n^n

Michał Pilipczuk

Uniwersytet Warszawski

MIM

Wydział
Matematyki, Informatyki i Mechaniki

21 lutego 2020

Ciągi liczbowe

Ciągi liczbowe

Ciąg Fibonacciego

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{dla} \ \ n \geqslant 2$$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Ciągi liczbowe

Ciąg Fibonacciego

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{dla} \;\; n \geqslant 2$$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Liczby Catalana

$$C_0 = 1, \qquad C_1 = 1, \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \quad \text{dla} \;\; n \geqslant 2$$

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1	1	2	5	14	42	132	429

Ciągi liczbowe

Ciąg Fibonacciego

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

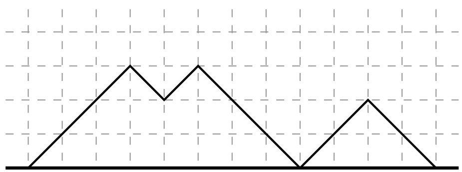
Liczby Catalana

$$C_0 = 1, \qquad C_1 = 1, \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1	1	2	5	14	42	132	429

C_n = liczba wyrażeń nawiasowych o n parach nawiasów.

$$(\,(\,(\,)\,(\,)\,)\,)\,(\,(\,)\,)$$



Ciągi liczbowe

Ciąg Fibonacciego

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

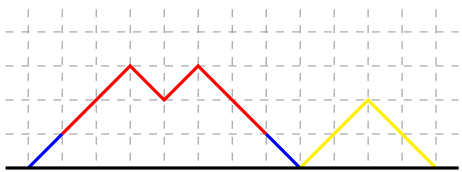
Liczby Catalana

$$C_0 = 1, \qquad C_1 = 1, \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2$$

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1	1	2	5	14	42	132	429

C_n = liczba wyrażeń nawiasowych o n parach nawiasów.

((( ) ( ))) (( ))



Ciągi liczbowe

Ciągi liczbowe

Wzory jawne

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right) \qquad\qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ciągi liczbowe

Wzory jawne

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right) \qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Wzory rekurencyjne

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

Ciągi liczbowe

Wzory jawne

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}) \qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Wzory rekurencyjne

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

Pytanie: Czy liczby Catalana można opisać rekurencją taką jak dla liczb Fibonacciego?

Ciągi liczbowe

Wzory jawne

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}) \qquad\qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Wzory rekurencyjne

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad\qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

Pytanie: Czy liczby Catalana można opisać rekurencją taką jak dla liczb Fibonacciego?

– Co to znaczy **taką jak**?

Ciągi liczbowe

Wzory jawne

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^n - (-\varphi)^{-n}) \qquad\qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Wzory rekurencyjne

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad\qquad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

Pytanie: Czy liczby Catalana można opisać rekurencją taką jak dla liczb Fibonacciego?

– Co to znaczy **taką jak**?

Cel: Zdefiniować język do opisu ciągów rekurencyjnych i zbadać jego siłę wyrazu.

Ciągi liniowo rekurencyjne

Ciągi liniowo rekurencyjne

Definicja

Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest **liniowo rekurencyjny** jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka forma liniowa $L \colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}$, że

$$a_{n+k} = L\big(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}\big) \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Ciągi liniowo rekurencyjne

Definicja

Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest **liniowo rekurencyjny** jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka forma liniowa $L\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}$, że

$$a_{n+k} = L(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Forma liniowa: $L(x_1, \ldots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k$, gdzie $c_i \in \mathbb{Q}$.

Ciągi liniowo rekurencyjne

Definicja

Ciąg $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest **liniowo rekurencyjny** jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka forma liniowa $L\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}$, że

$$a_{n+k} = L(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Forma liniowa: $L(x_1, \ldots, x_k) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k$, gdzie $c_i \in \mathbb{Q}$.

Przykład 1: Liczby Fibonacciego używają $L(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Ciągi liniowo rekurencyjne

Definicja

Ciąg $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest **liniowo rekurencyjny** jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka forma liniowa $L\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}$, że

$$a_{n+k} = L(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Forma liniowa: $L(x_1, \ldots, x_k) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k$, gdzie $c_i \in \mathbb{Q}$.

Przykład 1: Liczby Fibonacciego używają $L(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Przykład 2: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

Ciągi liniowo rekurencyjne

Definicja

Ciąg $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ jest **liniowo rekurencyjny** jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka forma liniowa $L\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}$, że

$$a_{n+k} = L(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Forma liniowa: $L(x_1, \ldots, x_k) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k$, gdzie $c_i \in \mathbb{Q}$.

Przykład 1: Liczby Fibonacciego używają $L(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Przykład 2: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \qquad \rightsquigarrow \qquad a_n = n$

Ciągi liniowo rekurencyjne

Definicja

Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest **liniowo rekurencyjny** jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka forma liniowa $L \colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}$, że

$$a_{n+k} = L(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Forma liniowa: $L(x_1, \ldots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k$, gdzie $c_i \in \mathbb{Q}$.

Przykład 1: Liczby Fibonacciego używają $L(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Przykład 2: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \qquad \rightsquigarrow \qquad a_n = n$

Fakt

Ciągi liniowo rekurencyjne to dokładnie ciągi postaci

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot \lambda_i^n,$$

gdzie p_i to wielomiany, zaś λ_i są algebraiczne.

Własności ciągów liniowo rekurencyjnych

Własności ciągów liniowo rekurencyjnych

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny, to $|a_n| \leqslant M^{n+1}$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$.

Własności ciągów liniowo rekurencyjnych

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny, to $|a_n| \leqslant M^{n+1}$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$.

D: $M :=$ suma współczynników formy L.

W każdym kroku dodajemy $\leqslant M$ poprzednich wyrazów. $\square$

Własności ciągów liniowo rekurencyjnych

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny, to $|a_n| \leqslant M^{n+1}$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$.

D: $M :=$ suma współczynników formy L.

W każdym kroku dodajemy $\leqslant M$ poprzednich wyrazów. $\square$

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$

ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

Własności ciągów liniowo rekurencyjnych

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny, to $|a_n| \leqslant M^{n+1}$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$.

D: $M :=$ suma współczynników formy L.

W każdym kroku dodajemy $\leqslant M$ poprzednich wyrazów. $\square$

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$

ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Reszty $(a_n \bmod m), \ldots, (a_{n+k-1} \bmod m)$ wyznaczają $(a_{n+k} \bmod m)$.

Tylko m^k możliwych zestawów $(a_n \bmod m), \ldots, (a_{n+k-1} \bmod m)$. $\square$

Własności ciągów liniowo rekurencyjnych

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny, to $|a_n| \leqslant M^{n+1}$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$.

D: $M :=$ suma współczynników formy L.

W każdym kroku dodajemy $\leqslant M$ poprzednich wyrazów. $\square$

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$

ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Reszty $(a_n \bmod m), \ldots, (a_{n+k-1} \bmod m)$ wyznaczają $(a_{n+k} \bmod m)$.

Tylko m^k możliwych zestawów $(a_n \bmod m), \ldots, (a_{n+k-1} \bmod m)$. $\square$

Fakt: C_n jest nieparzyste $\quad \Leftrightarrow \quad n + 1$ jest potęgą 2.

Własności ciągów liniowo rekurencyjnych

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny, to $|a_n| \leqslant M^{n+1}$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$.

D: $M :=$ suma współczynników formy L.

W każdym kroku dodajemy $\leqslant M$ poprzednich wyrazów. $\square$

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$

ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Reszty $(a_n \bmod m), \ldots, (a_{n+k-1} \bmod m)$ wyznaczają $(a_{n+k} \bmod m)$.

Tylko m^k możliwych zestawów $(a_n \bmod m), \ldots, (a_{n+k-1} \bmod m)$. $\square$

Fakt: C_n jest nieparzyste $\quad\Leftrightarrow\quad$ $n+1$ jest potęgą 2.

Wniosek: Liczby Catalana nie są liniowo rekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Własności ciągów liniowo rekurencyjnych

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny, to $|a_n| \leqslant M^{n+1}$ dla pewnego $M \in \mathbb{N}$.

D: $M :=$ suma współczynników formy L.

W każdym kroku dodajemy $\leqslant M$ poprzednich wyrazów. $\square$

Fakt: Jeśli a_n jest lin. rekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$

ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Reszty $(a_n \bmod m), \ldots, (a_{n+k-1} \bmod m)$ wyznaczają $(a_{n+k} \bmod m)$.

Tylko m^k możliwych zestawów $(a_n \bmod m), \ldots, (a_{n+k-1} \bmod m)$. $\square$

Fakt: C_n jest nieparzyste $\quad \Leftrightarrow \quad n+1$ jest potęgą 2.

Wniosek: Liczby Catalana nie są liniowo rekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Fakt: Nie są liniowo rekurencyjne nawet nad $\mathbb{Q}$.

Układy równań rekurencyjnych

Idea: Chcemy używać rekurencji o głębokości 1.

Układy równań rekurencyjnych

Idea: Chcemy używać rekurencji o głębokości 1.

- **Problem:** Jeden ciąg i głębokość 1 $\Rightarrow$ Ciąg geometryczny

Układy równań rekurencyjnych

Idea: Chcemy używać rekurencji o głębokości 1.

- **Problem:** Jeden ciąg i głębokość 1 $\quad\Rightarrow\quad$ Ciąg geometryczny
- **Rozwiązanie:** Kilka wzajemnie rekurencyjnych ciągów.

Układy równań rekurencyjnych

Idea: Chcemy używać rekurencji o głębokości 1.

- **Problem:** Jeden ciąg i głębokość 1 $\Rightarrow$ Ciąg geometryczny
- **Rozwiązanie:** Kilka wzajemnie rekurencyjnych ciągów.

Przykład: Liczby Fibonacciego, dodajemy ciąg $g_n = f_{n-1}$.

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ g_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_n = f_{n-1} + g_{n-1} \\ g_n = f_{n-1} \end{cases}$$

Układy równań rekurencyjnych

Idea: Chcemy używać rekurencji o głębokości 1.

- **Problem:** Jeden ciąg i głębokość 1 $\Rightarrow$ Ciąg geometryczny
- **Rozwiązanie:** Kilka wzajemnie rekurencyjnych ciągów.

Przykład: Liczby Fibonacciego, dodajemy ciąg $g_n = f_{n-1}$.

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ g_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_n = f_{n-1} + g_{n-1} \\ g_n = f_{n-1} \end{cases}$$

Definicja

Ciąg $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ **spełnia układ liniowych rekurencji** jeśli istnieją takie ciągi $u_n^1, \ldots, u_n^k$ oraz formy liniowe $L_1, \ldots, L_k : \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}$, że

$$\begin{cases} u_n^1 = L_1(u_{n-1}^1, u_{n-1}^2, \ldots, u_{n-1}^k) \\ u_n^2 = L_2(u_{n-1}^1, u_{n-1}^2, \ldots, u_{n-1}^k) \\ \quad\vdots \\ u_n^k = L_k(u_{n-1}^1, u_{n-1}^2, \ldots, u_{n-1}^k) \end{cases} \qquad \text{dla } n \geqslant 1,$$

przy czym wymagamy, że $a_n = u_n^1$.

Układy równań rekurencyjnych

Twierdzenie

$\langle a_n \rangle$ jest lin. rekurencyjny $\Leftrightarrow$ $\langle a_n \rangle$ spełnia pewien układ liniowych rekurencji.

Układy równań rekurencyjnych

Twierdzenie

$\langle a_n \rangle$ jest lin. rekurencyjny $\Leftrightarrow$ $\langle a_n \rangle$ spełnia pewien układ liniowych rekurencji.

Dowód ($\Rightarrow$)

Jeśli rekurencja opisująca $\langle a_n \rangle$ ma głębokość k, to używamy k przesunięć a_n.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2b_{n-1} + 4c_{n-1} - d_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} \\ d_n = c_{n-1} \end{cases}$$

Układy równań rekurencyjnych

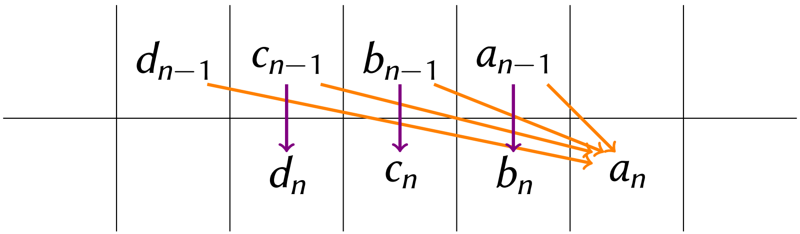
Twierdzenie

$\langle a_n \rangle$ jest lin. rekurencyjny $\Leftrightarrow$ $\langle a_n \rangle$ spełnia pewien układ liniowych rekurencji.

Dowód ($\Rightarrow$)

Jeśli rekurencja opisująca $\langle a_n \rangle$ ma głębokość k, to używamy k przesunięć a_n.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2b_{n-1} + 4c_{n-1} - d_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} \\ d_n = c_{n-1} \end{cases}$$



Dowód ($\Leftarrow$)

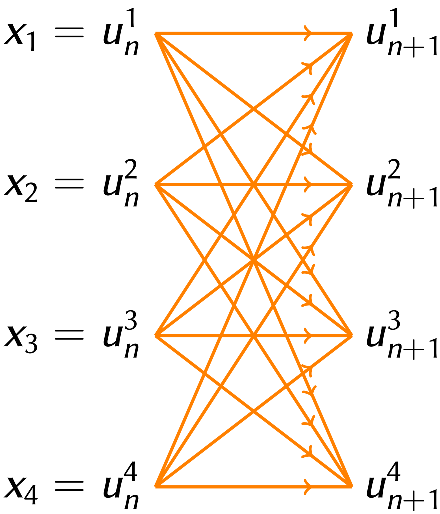
$$x_1 = u_n^1$$

$$x_2 = u_n^2$$

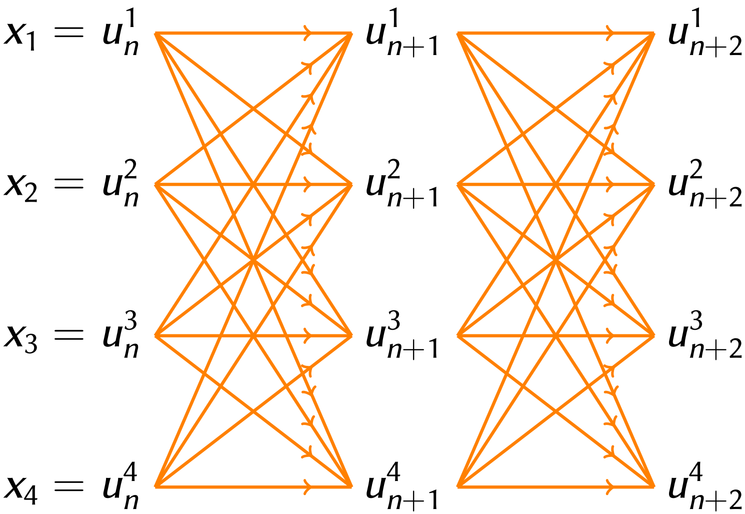
$$x_3 = u_n^3$$

$$x_4 = u_n^4$$

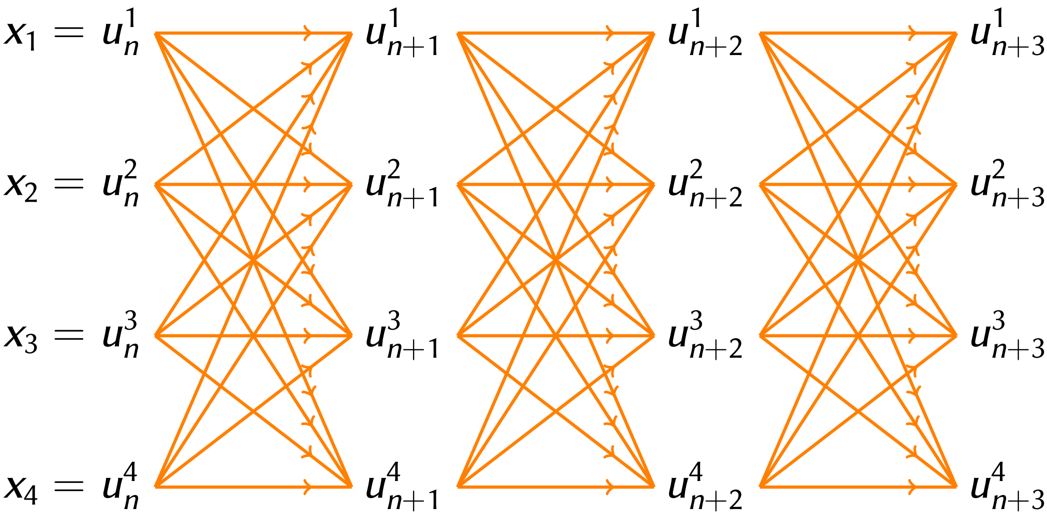
Dowód ($\Leftarrow$)



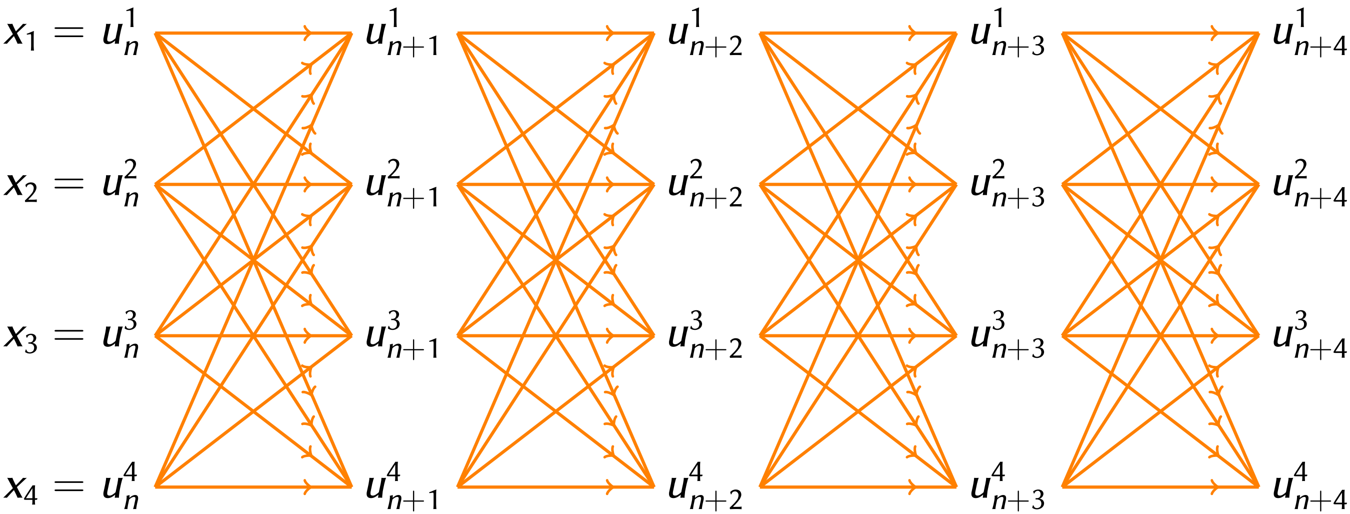
Dowód ($\Leftarrow$)



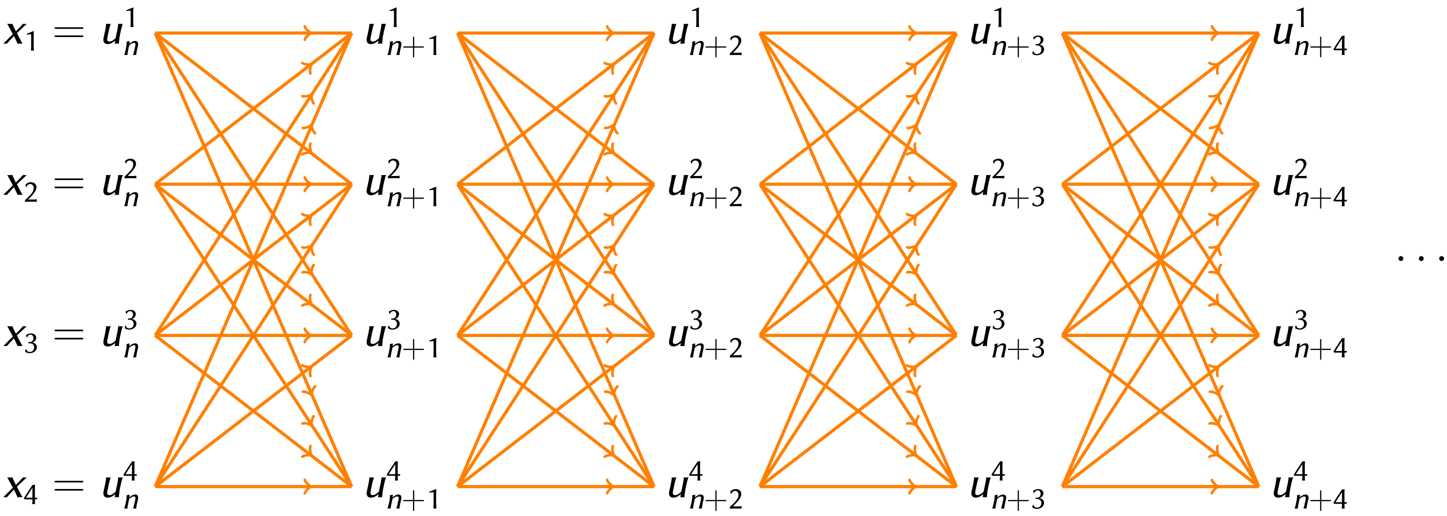
Dowód ($\Leftarrow$)



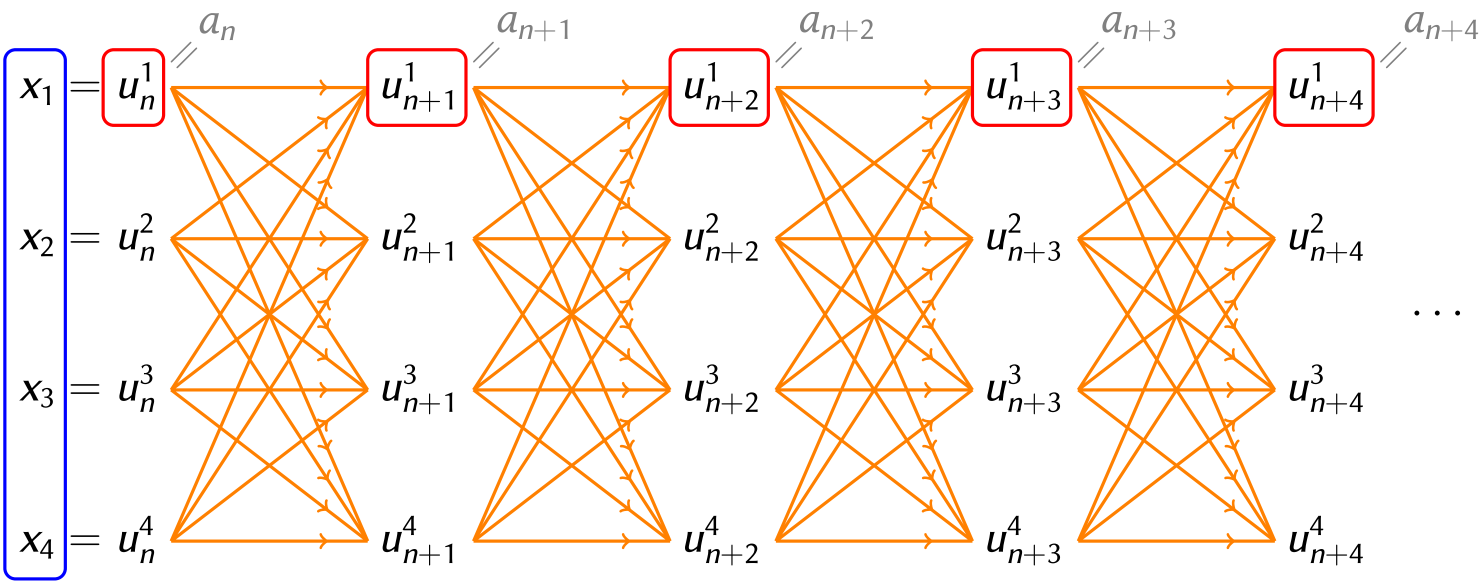
Dowód ($\Leftarrow$)



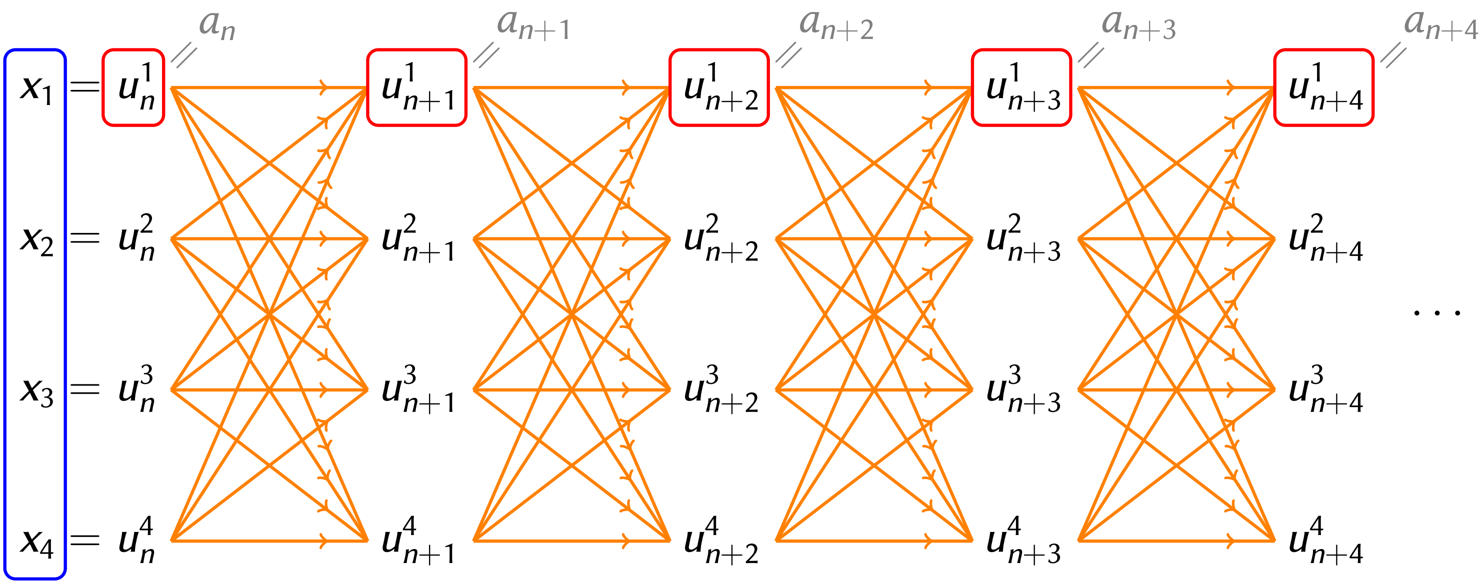
Dowód ($\Leftarrow$)



Dowód ($\Leftarrow$)



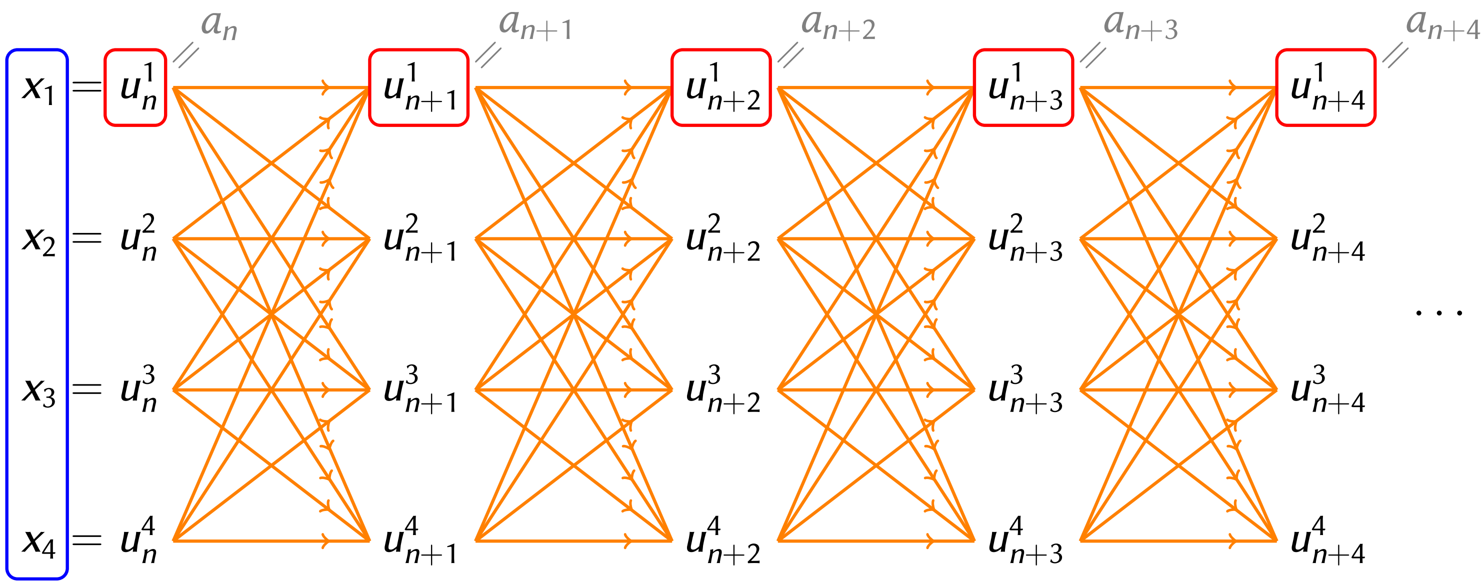
Dowód ($\Leftarrow$)



$$
\begin{aligned}
u_n^1 &= T_0(x_1, \dots, x_k) = x_1 \\
u_{n+1}^1 &= T_1(x_1, \dots, x_k) \\
u_{n+2}^1 &= T_2(x_1, \dots, x_k) \\
u_{n+3}^1 &= T_3(x_1, \dots, x_k) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

formy liniowe

Dowód ($\Leftarrow$)



$$
\begin{aligned}
u_n^1 &= T_0(x_1, \dots, x_k) = x_1 \\
u_{n+1}^1 &= T_1(x_1, \dots, x_k) \\
u_{n+2}^1 &= T_2(x_1, \dots, x_k) \\
u_{n+3}^1 &= T_3(x_1, \dots, x_k) \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

formy liniowe

Niech $T(\vec{x}) = (T_0(\vec{x}), T_1(\vec{x}), \dots, T_k(\vec{x}))$.

$T\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^{k+1}$ jest liniowe.

$T(\vec{u}_n) = (a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód ($\Leftarrow$)

$T\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^{k+1}$ jest liniowe.

$T(\vec{u}_n) = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Obserwacja: im T jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^{k+1}$ kowymiaru $\geqslant 1$.

Dowód ($\Leftarrow$)

> $T\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^{k+1}$ jest liniowe.
>
> $T(\vec{u}_n) = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Obserwacja: im T jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^{k+1}$ kowymiaru $\geqslant 1$.

Wniosek: Istnieje niezerowa forma liniowa $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że im $T \subseteq \ker S$.

Dowód ($\Leftarrow$)

> $T\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^{k+1}$ jest liniowe.
>
> $T(\vec{u}_n) = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Obserwacja: im T jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^{k+1}$ kowymiaru $\geqslant 1$.

Wniosek: Istnieje niezerowa forma liniowa $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że im $T \subseteq \ker S$.

Inaczej: $S(T(\vec{x})) = 0$ dla wszystkich $\vec{x} \in \mathbb{Q}^k$.

Dowód ($\Leftarrow$)

> $T\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^{k+1}$ jest liniowe.
>
> $T(\vec{u}_n) = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Obserwacja: im T jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^{k+1}$ kowymiaru $\geqslant 1$.

Wniosek: Istnieje niezerowa forma liniowa $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że im $T \subseteq \ker S$.

Inaczej: $S(T(\vec{x})) = 0$ dla wszystkich $\vec{x} \in \mathbb{Q}^k$.

Wniosek: $S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Dowód ($\Leftarrow$)

> $T\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^{k+1}$ jest liniowe.
>
> $T(\vec{u}_n) = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Obserwacja: im T jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^{k+1}$ kowymiaru $\geqslant 1$.

Wniosek: Istnieje niezerowa forma liniowa $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że im $T \subseteq \ker S$.

Inaczej: $S(T(\vec{x})) = 0$ dla wszystkich $\vec{x} \in \mathbb{Q}^k$.

Wniosek: $S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

– Zapiszmy $S(y_0, \ldots, y_k) = s_0 y_0 + s_1 y_1 + \ldots + s_k y_k$. Czyli:

$$s_0 a_n + s_1 a_{n+1} + \ldots + s_k a_{n+k} = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Dowód ($\Leftarrow$)

$T\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^{k+1}$ jest liniowe.

$T(\vec{u}_n) = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Obserwacja: im T jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^{k+1}$ kowymiaru $\geqslant 1$.

Wniosek: Istnieje niezerowa forma liniowa $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że im $T \subseteq \ker S$.

Inaczej: $S(T(\vec{x})) = 0$ dla wszystkich $\vec{x} \in \mathbb{Q}^k$.

Wniosek: $S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

– Zapiszmy $S(y_0, \ldots, y_k) = s_0 y_0 + s_1 y_1 + \ldots + s_k y_k$. Czyli:

$$s_0 a_n + s_1 a_{n+1} + \ldots + s_k a_{n+k} = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

– Jeśli $s_k \neq 0$, to mamy:

$$a_{n+k} = -\frac{s_0}{s_k} \cdot a_n - \frac{s_1}{s_k} \cdot a_{n+1} - \ldots - \frac{s_{k-1}}{s_k} \cdot a_{n+k-1}.$$

Dowód ($\Leftarrow$)

> $T\colon \mathbb{Q}^k \to \mathbb{Q}^{k+1}$ jest liniowe.
>
> $T(\vec{u}_n) = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Obserwacja: im T jest podprzestrzenią $\mathbb{Q}^{k+1}$ kowymiaru $\geqslant 1$.

Wniosek: Istnieje niezerowa forma liniowa $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że im $T \subseteq \ker S$.

Inaczej: $S(T(\vec{x})) = 0$ dla wszystkich $\vec{x} \in \mathbb{Q}^k$.

Wniosek: $S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

– Zapiszmy $S(y_0, \ldots, y_k) = s_0 y_0 + s_1 y_1 + \ldots + s_k y_k$. Czyli:

$$s_0 a_n + s_1 a_{n+1} + \ldots + s_k a_{n+k} = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

– Jeśli $s_k \neq 0$, to mamy:

$$a_{n+k} = -\frac{s_0}{s_k} \cdot a_n - \frac{s_1}{s_k} \cdot a_{n+1} - \ldots - \frac{s_{k-1}}{s_k} \cdot a_{n+k-1}.$$

– W przeciwnym razie, to samo dla największego takiego t, że $s_t \neq 0$. $\square$

Ciągi polirekurencyjne

Ciągi polirekurencyjne

Cel: Rozważmy szerszą klasę rekurencji i zbadajmy siłę wyrazu.

Ciągi polirekurencyjne

Cel: Rozważmy szerszą klasę rekurencji i zbadajmy siłę wyrazu.

Przykład: $a_n = n!$

Ciągi polirekurencyjne

Cel: Rozważmy szerszą klasę rekurencji i zbadajmy siłę wyrazu.

Przykład: $a_n = n!$ $\qquad b_n = n + 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = a_{n-1} \cdot b_{n-1} \\ b_n = b_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Ciągi polirekurencyjne

Cel: Rozważmy szerszą klasę rekurencji i zbadajmy siłę wyrazu.

Przykład: $a_n = n!$ $\qquad b_n = n + 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = a_{n-1} \cdot b_{n-1} \\ b_n = b_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Uwaga: $n!$ nie jest liniowo rekurencyjny z powodów asymptotycznych.

Ciągi polirekurencyjne

Cel: Rozważmy szerszą klasę rekurencji i zbadajmy siłę wyrazu.

Przykład: $a_n = n!$ $\qquad b_n = n + 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = a_{n-1} \cdot b_{n-1} \\ b_n = b_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Uwaga: $n!$ nie jest liniowo rekurencyjny z powodów asymptotycznych.

Idea: Dopuśćmy dowolne wielomiany zamiast form liniowych.

Ciągi polirekurencyjne

Cel: Rozważmy szerszą klasę rekurencji i zbadajmy siłę wyrazu.

Przykład: $a_n = n!$ $\qquad b_n = n + 1$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = a_{n-1} \cdot b_{n-1} \\ b_n = b_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Uwaga: $n!$ nie jest liniowo rekurencyjny z powodów asymptotycznych.

Idea: Dopuśćmy dowolne wielomiany zamiast form liniowych.

Definicja

Ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest **polirekurencyjny** jeśli istnieją takie ciągi $u_n^1, \ldots, u_n^k$ oraz wielomiany $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$, że

$$\begin{cases} u_n^1 = P_1(u_{n-1}^1, u_{n-1}^2, \ldots, u_{n-1}^k) \\ u_n^2 = P_2(u_{n-1}^1, u_{n-1}^2, \ldots, u_{n-1}^k) \\ \qquad \vdots \\ u_n^k = P_k(u_{n-1}^1, u_{n-1}^2, \ldots, u_{n-1}^k) \end{cases} \qquad \text{dla } n \geqslant 1,$$

przy czym wymagamy, że $a_n = u_n^1$.

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 1: $a_n = n!$

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 1: $a_n = n!$

Przykład 2: $b_0 = 2, \qquad b_n = (b_{n-1})^2$

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 1: $a_n = n!$

Przykład 2: $b_0 = 2, \qquad b_n = (b_{n-1})^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad b_n = 2^{2^n}$

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 1: $a_n = n!$

Przykład 2: $b_0 = 2, \qquad b_n = (b_{n-1})^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad b_n = 2^{2^n}$

Fakt: Ciąg polirekurencyjny ma co najwyżej podwójnie wykładniczą asymptotykę.

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 1: $a_n = n!$

Przykład 2: $b_0 = 2, \qquad b_n = (b_{n-1})^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad b_n = 2^{2^n}$

Fakt: Ciąg polirekurencyjny ma co najwyżej podwójnie wykładniczą asymptotykę.

Przykład 3: Co to za ciąg d_n?

$$\begin{cases} c_0 = 2 \\ d_0 = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} c_n = c_{n-1} \cdot d_{n-1} \\ d_n = c_{n-1} \end{cases}$$

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 1: $a_n = n!$

Przykład 2: $b_0 = 2, \qquad b_n = (b_{n-1})^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad b_n = 2^{2^n}$

Fakt: Ciąg polirekurencyjny ma co najwyżej podwójnie wykładniczą asymptotykę.

Przykład 3: Co to za ciąg d_n?

$$\begin{cases} c_0 = 2 \\ d_0 = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} c_n = c_{n-1} \cdot d_{n-1} \\ d_n = c_{n-1} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$d_n = 2^{f_n}$$

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 1: $a_n = n!$

Przykład 2: $b_0 = 2, \qquad b_n = (b_{n-1})^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad b_n = 2^{2^n}$

Fakt: Ciąg polirekurencyjny ma co najwyżej podwójnie wykładniczą asymptotykę.

Przykład 3: Co to za ciąg d_n?

$$\begin{cases} c_0 = 2 \\ d_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_n = c_{n-1} \cdot d_{n-1} \\ d_n = c_{n-1} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$d_n = 2^{f_n}$$

Przykład 4: $e_n = f_{f_n}$ (praca domowa)

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 1: $a_n = n!$

Przykład 2: $b_0 = 2, \qquad b_n = (b_{n-1})^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad b_n = 2^{2^n}$

Fakt: Ciąg polirekurencyjny ma co najwyżej podwójnie wykładniczą asymptotykę.

Przykład 3: Co to za ciąg d_n?

$$\begin{cases} c_0 = 2 \\ d_0 = 1 \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} c_n = c_{n-1} \cdot d_{n-1} \\ d_n = c_{n-1} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$d_n = 2^{f_n}$$

Przykład 4: $e_n = f_{f_n}$ (praca domowa)

Uwaga: Ciągi spełniające rekurencję postaci

$$a_{n+k} = P(a_n, \ldots, a_{n+k-1})$$

gdzie P — wielomian, to **nie wszystkie** ciągi polirekurencyjne, np. $n!$.

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Jest m^k możliwych zestawów reszt $(u_n^1 \bmod m), \ldots, (u_n^k \bmod m)$. $\square$

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Jest m^k możliwych zestawów reszt $(u_n^1 \bmod m), \ldots, (u_n^k \bmod m)$. $\square$

Wniosek: Liczby Catalana nie są polirekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Jest m^k możliwych zestawów reszt $(u_n^1 \bmod m), \ldots, (u_n^k \bmod m)$. $\square$

Wniosek: Liczby Catalana nie są polirekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Fakt: Nie są polirekurencyjne nawet nad $\mathbb{Q}$.

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Jest m^k możliwych zestawów reszt $(u_n^1 \bmod m), \ldots, (u_n^k \bmod m)$. $\square$

Wniosek: Liczby Catalana nie są polirekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Fakt: Nie są polirekurencyjne nawet nad $\mathbb{Q}$.

Przykład 6: A co z ciągiem $t_n = n^n$?

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Jest m^k możliwych zestawów reszt $(u_n^1 \bmod m), \ldots, (u_n^k \bmod m)$. $\square$

Wniosek: Liczby Catalana nie są polirekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Fakt: Nie są polirekurencyjne nawet nad $\mathbb{Q}$.

Przykład 6: A co z ciągiem $t_n = n^n$?

– Asymptotyka prawie taka jak $n!$.

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Jest m^k możliwych zestawów reszt $(u_n^1 \bmod m), \ldots, (u_n^k \bmod m)$. $\square$

Wniosek: Liczby Catalana nie są polirekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Fakt: Nie są polirekurencyjne nawet nad $\mathbb{Q}$.

Przykład 6: A co z ciągiem $t_n = n^n$?

– Asymptotyka prawie taka jak $n!$.

– Reszty modulo dowolne m zachowują się okresowo.

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Jest m^k możliwych zestawów reszt $(u_n^1 \bmod m), \ldots, (u_n^k \bmod m)$. $\square$

Wniosek: Liczby Catalana nie są polirekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Fakt: Nie są polirekurencyjne nawet nad $\mathbb{Q}$.

Przykład 6: A co z ciągiem $t_n = n^n$?

- Asymptotyka prawie taka jak $n!$.
- Reszty modulo dowolne m zachowują się okresowo.
- Zmiana podstawy wydaje się problematyczna...

Ciągi polirekurencyjne: przykłady i własności

Przykład 5: A co z liczbami Catalana C_n?

Fakt: Jeśli a_n jest polirekurencyjny nad $\mathbb{Z}$, to dla każdego $m \in \mathbb{N}$

ciąg $(a_n \bmod m)$ jest ostatecznie okresowy.

D: Jest m^k możliwych zestawów reszt $(u_n^1 \bmod m), \ldots, (u_n^k \bmod m)$. $\square$

Wniosek: Liczby Catalana nie są polirekurencyjne nad $\mathbb{Z}$.

Fakt: Nie są polirekurencyjne nawet nad $\mathbb{Q}$.

Przykład 6: A co z ciągiem $t_n = n^n$?

- Asymptotyka prawie taka jak $n!$.
- Reszty modulo dowolne m zachowują się okresowo.
- Zmiana podstawy wydaje się problematyczna...

Twierdzenie (Cadilhac, Mazowiecki, Paperman, P, Sénizergues)

Ciąg $t_n = n^n$ nie jest polirekurencyjny.

Zanikające wielomiany

Zanikające wielomiany

Lemat (o zanikającej formie liniowej)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **liniowo rekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka **forma liniowa** $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że

$$S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Zanikające wielomiany

Lemat (o zanikającej formie liniowej)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **liniowo rekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka **forma liniowa** $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że

$$S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Lemat (o zanikającym wielomianie)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **polirekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taki **wielomian** $Z \in \mathbb{Q}[y_0, y_1, \ldots, y_k]$, że

$$Z(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Zanikające wielomiany

Lemat (o zanikającej formie liniowej)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **liniowo rekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka **forma liniowa** $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że

$$S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Lemat (o zanikającym wielomianie)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **polirekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taki **wielomian** $Z \in \mathbb{Q}[y_0, y_1, \ldots, y_k]$, że

$$Z(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Przykład: Dla $n!$, mamy $Z(y_0, y_1, y_2) = y_2 y_0 - y_1^2 - y_1 y_0$.

Zanikające wielomiany

Lemat (o zanikającej formie liniowej)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **liniowo rekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka **forma liniowa** $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że

$$S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Lemat (o zanikającym wielomianie)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **polirekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taki **wielomian** $Z \in \mathbb{Q}[y_0, y_1, \ldots, y_k]$, że

$$Z(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Przykład: Dla $n!$, mamy $Z(y_0, y_1, y_2) = y_2 y_0 - y_1^2 - y_1 y_0$.

Później: Ciąg n^n nie ma zanikającego wielomianu.

Zanikające wielomiany

Lemat (o zanikającej formie liniowej)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **liniowo rekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taka **forma liniowa** $S\colon \mathbb{Q}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, że

$$S(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Lemat (o zanikającym wielomianie)

Jeśli $\langle a_n \rangle$ jest **polirekurencyjny**, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ oraz taki **wielomian** $Z \in \mathbb{Q}[y_0, y_1, \ldots, y_k]$, że

$$Z(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Przykład: Dla $n!$, mamy $Z(y_0, y_1, y_2) = y_2 y_0 - y_1^2 - y_1 y_0$.

Później: Ciąg n^n nie ma zanikającego wielomianu.

Teraz: Dowód lematu o zanikającym wielomianie.

Dowód: a_n zadany układem polirekurencyjnym z ciągami $a_n = u_n^1, \ldots, u_n^k$

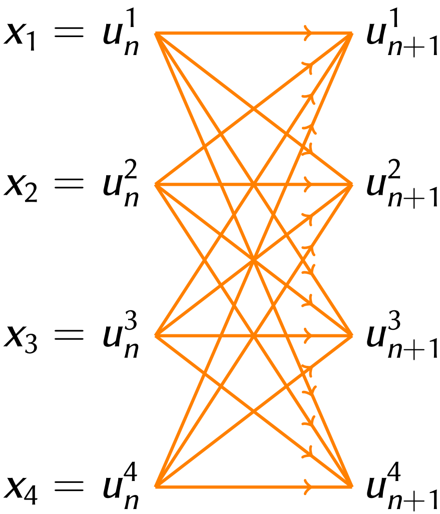
$x_1 = u_n^1$

$x_2 = u_n^2$

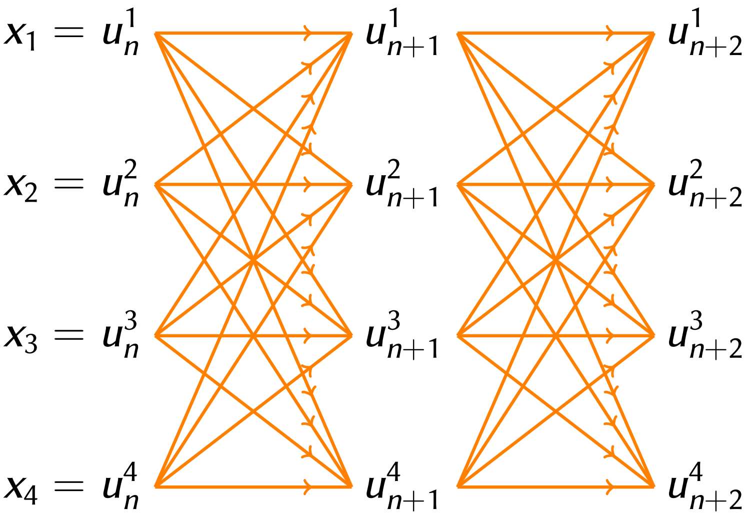
$x_3 = u_n^3$

$x_4 = u_n^4$

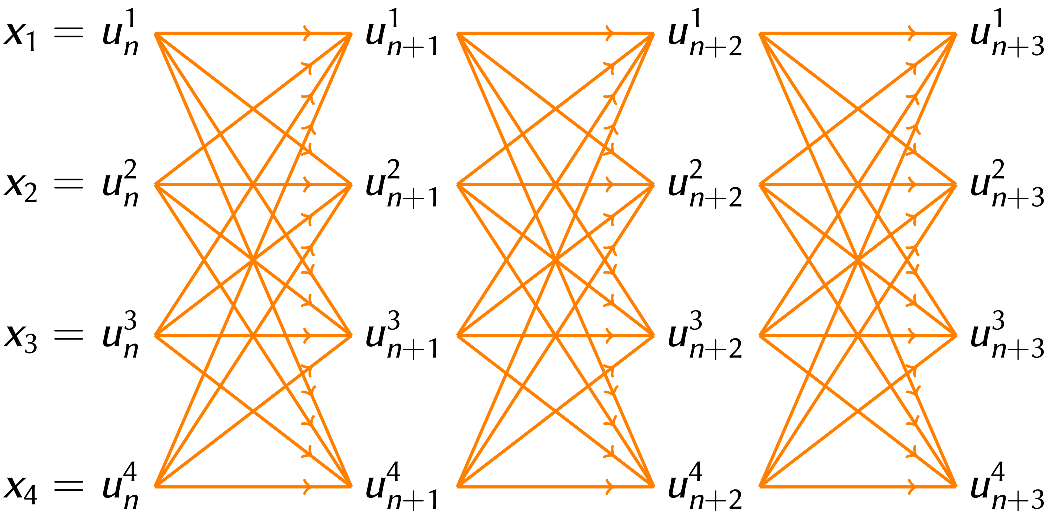
Dowód: a_n zadany układem polirekurencyjnym z ciągami $a_n = u_n^1, \ldots, u_n^k$



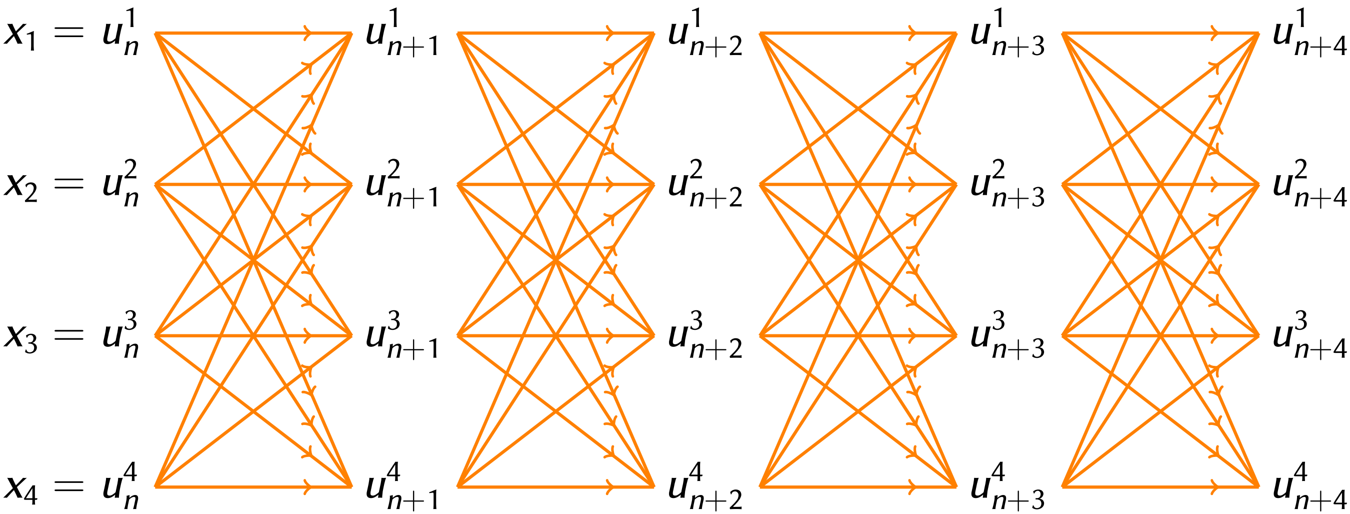
Dowód: a_n zadany układem polirekurencyjnym z ciągami $a_n = u_n^1, \ldots, u_n^k$



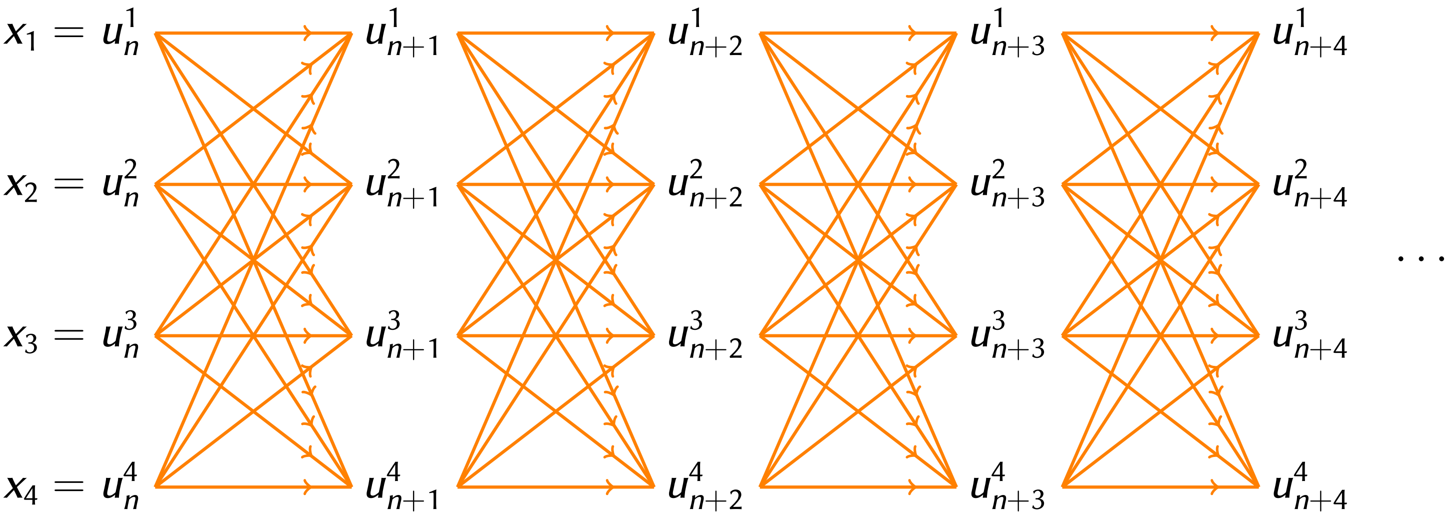
Dowód: a_n zadany układem polirekurencyjnym z ciągami $a_n = u_n^1, \ldots, u_n^k$



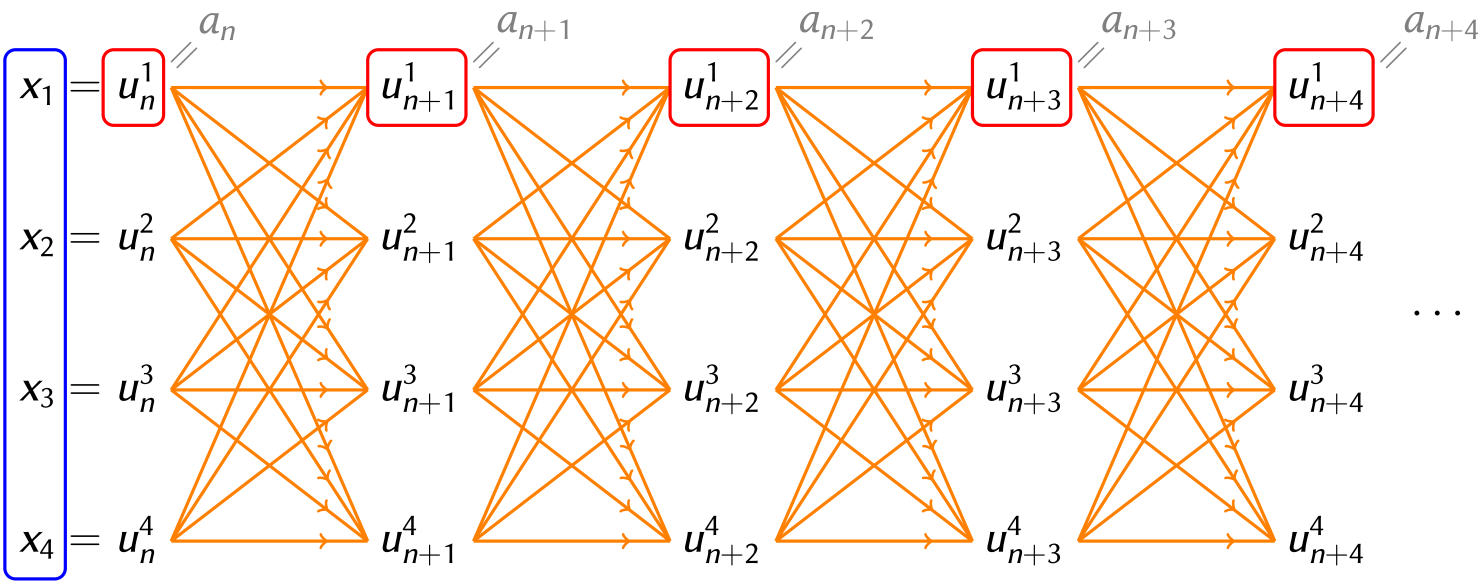
Dowód: a_n zadany układem polirekurencyjnym z ciągami $a_n = u_n^1, \ldots, u_n^k$



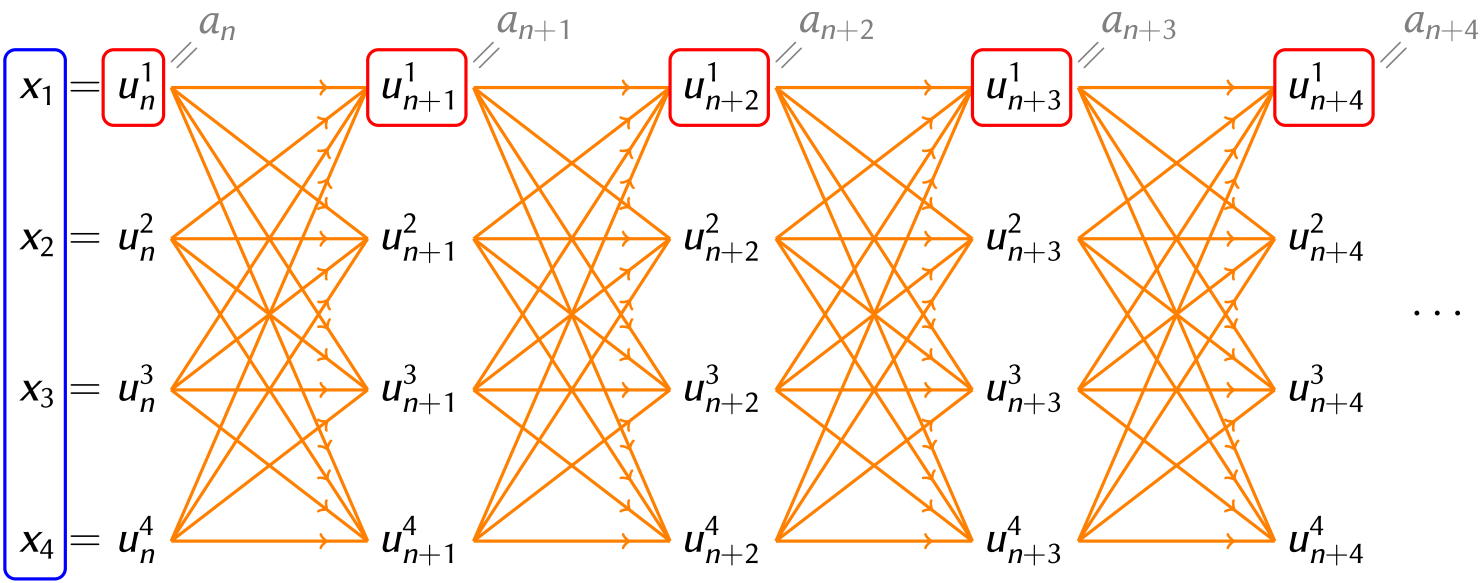
Dowód: a_n zadany układem polirekurencyjnym z ciągami $a_n = u_n^1, \ldots, u_n^k$



Dowód: a_n zadany układem polirekurencyjnym z ciągami $a_n = u_n^1, \ldots, u_n^k$



Dowód: a_n zadany układem polirekurencyjnym z ciągami $a_n = u_n^1, \dots, u_n^k$



$$
\begin{aligned}
u_n^1 &= T_0(x_1, \dots, x_k) = x_1 \\
u_{n+1}^1 &= T_1(x_1, \dots, x_k) \\
u_{n+2}^1 &= T_2(x_1, \dots, x_k) \\
u_{n+3}^1 &= T_3(x_1, \dots, x_k) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

wielomiany

Wielomiany $T_0, T_1, T_2, \ldots \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ spełniają dla wszystkich n:

$$\begin{aligned} a_n &= T_0(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\ a_{n+1} &= T_1(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\ a_{n+2} &= T_2(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\ a_{n+3} &= T_3(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wielomiany $T_0, T_1, T_2, \ldots \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ spełniają dla wszystkich n:

$$\begin{aligned} a_n &= T_0(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\ a_{n+1} &= T_1(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\ a_{n+2} &= T_2(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\ a_{n+3} &= T_3(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Fakt

W pierścieniu $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ każde $k+1$ wielomianów $T_0, T_1, \ldots, T_k$ jest **algebraicznie zależnych**, tzn. istnieje taki $Z \in \mathbb{Q}[y_0, y_1, \ldots, y_k]$, że

$$Z(T_0, T_1, \ldots, T_k) \equiv 0.$$

Wielomiany $T_0, T_1, T_2, \ldots \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ spełniają dla wszystkich n:

$$\begin{aligned}
a_n &= T_0(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\
a_{n+1} &= T_1(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\
a_{n+2} &= T_2(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\
a_{n+3} &= T_3(u_n^1, \ldots, u_n^k) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Fakt

W pierścieniu $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ każde $k+1$ wielomianów $T_0, T_1, \ldots, T_k$ jest **algebraicznie zależnych**, tzn. istnieje taki $Z \in \mathbb{Q}[y_0, y_1, \ldots, y_k]$, że

$$Z(T_0, T_1, \ldots, T_k) \equiv 0.$$

Wniosek: dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, mamy

$$0 = Z(T_0(\vec{u}_n), T_0(\vec{u}_n), \ldots, T_k(\vec{u}_n)) = Z(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}). \qquad \square$$

Zanikający wielomian dla n^n

Zostało: Wykazać, że ciąg n^n nie ma zanikającego wielomianu.

Zanikający wielomian dla n^n

Zostało: Wykazać, że ciąg n^n nie ma zanikającego wielomianu.

Przypuśćmy, że $Z(y_0, \ldots, y_k)$ jest **zanikający**:

$$Z(n^n, (n+1)^{n+1}, \ldots, (n+k)^{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Zanikający wielomian dla n^n

Zostało: Wykazać, że ciąg n^n nie ma zanikającego wielomianu.

Przypuśćmy, że $Z(y_0, \ldots, y_k)$ jest **zanikający**:

$$Z(n^n, (n+1)^{n+1}, \ldots, (n+k)^{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Uwaga: Możemy założyć, że Z ma współczynniki całkowite.

Zanikający wielomian dla n^n

Zostało: Wykazać, że ciąg n^n nie ma zanikającego wielomianu.

Przypuśćmy, że $Z(y_0, \ldots, y_k)$ jest **zanikający**:

$$Z(n^n, (n+1)^{n+1}, \ldots, (n+k)^{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Uwaga: Możemy założyć, że Z ma współczynniki całkowite.

Pochylmy się nad dowolnym **jednomianem** w Z, np. $4y_0y_1^2y_2^2$:

Zanikający wielomian dla n^n

Zostało: Wykazać, że ciąg n^n nie ma zanikającego wielomianu.

Przypuśćmy, że $Z(y_0, \ldots, y_k)$ jest **zanikający**:

$$Z(n^n, (n+1)^{n+1}, \ldots, (n+k)^{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Uwaga: Możemy założyć, że Z ma współczynniki całkowite.

Pochylmy się nad dowolnym **jednomianem** w Z, np. $4y_0y_1^2y_2^2$:

$$\begin{aligned} 4y_0y_1^2y_2^3 &= 4 \cdot n^n \cdot (n+1)^{2(n+1)} \cdot (n+2)^{3(n+2)} \\ &= 4(n+1)^2(n+2)^6 \cdot \left(n(n+1)^2(n+2)^3\right)^n = P(n) \cdot Q(n)^n; \end{aligned}$$

$$P(x) = 4(x+1)^2(x+2)^6,$$

$$Q(x) = x(x+1)^2(x+2)^3.$$

Zanikający wielomian dla n^n

Zostało: Wykazać, że ciąg n^n nie ma zanikającego wielomianu.

Przypuśćmy, że $Z(y_0, \ldots, y_k)$ jest **zanikający**:

$$Z(n^n, (n+1)^{n+1}, \ldots, (n+k)^{n+k}) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Uwaga: Możemy założyć, że Z ma współczynniki całkowite.

Pochylmy się nad dowolnym **jednomianem** w Z, np. $4y_0y_1^2y_2^3$:

$$\begin{aligned} 4y_0y_1^2y_2^3 &= 4 \cdot n^n \cdot (n+1)^{2(n+1)} \cdot (n+2)^{3(n+2)} \\ &= 4(n+1)^2(n+2)^6 \cdot \left(n(n+1)^2(n+2)^3\right)^n = P(n) \cdot Q(n)^n; \end{aligned}$$

$$P(x) = 4(x+1)^2(x+2)^6,$$

$$Q(x) = x(x+1)^2(x+2)^3.$$

Wniosek: Możemy napisać

$$Z(n^n, \ldots, (n+k)^{n+k}) = \sum_{i=1}^{\ell} P_i(n) \cdot Q_i(n)^n,$$

gdzie $P_i, Q_i \in \mathbb{Z}[x]$ są niezerowe, zaś Q_i są parami różne.

Zanikający wielomian dla n^n

Trzeba udowodnić następujący fakt:

Lemat

Nie istnieją niezerowe $P_1, \ldots, P_\ell, Q_1, \ldots, Q_\ell \in \mathbb{Z}[x]$, gdzie Q_i różne, że

$$P_1(n) \cdot Q_1(n)^n + \ldots + P_\ell(n) \cdot Q_\ell(n)^n = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Zanikający wielomian dla n^n

Trzeba udowodnić następujący fakt:

Lemat

Nie istnieją niezerowe $P_1, \ldots, P_\ell, Q_1, \ldots, Q_\ell \in \mathbb{Z}[x]$, gdzie Q_i różne, że

$$P_1(n) \cdot Q_1(n)^n + \ldots + P_\ell(n) \cdot Q_\ell(n)^n = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Szkic dowodu: Rozważamy równanie modulo dowolne pierwsze p.

Zanikający wielomian dla n^n

Trzeba udowodnić następujący fakt:

Lemat

Nie istnieją niezerowe $P_1, \ldots, P_\ell, Q_1, \ldots, Q_\ell \in \mathbb{Z}[x]$, gdzie Q_i różne, że

$$P_1(n) \cdot Q_1(n)^n + \ldots + P_\ell(n) \cdot Q_\ell(n)^n = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Szkic dowodu: Rozważamy równanie modulo dowolne pierwsze p.

$$n \equiv a \mod p \qquad \Rightarrow \qquad Q_i(n) \equiv Q_i(a) \bmod p$$

Zanikający wielomian dla n^n

Trzeba udowodnić następujący fakt:

Lemat

Nie istnieją niezerowe $P_1, \ldots, P_\ell, Q_1, \ldots, Q_\ell \in \mathbb{Z}[x]$, gdzie Q_i różne, że

$$P_1(n) \cdot Q_1(n)^n + \ldots + P_\ell(n) \cdot Q_\ell(n)^n = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Szkic dowodu: Rozważamy równanie modulo dowolne pierwsze p.

$$n \equiv a \mod p \qquad \Rightarrow \qquad Q_i(n) \equiv Q_i(a) \bmod p$$

$$n \equiv b \mod p-1,\ b > 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_i(n)^n \equiv Q_i(n)^b \bmod p$$

Zanikający wielomian dla n^n

Trzeba udowodnić następujący fakt:

Lemat

Nie istnieją niezerowe $P_1, \ldots, P_\ell, Q_1, \ldots, Q_\ell \in \mathbb{Z}[x]$, gdzie Q_i różne, że

$$P_1(n) \cdot Q_1(n)^n + \ldots + P_\ell(n) \cdot Q_\ell(n)^n = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Szkic dowodu: Rozważamy równanie modulo dowolne pierwsze p.

$$n \equiv a \mod p \qquad \Rightarrow \qquad Q_i(n) \equiv Q_i(a) \bmod p$$

$$n \equiv b \mod p-1,\ b > 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_i(n)^n \equiv Q_i(n)^b \bmod p$$

Obs: Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, mamy $\sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$.

Zanikający wielomian dla n^n

Trzeba udowodnić następujący fakt:

Lemat

Nie istnieją niezerowe $P_1, \ldots, P_\ell, Q_1, \ldots, Q_\ell \in \mathbb{Z}[x]$, gdzie Q_i różne, że

$$P_1(n) \cdot Q_1(n)^n + \ldots + P_\ell(n) \cdot Q_\ell(n)^n = 0 \qquad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Szkic dowodu: Rozważamy równanie modulo dowolne pierwsze p.

$$n \equiv a \mod p \qquad \Rightarrow \qquad Q_i(n) \equiv Q_i(a) \bmod p$$

$$n \equiv b \mod p-1,\ b > 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_i(n)^n \equiv Q_i(n)^b \bmod p$$

Obs: Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, mamy $\sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$.

D: Bierzemy takie $n \in \mathbb{N}$, że $n \equiv_p a$ oraz $n \equiv_{p-1} b$. $\square$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \quad \sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$$

Zapiszmy te równania dla dowolnego a oraz $b = 1, 2, 3, \ldots, \ell$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \quad \sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$$

Zapiszmy te równania dla dowolnego a oraz $b = 1, 2, 3, \ldots, \ell$:

$$\begin{gathered}
P_1(a) \cdot Q_1(a)^1 + \ldots + P_\ell(a) \cdot Q_\ell(a)^1 \equiv 0 \\
P_1(a) \cdot Q_1(a)^2 + \ldots + P_\ell(a) \cdot Q_\ell(a)^2 \equiv 0 \\
P_1(a) \cdot Q_1(a)^3 + \ldots + P_\ell(a) \cdot Q_\ell(a)^3 \equiv 0 \\
\vdots \\
P_1(a) \cdot Q_1(a)^\ell + \ldots + P_\ell(a) \cdot Q_\ell(a)^\ell \equiv 0
\end{gathered}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \quad \sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$$

Zapiszmy te równania dla dowolnego a oraz $b = 1, 2, 3, \ldots, \ell$:

$$\begin{bmatrix} Q_1(a)^1 & Q_2(a)^1 & \cdots & Q_\ell(a)^1 \\ Q_1(a)^2 & Q_2(a)^2 & \cdots & Q_\ell(a)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(a)^\ell & Q_2(a)^\ell & \cdots & Q_\ell(a)^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(a) \\ P_2(a) \\ \vdots \\ P_\ell(a) \end{bmatrix} \equiv_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$$

Zapiszmy te równania dla dowolnego a oraz $b = 1, 2, 3, \ldots, \ell$:

$$\begin{bmatrix} Q_1(a)^1 & Q_2(a)^1 & \cdots & Q_\ell(a)^1 \\ Q_1(a)^2 & Q_2(a)^2 & \cdots & Q_\ell(a)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(a)^\ell & Q_2(a)^\ell & \cdots & Q_\ell(a)^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(a) \\ P_2(a) \\ \vdots \\ P_\ell(a) \end{bmatrix} \equiv_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs: det $M(a) = \prod_i Q_i(a) \cdot \prod_{i<j}(Q_i(a) - Q_j(a))$ to niezerowy wielomian.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \ \sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$$

Zapiszmy te równania dla dowolnego a oraz $b = 1, 2, 3, \ldots, \ell$:

$$\begin{bmatrix} Q_1(a)^1 & Q_2(a)^1 & \cdots & Q_\ell(a)^1 \\ Q_1(a)^2 & Q_2(a)^2 & \cdots & Q_\ell(a)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(a)^\ell & Q_2(a)^\ell & \cdots & Q_\ell(a)^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(a) \\ P_2(a) \\ \vdots \\ P_\ell(a) \end{bmatrix} \equiv_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs: $\det M(a) = \prod_i Q_i(a) \cdot \prod_{i<j}(Q_i(a) - Q_j(a))$ to niezerowy wielomian.

– $M(a)$ jest odwracalna poza kilkoma a.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0: \quad \sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$$

Zapiszmy te równania dla dowolnego a oraz $b = 1, 2, 3, \ldots, \ell$:

$$\begin{bmatrix} Q_1(a)^1 & Q_2(a)^1 & \cdots & Q_\ell(a)^1 \\ Q_1(a)^2 & Q_2(a)^2 & \cdots & Q_\ell(a)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(a)^\ell & Q_2(a)^\ell & \cdots & Q_\ell(a)^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(a) \\ P_2(a) \\ \vdots \\ P_\ell(a) \end{bmatrix} \equiv_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs: det $M(a) = \prod_i Q_i(a) \cdot \prod_{i<j}(Q_i(a) - Q_j(a))$ to niezerowy wielomian.

– $M(a)$ jest odwracalna poza kilkoma a.

– Dla dużego p, macierz M jest odwracalna nad $\mathbb{Z}_p$ poza kilkoma a.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$$

Zapiszmy te równania dla dowolnego a oraz $b = 1, 2, 3, \ldots, \ell$:

$$\begin{bmatrix} Q_1(a)^1 & Q_2(a)^1 & \cdots & Q_\ell(a)^1 \\ Q_1(a)^2 & Q_2(a)^2 & \cdots & Q_\ell(a)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(a)^\ell & Q_2(a)^\ell & \cdots & Q_\ell(a)^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(a) \\ P_2(a) \\ \vdots \\ P_\ell(a) \end{bmatrix} \equiv_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs: $\det M(a) = \prod_i Q_i(a) \cdot \prod_{i<j}(Q_i(a) - Q_j(a))$ to niezerowy wielomian.

– $M(a)$ jest odwracalna poza kilkoma a.

– Dla dużego p, macierz M jest odwracalna nad $\mathbb{Z}_p$ poza kilkoma a.

– $P_i(a) \equiv_p 0$, poza kilkoma $a \in \mathbb{Z}_p$.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \sum P_i(a) \cdot Q_i(a)^b \equiv 0 \mod p$$

Zapiszmy te równania dla dowolnego a oraz $b = 1, 2, 3, \ldots, \ell$:

$$\begin{bmatrix} Q_1(a)^1 & Q_2(a)^1 & \cdots & Q_\ell(a)^1 \\ Q_1(a)^2 & Q_2(a)^2 & \cdots & Q_\ell(a)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(a)^\ell & Q_2(a)^\ell & \cdots & Q_\ell(a)^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(a) \\ P_2(a) \\ \vdots \\ P_\ell(a) \end{bmatrix} \equiv_p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs: det $M(a) = \prod_i Q_i(a) \cdot \prod_{i<j}(Q_i(a) - Q_j(a))$ to niezerowy wielomian.

- $M(a)$ jest odwracalna poza kilkoma a.
- Dla dużego p, macierz M jest odwracalna nad $\mathbb{Z}_p$ poza kilkoma a.
- $P_i(a) \equiv_p 0$, poza kilkoma $a \in \mathbb{Z}_p$.

Sprzeczność: wielomiany P_i mają ustalone stopnie,

nie mogą mieć za dużo pierwiastków! $\square$

Podsumowanie

Podsumowanie

Zbadaliśmy:

- Ciągi **liniowo-rekurencyjne**, opisane **liniowymi** rekurencjami.
- Ciągi **polirekurencyjne**, opisane **wielomianowymi** rekurencjami.

Podsumowanie

Zbadaliśmy:

- Ciągi **liniowo-rekurencyjne**, opisane **liniowymi** rekurencjami.
- Ciągi **polirekurencyjne**, opisane **wielomianowymi** rekurencjami.

Własności: **Asymptotyka**, **Periodyczność**, **Zanikające Formy**.

Podsumowanie

Zbadaliśmy:

- Ciągi **liniowo-rekurencyjne**, opisane **liniowymi** rekurencjami.
- Ciągi **polirekurencyjne**, opisane **wielomianowymi** rekurencjami.

Własności: **Asymptotyka**, **Periodyczność**, **Zanikające Formy**.

Udowodniliśmy: C_n oraz n^n nie są polirekurencyjne.

Podsumowanie

Zbadaliśmy:

- Ciągi **liniowo-rekurencyjne**, opisane **liniowymi** rekurencjami.
- Ciągi **polirekurencyjne**, opisane **wielomianowymi** rekurencjami.

Własności: **Asymptotyka**, **Periodyczność**, **Zanikające Formy**.

Udowodniliśmy: C_n oraz n^n nie są polirekurencyjne.

Praca domowa: Czy n^{n^2} jest polirekurencyjny?

Podsumowanie

Zbadaliśmy:

- Ciągi **liniowo-rekurencyjne**, opisane **liniowymi** rekurencjami.
- Ciągi **polirekurencyjne**, opisane **wielomianowymi** rekurencjami.

Własności: **Asymptotyka**, **Periodyczność**, **Zanikające Formy**.

Udowodniliśmy: C_n oraz n^n nie są polirekurencyjne.

Praca domowa: Czy n^{n^2} jest polirekurencyjny?

Ciągi **wymiernie rekurencyjne**: używamy wyrażeń wymiernych

$$\frac{P(x_1, \ldots, x_k)}{Q(x_1, \ldots, x_k)}$$

Podsumowanie

Zbadaliśmy:

- Ciągi **liniowo-rekurencyjne**, opisane **liniowymi** rekurencjami.
- Ciągi **polirekurencyjne**, opisane **wielomianowymi** rekurencjami.

Własności: **Asymptotyka**, **Periodyczność**, **Zanikające Formy**.

Udowodniliśmy: C_n oraz n^n nie są polirekurencyjne.

Praca domowa: Czy n^{n^2} jest polirekurencyjny?

Ciągi **wymiernie rekurencyjne**: używamy wyrażeń wymiernych

$$\frac{P(x_1, \ldots, x_k)}{Q(x_1, \ldots, x_k)}$$

- **Praca domowa:** liczby Catalana C_n są wymiernie rekurencyjne.

Podsumowanie

Zbadaliśmy:

- Ciągi **liniowo-rekurencyjne**, opisane **liniowymi** rekurencjami.
- Ciągi **polirekurencyjne**, opisane **wielomianowymi** rekurencjami.

Własności: **Asymptotyka**, **Periodyczność**, **Zanikające Formy**.

Udowodniliśmy: C_n oraz n^n nie są polirekurencyjne.

Praca domowa: Czy n^{n^2} jest polirekurencyjny?

Ciągi **wymiernie rekurencyjne**: używamy wyrażeń wymiernych

$$\frac{P(x_1, \ldots, x_k)}{Q(x_1, \ldots, x_k)}$$

- **Praca domowa:** liczby Catalana C_n są wymiernie rekurencyjne.
- **Fakt:** n^n nie jest wymiernie rekurencyjny.

Podsumowanie

Zbadaliśmy:

- Ciągi **liniowo-rekurencyjne**, opisane **liniowymi** rekurencjami.
- Ciągi **polirekurencyjne**, opisane **wielomianowymi** rekurencjami.

Własności: **Asymptotyka**, **Periodyczność**, **Zanikające Formy**.

Udowodniliśmy: C_n oraz n^n nie są polirekurencyjne.

Praca domowa: Czy n^{n^2} jest polirekurencyjny?

Ciągi **wymiernie rekurencyjne**: używamy wyrażeń wymiernych

$$\frac{P(x_1, \ldots, x_k)}{Q(x_1, \ldots, x_k)}$$

- **Praca domowa:** liczby Catalana C_n są wymiernie rekurencyjne.
- **Fakt:** n^n nie jest wymiernie rekurencyjny.

Dziękuję za uwagę!