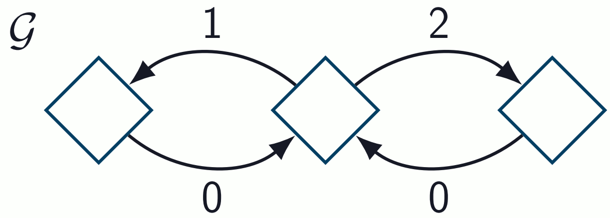


Strategie z pamięcią



$$\mathbf{W} = \left\{\alpha \in \{0,1,2\}^\omega \mid \text{1 i 2 występują nieskończenie często w } \alpha\right\}$$

Strategie z pamięcią

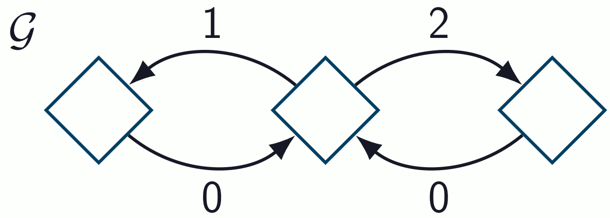


$$\mathbf{W} = \left\{\alpha \in \{0,1,2\}^\omega \mid 1 \text{ i } 2 \text{ występują nieskończenie często w } \alpha\right\}$$

Fakt

E wygrywa $\mathcal{G}$

Strategie z pamięcią



$$\mathbf{W} = \left\{\alpha \in \{0,1,2\}^{\omega} \mid 1 \text{ i } 2 \text{ występują nieskończenie często w } \alpha\right\}$$

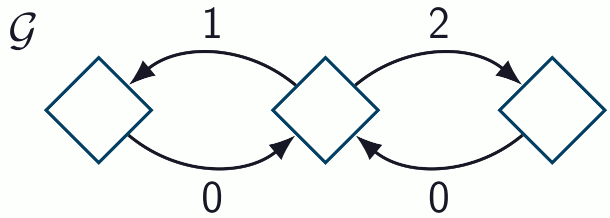
Fakt

E wygrywa $\mathcal{G}$

Fakt

E nie ma **pozycyjnej** strategii wygrywającej w $\mathcal{G}$

Strategie z pamięcią



$$\mathbf{W} = \left\{\alpha \in \{0,1,2\}^\omega \mid 1 \text{ i } 2 \text{ występują nieskończenie często w } \alpha\right\}$$

Fakt

E wygrywa $\mathcal{G}$

Fakt

E nie ma **pozycyjnej** strategii wygrywającej w $\mathcal{G}$

Fakt

…ale ma strategię używającą **skończonej pamięci**…

Podsumowanie

Podsumowanie

- Gry są istotnym narzędziem na styku topologii, teorii mnogości i logiki

Podsumowanie

- Gry są istotnym narzędziem na styku topologii, teorii mnogości i logiki
- Nawet przy pełnej informacji i braku losowości mogą być niezdeterminowane

Podsumowanie

- Gry są istotnym narzędziem na styku topologii, teorii mnogości i logiki
- Nawet przy pełnej informacji i braku losowości mogą być niezdeterminowane
- Determinacja daje magiczny sposób zamiany kwantyfikatorów...

Podsumowanie

- Gry są istotnym narzędziem na styku topologii, teorii mnogości i logiki
- Nawet przy pełnej informacji i braku losowości mogą być niezdeterminowane
- Determinacja daje magiczny sposób zamiany kwantyfikatorów...
- ...ale twierdzenia o determinacji są trudne

Podsumowanie

- Gry są istotnym narzędziem na styku topologii, teorii mnogości i logiki
- Nawet przy pełnej informacji i braku losowości mogą być niezdeterminowane
- Determinacja daje magiczny sposób zamiany kwantyfikatorów. . .
- . . . ale twierdzenia o determinacji są trudne
- Pytania o determinację (np. skończenie-pamięciową) to żywy temat badań

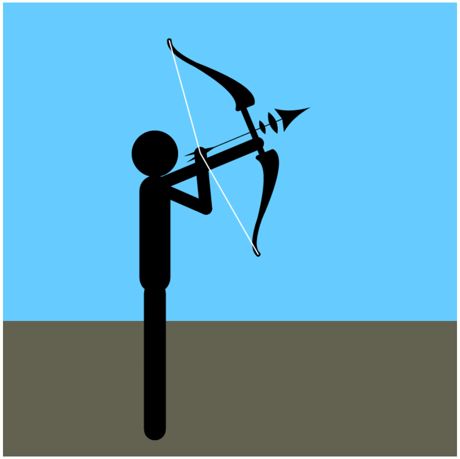
Podsumowanie

- Gry są istotnym narzędziem na styku topologii, teorii mnogości i logiki
- Nawet przy pełnej informacji i braku losowości mogą być niezdeterminowane
- Determinacja daje magiczny sposób zamiany kwantyfikatorów...
- ...ale twierdzenia o determinacji są trudne
- Pytania o determinację (np. skończenie-pamięciową) to żywy temat badań
- Nie wszystkie gry są omawianej postaci...

Podsumowanie

- Gry są istotnym narzędziem na styku topologii, teorii mnogości i logiki
- Nawet przy pełnej informacji i braku losowości mogą być niezdeterminowane
- Determinacja daje magiczny sposób zamiany kwantyfikatorów. . .
- . . . ale twierdzenia o determinacji są trudne
- Pytania o determinację (np. skończenie-pamięciową) to żywy temat badań
- Nie wszystkie gry są omawianej postaci. . .

Bowtrix



https://mskrzypczak.mimuw.edu.pl/Bowtrix/