Prosta jest prosta!
A odcinek i okrąg jeszcze łatwiejsze...

Martha Łącka

Wola Ducka, 23 lutego 2020 r.

W porządku!

Zagadka nr 1

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest okresowy.

W porządku!

Zagadka nr 1

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest okresowy. Czy może się zdarzyć, że $f(f(2020)) < 2019$?

W porządku!

Zagadka nr 1

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest okresowy. Czy może się zdarzyć, że $f(f(2020)) < 2019$?

Kilka obserwacji

- Funkcja f jest na.

W porządku!

Zagadka nr 1

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest okresowy. Czy może się zdarzyć, że $f(f(2020)) < 2019$?

Kilka obserwacji

- Funkcja f jest na.
- Funkcja f jest różnowartościowa.

W porządku!

Zagadka nr 1

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest okresowy. Czy może się zdarzyć, że $f(f(2020)) < 2019$?

Kilka obserwacji

- Funkcja f jest na.
- Funkcja f jest różnowartościowa.
- Funkcja f jest monotoniczna.

W porządku!

Zagadka nr 1

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest okresowy. Czy może się zdarzyć, że $f(f(2020)) < 2019$?

Kilka obserwacji

- Funkcja f jest na.
- Funkcja f jest różnowartościowa.
- Funkcja f jest monotoniczna.

Przypadek 1: f jest rosnąca

Jeśli $x < f(x)$, to $x < f(x) < f(f(x)) < f(f(f(x))) < \dots$.

W porządku!

Zagadka nr 1

Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest okresowy. Czy może się zdarzyć, że $f(f(2020)) < 2019$?

Kilka obserwacji

- Funkcja f jest na.
- Funkcja f jest różnowartościowa.
- Funkcja f jest monotoniczna.

Przypadek 1: f jest rosnąca

Jeśli $x < f(x)$, to $x < f(x) < f(f(x)) < f(f(f(x))) < \ldots$.
Jeśli $x > f(x)$, to $x > f(x) > f(f(x)) > f(f(f(x))) > \ldots$.
Zatem $f(x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, w szczególności
$f(f(2020)) = 2020 > 2019$.

Zagadka nr 2

O zegarze trochę inaczej

Zagadka nr 2.5

Czy da się sprzęgnąć obrót o 30 stopni w prawo z obrotem o 30 stopni w lewo **za pomocą homeomorfizmu zachowującego orientację**?

Liczba obrotu

Niech f będzie homeomorfizmem okręgu S^1 zachowującym orientację. Wówczas istnieje taka ściśle monotoniczna funkcja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $\pi \circ F = f \circ \pi$, gdzie π jest naturalnym rzutowaniem $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$, $\pi(x) = e^{2\pi i x}$.

Liczba obrotu

Niech f będzie homeomorfizmem okręgu S^1 zachowującym orientację. Wówczas istnieje taka ściśle monotoniczna funkcja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $\pi \circ F = f \circ \pi$, gdzie π jest naturalnym rzutowaniem $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$, $\pi(x) = e^{2\pi i x}$.
Jeśli f jest homeomorfizmem S^1 zachowującym orientację, F jego dowolnym podniesieniem, to dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \rho(F).$$

Ta granica nie zależy od punktu x. Ponadto, część ułamkowa $\{\rho(F)\}$ nie zależy od podniesienia. Oznaczamy ją $\rho(f)$ i nazywamy *liczbą obrotu homeomorfizmu f*.

Liczba obrotu

Niech f będzie homeomorfizmem okręgu S^1 zachowującym orientację. Wówczas istnieje taka ściśle monotoniczna funkcja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $\pi \circ F = f \circ \pi$, gdzie π jest naturalnym rzutowaniem $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$, $\pi(x) = e^{2\pi i x}$.
Jeśli f jest homeomorfizmem S^1 zachowującym orientację, F jego dowolnym podniesieniem, to dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n} = \rho(F).$$

Ta granica nie zależy od punktu x. Ponadto, część ułamkowa $\{\rho(F)\}$ nie zależy od podniesienia. Oznaczamy ją $\rho(f)$ i nazywamy *liczbą obrotu homeomorfizmu f*.

Liczba obrotu rotacji o $\alpha \in [0,1)$ wynosi α.

Własności liczby obrotu

- jeśli f i g są topologicznie sprzężone za pomocą homeomorfizmu zachowującego orientację, to $\rho(f) = \rho(g)$,

Własności liczby obrotu

- jeśli f i g są topologicznie sprzężone za pomocą homeomorfizmu zachowującego orientację, to $\rho(f) = \rho(g)$,
- $\rho(f) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy f ma punkt stały.
- $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy gdy f ma punkt okresowy.

Własności liczby obrotu

- jeśli f i g są topologicznie sprzężone za pomocą homeomorfizmu zachowującego orientację, to $\rho(f) = \rho(g)$,
- $\rho(f) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy f ma punkt stały.
- $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy gdy f ma punkt okresowy.
- Jeśli $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, to:
  - albo dla każdego $x \in S^1$ mamy $\omega(x) = S^1$ albo dla każdego $x \in S^1$ zbiór $\omega(x)$ jest (tym samym dla wszystkich x) zbiorem doskonałym, nigdziegęstym.
  - istnieje ciągłe i zachowujące orientację przekształcenie $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stopnia 1 takie że $h \circ f = T_\alpha \circ h$.

Twierdzenie Denjoy'a

Jeśli $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ jest dyfeomorfizmem klasy C^2 o niewymiernej liczbie obrotu, to f jest topologicznie sprzężone z obrotem o kąt $\alpha = \rho(f)$.

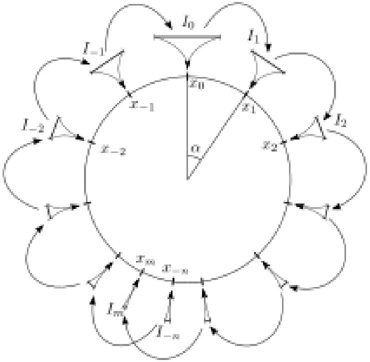
Twierdzenie Denjoy'a

Jeśli $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ jest dyfeomorfizmem klasy C^2 o niewymiernej liczbie obrotu, to f jest topologicznie sprzężone z obrotem o kąt $\alpha = \rho(f)$.

Zagadka nr 3

Czy założenie o niewymierności liczby obrotu jest istotne?

Przykład Denjoy'a



Co z homeomorfizmami odwracającymi orientację?

Zagadka nr 4

Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że 2^n zaczyna się od ulubionej liczby prof. Kordosa?

Zagadka nr 4

Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że 2^n zaczyna się od ulubionej liczby prof. Kordosa?

$$7 \cdot 10^k \leqslant 2^n < 8 \cdot 10^k$$

$$7 \leqslant 2^n / 10^k < 8$$

$$\log 7 \leqslant n \log 2 - k < \log 8$$

Znów w porządku... ale w trochę innym

Porządek Szarkowskiego

$$3 < 5 < 7 < 9 < \ldots < 2{\cdot}3 < 2{\cdot}5 < 2{\cdot}7 < \ldots < 4{\cdot}3 < 4{\cdot}5 < 4{\cdot}7 < \ldots$$

$$< \ldots 32 < 16 < 8 < 4 < 2 < 1$$

Znów w porządku... ale w trochę innym

Porządek Szarkowskiego

$$3 < 5 < 7 < 9 < \ldots < 2{\cdot}3 < 2{\cdot}5 < 2{\cdot}7 < \ldots < 4{\cdot}3 < 4{\cdot}5 < 4{\cdot}7 < \ldots$$

$$< \ldots 32 < 16 < 8 < 4 < 2 < 1$$

Twierdzenie Szarkowskiego

Niech $f\colon [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas, jeśli f ma punkt okresowy o okresie podstawowym k oraz $k < l$ (w porządku Szarkowskiego), to f ma punkt okresowy o okresie podstawowym l.

Znów w porządku... ale w trochę innym

Porządek Szarkowskiego

$$3 < 5 < 7 < 9 < \ldots < 2{\cdot}3 < 2{\cdot}5 < 2{\cdot}7 < \ldots < 4{\cdot}3 < 4{\cdot}5 < 4{\cdot}7 < \ldots$$

$$< \ldots 32 < 16 < 8 < 4 < 2 < 1$$

Twierdzenie Szarkowskiego

Niech $f\colon [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas, jeśli f ma punkt okresowy o okresie podstawowym k oraz $k < l$ (w porządku Szarkowskiego), to f ma punkt okresowy o okresie podstawowym l.

Zagadka nr 5

Czy podobne twierdzenie działa dla ciągłych przekształceń okręgu?

Relacje nakrywające

Niech $I, J \subset [0,1]$ będą przedziałami domkniętymi. Mówimy, że I nakrywa J i piszemy $I \longrightarrow J$, jeśli $f(I) \supset J$.

Jeśli $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$ to istnieje taki punkt okresowy x o okresie n, że $x \in I_0, f(x) \in I_1, \ldots, f^{n-1}(x) \in I_{n-1}$.

Proste... ale skomplikowane odwzorowanie