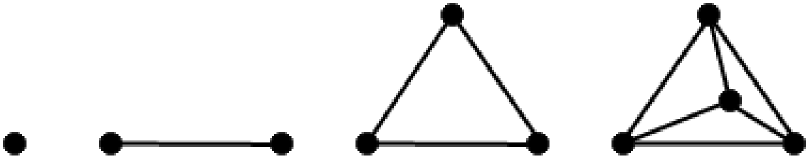
Papier, Nożyce, Kamień, Jaszczurka

Marcel Mroczek

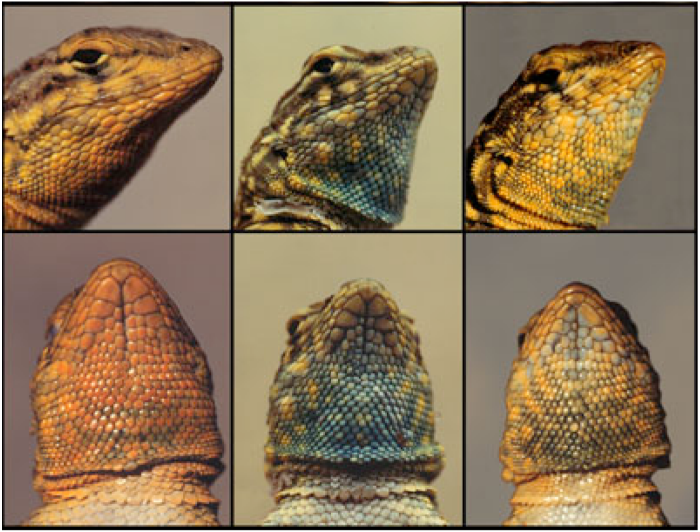
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

LXI Szkoła Matematyki Poglądowej
23 luty 2020

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{Kamień} & \text{Papier} & \text{Nożyce} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Kamień} \\ \text{Papier} \\ \text{Nożyce} \end{array} &
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



Uta stansburiana to gatunek jaszczurki z Ameryki Północnej



Samce Jelenia Czerwonego (*Cervus elaphus*)

Przykładowa macierz gry między jeleniami może wyglądać następująco:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Jastrząb} & \text{Gołąb} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Jastrząb} \\ \text{Gołąb} \end{array} & \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definicja

$p \in \triangle_n$ nazywamy *Stanem Równowagi Nasha* (NE), jeśli żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić strategii, formalnie można zapisać to jako: $\forall_{x \in \triangle_n}\ pAp^t \geqslant xAp^t$

Przykład

Znajdźmy stan równowagi Nasha dla gry Jastrząb/Gołąb

$$x \cdot (-15) + (1-x) \cdot 10 = x \cdot 0 + (1-x) \cdot 5$$
$$-25x + 10 = 5 - 5x$$
$$x = \frac{1}{4}$$

Zatem żeby populacja była w równowadze musi się składać w $\frac{1}{4}$ z Jastrzębi i $\frac{3}{4}$ z Gołębi.

Definicja

$p \in \triangle_n$ nazywamy *stanem ewolucyjnie stabilnym* (ESS), jeśli populacja o takim rozkładzie jest odporna na inwazję pewnej liczby mutantów czyli osobników spoza populacji. Formalnie zapisujemy to jako:

$$\forall_{x \in \triangle_n} \exists_{\varepsilon \geqslant 0} \; pA((1-\varepsilon)p + \varepsilon x)^t \geqslant xA((1-\varepsilon)p + \varepsilon x)^t$$

Twierdzenie

Następujące warunki są równoważne:

1. $p \in \triangle_n$ *jest ESS*
2. $\forall_{x \in \triangle_n} \; pAp^t \geqslant xAp^t$ *oraz*

$$\forall_{x \in \triangle_n, x \neq p} pAp^t = xAp^t \Rightarrow pAx^t > xAx^t$$

3. $\exists_{\varepsilon_p > 0} \forall_{\varepsilon \leqslant \varepsilon_p} \forall_{x \in \triangle_n} \; pA((1-\varepsilon)p + \varepsilon x)^t \geqslant xA((1-\varepsilon)p + \varepsilon x)^t$

ε_p *z warunku* 3 *nazywamy barierą przeciwko inwazji.*

Przykład

Rozpatrzmy grę zadaną przez Macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ma ona dwa ESS-y w punktach $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ oraz $(0, 0, 1)$. Łatwo sprawdzić, że jednostajną barierą przeciwko inwazji jest $\frac{1}{3}$.

Twierdzenie (Haigha o nośniku)

Twierdzenie to opisuje wynik strategii czystych przeciwko ESS.

$$p \text{ jest } ESS \;\; \forall_{i \in supp(p)} e_i A p^t = pAp^t = max\{j \in \{0, ..., n\} | e_j A p^t\}.$$

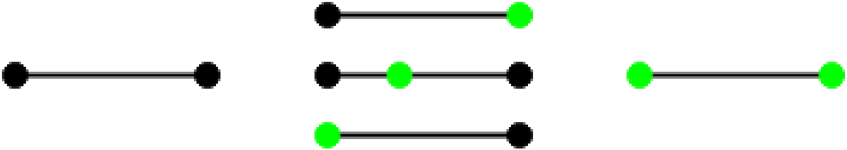
Wniosek

ESS jest jedyny na najmniejszej zawierającej go ścianie sympleksu. Czyli jeśli p jest ESS i $supp(q) \subset supp(p)$,to q nie może być ESS-em.

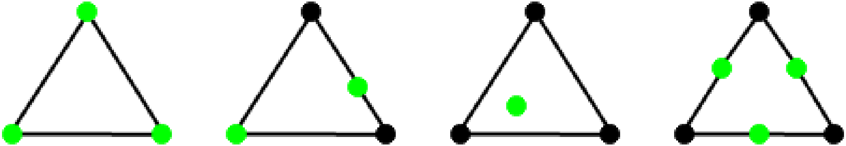
Wniosek

Jest skończenie wiele ESS-ów.

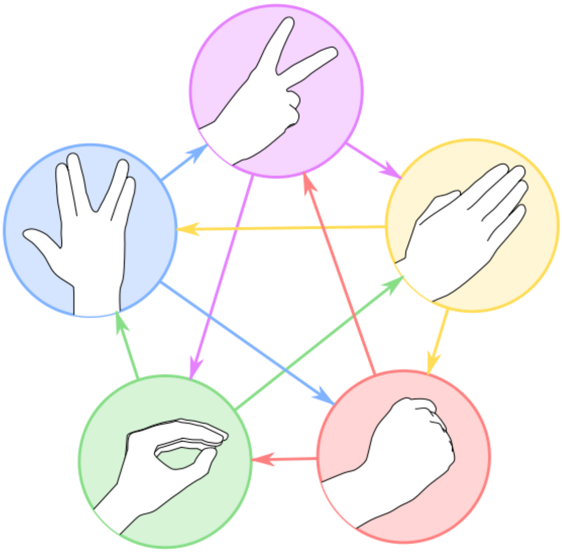
Rozważmy wszystkie możliwe Układy ESS-ów dla macierzy 2×2 na jakie pozwala nam twierdzenie Haigha. Jest 5 możliwości:



Wszystkie z nich można łatwo zadać macierzami



Trzy pierwsze można łatwo zadać macierzami, jednakże nie istnieje macierz która dawała by czwarty układ.



- Broom, Mark, and Jan Rychtár. Game-theoretical models in biology
- Sinervo, Barry, and Curt M. Lively. "The rock–paper–scissors game and the evolution of alternative male strategies."