Liczby normalne i ciąg Champernowne'a

LXI SMP - Wola Ducka

Karol Gryszka

Definicja liczby normalnej

Liczba $x \in [0,1]$ jest normalna w systemie dziesiętnym, jeśli częstotliwość dowolnego skończonego ciągu k cyfr w x jest równa 10^{-k}.

Niech $w = a_1 a_2 \ldots a_k$ będzie ciągiem cyfr. Niech $x = 0,x_1 x_2 \ldots$ będzie rozwinięciem dziesiętnym liczby x. Definiujemy:

$$F(w,x,n) = \frac{\#\{1 \leqslant i \leqslant n :\ x_i = a_1, \ldots, x_{i+k-1} = a_k\}}{n}$$

$$F(w,x) = \lim_{n\to+\infty} F(w,x,n) \quad \text{(o ile istnieje!)}$$

Jeśli oznaczymy przez $|w|$ długość ciągu w, to równoważnie możemy powiedzieć, że x jest normalna, gdy dla dowolnego skończonego ciągu w zachodzi $F(w,x) = 10^{-|w|}$.

Przykład:

Ciąg Champernowne'a

$$012345678910111213141516161819202 1\ldots$$

definiuje liczbę

$$x := 0,012345678910111213141516161819202 1\ldots$$

zwaną stałą Champernowne'a, która jest liczbą normalną.

Przykład:

Ciąg Champernowne'a

$$0123456789101112131415161618192021\ldots$$

definiuje liczbę

$$x := 0,0123456789101112131415161618192021\ldots$$

zwaną stałą Champernowne'a, która jest liczbą normalną.

Pytanie kontrolne: dlaczego każda liczba normalna musi być niewymierna?

Inne przykłady:

- $0,23571113171923\ldots$ (stała Copelanda–Erdösa, 1946),
- $0,149162536496481100121144\ldots$ (stała Besicovitcha, 1935),
- $0,[f(1)][f(2)][f(3)]\ldots$, gdzie f jest dowolnym niestałym wielomianem dowolnego stopnia o tej własności, że $f(x) > 0$ dla $x > 0$ (Nakai i Shiokawa, 1992)

Inne przykłady:

- $0,23571113171923\ldots$ (stała Copelanda–Erdösa, 1946),
- $0,1491625364964811001211 44\ldots$ (stała Besicovitcha, 1935),
- $0,[f(1)][f(2)][f(3)]\ldots$, gdzie f jest dowolnym niestałym wielomianem dowolnego stopnia o tej własności, że $f(x) > 0$ dla $x > 0$ (Nakai i Shiokawa, 1992)

Przykłady w innych systemach pozycyjnych:

Ciągi (stałe) Champernowne'a:

$$x^{(2)} = 0,0110111001011101 11\ldots$$

$$x^{(3)} = 0,0121011122021221001011021101111212012112 2200\ldots$$

Inne konstrukcje liczb normalnych:

Dla dowolnych liczb względnie pierwszych b i c większych od 1, liczba

$$a_{b,c} := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c^n b^{c^n}}$$

jest normalna w bazie o podstawie b.
Liczba $a_{2,3}$ jest normalna w bazie 2, ale nie jest w bazie 6.

Inne konstrukcje liczb normalnych:

Dla dowolnych liczb względnie pierwszych b i c większych od 1, liczba

$$a_{b,c} := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c^n b^{c^n}}$$

jest normalna w bazie o podstawie b.
Liczba $a_{2,3}$ jest normalna w bazie 2, ale nie jest w bazie 6.

Ciąg de Bruijna rzędu n nad alfabetem A to ciąg długości $|A|^n + n - 1$ o tej własności, że każdy ciąg długości n pojawia się w nim dokładnie jeden raz.

- 00110, $|A| = 2, n = 2$
- 0011221020, $|A| = 3, n = 2$.

Nieskończony ciąg de Bruijna $b = b_1 b_2 \dots$ to taki ciąg dla którego dla każdego n, ciąg $b_1, \dots, b_{10^n+n-1}$ jest ciąg de Bruijna. Ciąg ten w naturalny sposób definiuje liczbę $w = 0, b_1 b_2 \dots$, która jest liczbą normalną.

Nie wszystkie liczby są normalne (oczywiste), ale istnieją takie liczby, które są całkowicie nienormalne (ang. *absolutely abnormal*), to jest liczba $F(w,x)$ nie istnieje dla dowolnego ciągu w w żadnym systemie pozycyjnym. Na przykład niech

$$\begin{aligned} f(2) &= 4 \\ f(n) &= n^{\frac{f(n-1)}{n-1}}, n \geqslant 3, \\ \alpha :=& (1-f(2)^{-1})(1-f(3)^{-1})(1-f(4)^{-1})\dots \\ &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{64}\right)\left(1-\frac{1}{152587890625}\right)\dots \\ &= 0,656249999956991\underbrace{9999\dots9999}_{23.747.291.559}8528404201690728\dots \end{aligned}$$

Liczba α jest całkowicie nienormalna.

Nie wszystkie liczby są normalne (oczywiste), ale istnieją takie liczby, które są całkowicie nienormalne (ang. *absolutely abnormal*), to jest liczba $F(w, x)$ nie istnieje dla dowolnego ciągu w w żadnym systemie pozycyjnym. Na przykład niech

$$\begin{aligned}
f(2) &= 4 \\
f(n) &= n^{\frac{f(n-1)}{n-1}}, n \geqslant 3, \\
\alpha :=& (1 - f(2)^{-1})(1 - f(3)^{-1})(1 - f(4)^{-1}) \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{64}\right)\left(1 - \frac{1}{152587890625}\right) \ldots \\
&= 0,65624999999956991\underbrace{9999 \ldots 9999}_{23.747.291.559}8528404201690728 \ldots
\end{aligned}$$

Liczba α jest całkowicie nienormalna.

Prostszy przykład? Dowolna liczba wymierna (dlaczego?).

Pojawiają się układy dynamiczne

Jeżeli liczba x jest normalna, to część ułamkowa $\{10^n \cdot x\}$ jest liczbą normalną dla dowolnego n. Zauważmy, że mnożenie x przez 10 i ucięcie ich do części ułamkowej polega na rozważeniu funkcji określonej na zbiorze ciągów nieskończonych wszystkich rozwinięć dziesiętnych wszystkich liczb z zakresu $[0, 1]$. Oznaczmy ten zbiór przez $10^{\mathbb{N}}$, a funkcję przez σ. Wtedy

$$\sigma : 10^{\mathbb{N}} \to 10^{\mathbb{N}}$$

działa następująco:

$$\sigma(x_1 x_2 x_3 x_4 \dots) = x_2 x_3 x_4 \dots,$$

jest to więc prosty operator przesunięcia „w lewo".
Przy powyższych oznaczeniach, rozważanie kolejnych części ułamkowych postaci $\{10^n \cdot x\}$ jest równoważne z rozważeniem orbity punktu x w zbiorze $10^{\mathbb{N}}$ pod działaniem funkcji σ. Możemy więc na liczby normalne patrzeć od strony układów dynamicznych.

Definicja

Układ dynamiczny $(10^{\mathbb{N}}, \sigma)$ nazywamy pełnym shiftem na 10 symbolach.

10 symboli: cyfry w systemie dziesiętnym (wrócimy do shiftów w późniejszej części wykładu).

Liczby normalne okazują się być **punktami generycznymi** względem miary Lebesgue'a (długość odcinków). Co to właściwie oznacza?

Niech $T : [0, 1 \to [0, 1]$ będzie ciągłe i $A \in \mathcal{B}([0, 1])$, to jest A jest wygenerowany przez zbiory otwarte.

Ustalmy $n \geqslant 0$ oraz rozważmy taką miarę prawdopodobieństwa:

$$m(x, n)(A) := \frac{\#\{0 \leqslant j < n : T^j(x) \in A\}}{n}.$$

Jest to tak zwana n-ta **miara empiryczna** punktu x przekształcenia T. Punkt x jest **generyczny** dla pewnej miary prawdopodobieństwa P, gdy $m(x, n)$ „coraz" lepiej przybliża P.

Jeżeli P jest długością odcinka (miarą Lebesgue'a), to generyczność pewnego punktu x oznacza, że jeśli na przykład

$$A = \left[\frac{10^3}{2^{21}}, \frac{10^3 + 1}{2^{21}}\right],$$

to odsetek liczb postaci $T^j(x)$ i takich, które należą do powyższego przedziału będzie tym bliższy $\frac{1}{2^{21}}$, im więcej punktów będziemy rozważać z orbity punktu x (zbioru $\{x, T(X), T^2(x), \ldots\}$).

Ćwiczenie

Które z następujących iksów są generyczne dla $T(x) = \{10 \cdot x\}$ w $[0, 1]$?

1. $x = \frac{1}{2}$.
2. $x = \frac{2}{3}$.
3. $x = \frac{\pi}{4}$.

Ćwiczenie

Które z następujących iksów są generyczne dla $T(x) = \{10 \cdot x\}$ w $[0, 1]$?

1. $x = \frac{1}{2}$.
2. $x = \frac{2}{3}$.
3. $x = \frac{\pi}{4}$.

Odpowiedzi do kolejnych punktów:

- NIE - $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ćwiczenie

Które z następujących iksów są generyczne dla $T(x) = \{10 \cdot x\}$ w $[0, 1]$?

1. $x = \frac{1}{2}$.
2. $x = \frac{2}{3}$.
3. $x = \frac{\pi}{4}$.

Odpowiedzi do kolejnych punktów:

- NIE - $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- NIE - $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Ćwiczenie

Które z następujących iksów są generyczne dla $T(x) = \{10 \cdot x\}$ w $[0, 1]$?

1. $x = \frac{1}{2}$.
2. $x = \frac{2}{3}$.
3. $x = \frac{\pi}{4}$.

Odpowiedzi do kolejnych punktów:

- NIE - $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- NIE - $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
- Problem otwarty!

Można rozważyć specjalną klasę funkcji, tak zwanych funkcji mierzalnych. Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją o tej własności, że $f^{-1}((-\infty, a])$ jest zbiorem z $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, to funkcję f nazywamy *mierzalną*.

Przykłady

- Każda funkcja ciągła jest mierzalna.
- Funkcja znaku, to jest

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn}(x)$$

jest mierzalna. Istotnie:

$$f^{-1}((-\infty, a]) \begin{cases} \emptyset & a < -1 \\ (-\infty, 0) & a \in [-1, 0) \\ (\infty, 0], & a \in [0, 1) \\ \mathbb{R}, & a \geqslant 1. \end{cases}$$

Definicja

Abstrakcyjną miarę probabilistyczną μ nazywamy ergodyczną względem $T : X \to X$, gdy warunek $T^{-1}(A) = A$ implikuje $\mu(A) = 1$ lub $\mu(A) = 0$.

Definicja

Abstrakcyjną miarę probabilistyczną μ nazywamy ergodyczną względem $T : X \to X$, gdy warunek $T^{-1}(A) = A$ implikuje $\mu(A) = 1$ lub $\mu(A) = 0$.

Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa

Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną i μ jest ergodyczna względem T, to dla μ-prawie wszystkich x spełniony jest warunek

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \to \hat{f} = \frac{1}{\mu(X)}\int_X f d\mu,$$

gdzie $\hat{f}$ oznacza średnią wartość funkcji f na zbiorze X.

Przykład

Niech dana jest funkcja $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dana wzorem $T(x) = xe^{2\pi i\alpha}$ i $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Miara Lebesgue'a λ na okręgu jest ergodyczna względem odwzorowania T. Niech f będzie funkcją charakterystyczną odcinka $[a, b]$ na okręgu. Wtedy z twierdzenia ergodycznego Birkhoffa:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \frac{\#\{0 \leqslant j < n \mid T^j(x) \in [a,b]\}}{n} \to \lambda([a,b]) = b - a.$$

Uwaga! (Borel, 1909)

Z twierdzenia ergodycznego wynika, że prawie wszystkie liczby są normalne!

Uwaga! (Borel, 1909)

Z twierdzenia ergodycznego wynika, że prawie wszystkie liczby są normalne!

Dowód.

Ustalmy ciąg w o długości $|w| = k$. Wtedy wystarczy rozważyć funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0,w, \quad 0,w + 10^{-|w|}\right), \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

i wziąć $\mu = \lambda$ oraz $T(x) = \{10x\}$. Wtedy lewa strona twierdzenia ergodycznego to $m(x,n) = F(w,x,n)$, prawa zaś to $10^{-|w|}$. □

Uwaga! (Borel, 1909)

Z twierdzenia ergodycznego wynika, że prawie wszystkie liczby są normalne!

Dowód.

Ustalmy ciąg w o długości $|w| = k$. Wtedy wystarczy rozważyć funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0,w, \quad 0,w + 10^{-|w|}\right), \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

i wziąć $\mu = \lambda$ oraz $T(x) = \{10x\}$. Wtedy lewa strona twierdzenia ergodycznego to $m(x,n) = F(w,x,n)$, prawa zaś to $10^{-|w|}$. □

Twierdzenie (Borel, wersja silniejsza)

Prawie wszystkie liczby są normalne jednocześnie w bazach o podstawach 2, 3, 4, ...

Wróćmy do układu dynamicznego $(10^{\mathbb{N}}, \sigma)$. Niech ponownie dany jest ciąg Champernowne'a

$$c := 0123456789101112131415161618192021\ldots.$$

Wtedy ciąg ten posiada gęstą orbitę w $10^{\mathbb{N}}$. Dla przypomnienia:

Wróćmy do układu dynamicznego $(10^{\mathbb{N}}, \sigma)$. Niech ponownie dany jest ciąg Champernowne'a

$$c := 0123456789101112131415161618192021\ldots.$$

Wtedy ciąg ten posiada gęstą orbitę w $10^{\mathbb{N}}$. Dla przypomnienia:

- **orbita** $o(c)$ punktu c to zbiór $\{c, \sigma(c), \sigma^2(c), \sigma^3(c), \ldots\}$,
- zbiór $A \subset 10^{\mathbb{N}}$ jest **gęsty**, gdy każdy punkt (ciąg) z $10^{\mathbb{N}}$ jest granicą elementów ze zbioru A,
- **odległością** ciągów x i y w $10^{\mathbb{N}}$ jest funkcja

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 2^{-k}, & k = \min\{n : x_n \neq y_n,\} \end{cases}$$

- ciąg $(a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ciągów jest **zbieżny** do x, gdy $d(a^{(n)}, x) \to 0$.

Układ dynamiczny (X, f) jest **tranzytywny**, jeśli istnieje w nim gęsta orbita. Punkt z tej gęstej orbity nazywamy wtedy **tranzytywnym**.

Oznaczenia:

- $0^1 = 0, 0^2 = 00, 0^3 = 000, \ldots,$
- $(123)^1 = 123, (123)^2 = 123123, (123)^3 = 123123123, \ldots,$
- $(123)^\infty = 123123123123123\ldots$ (powtarzane nieskończenie wiele razy).

Oznaczenia:

- $0^1 = 0, 0^2 = 00, 0^3 = 000, \ldots,$
- $(123)^1 = 123, (123)^2 = 123123, (123)^3 = 123123123, \ldots,$
- $(123)^\infty = 123123123123123\ldots$ (powtarzane nieskończenie wiele razy).

Przykład

Niech $x = (0123456789)^\infty$. Wtedy

$$\begin{aligned}
a^{(1)} &= 01234567890^\infty \\
a^{(2)} &= (0123456789)^2 0^\infty \\
a^{(3)} &= (0123456789)^3 0^\infty \\
a^{(4)} &= (0123456789)^4 0^\infty \\
a^{(5)} &= (0123456789)^5 0^\infty
\end{aligned}$$

jest ciągiem zbieżnym do x (dlaczego?).

Twierdzenie

Zbiór $o(c)$ jest gęsty w $10^{\mathbb{N}}$.

Twierdzenie

Zbiór $o(c)$ jest gęsty w $10^{\mathbb{N}}$.

Dowód.

Dowód poglądowy (bez szczegółów technicznych).

- Wybieramy $x \in 10^{\mathbb{N}}$.

Twierdzenie

Zbiór $o(c)$ jest gęsty w $10^{\mathbb{N}}$.

Dowód.

Dowód poglądowy (bez szczegółów technicznych).

- Wybieramy $x \in 10^{\mathbb{N}}$.
- Rozważamy blok 10 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_1. Z normalności c blok w_1 pojawia się w pewnym miejscu c, powiedzmy w miejscu k_1. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_1}(c), x) = 2^{-10}$.

Twierdzenie

Zbiór $o(c)$ jest gęsty w $10^{\mathbb{N}}$.

Dowód.

Dowód poglądowy (bez szczegółów technicznych).

- Wybieramy $x \in 10^{\mathbb{N}}$.
- Rozważamy blok 10 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_1. Z normalności c blok w_1 pojawia się w pewnym miejscu c, powiedzmy w miejscu k_1. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_1}(c), x) = 2^{-10}$.
- Rozważamy blok 10^2 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_2. Z normalności c blok w_2 pojawia się w c nieskończenie wiele razy; wybieramy miejsce k_2 takie, że $k_2 > 10^2 k_1$. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_2}(c), x) = 2^{-10^2}$.

Twierdzenie

Zbiór $o(c)$ jest gęsty w $10^{\mathbb{N}}$.

Dowód.

Dowód poglądowy (bez szczegółów technicznych).

- Wybieramy $x \in 10^{\mathbb{N}}$.
- Rozważamy blok 10 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_1. Z normalności c blok w_1 pojawia się w pewnym miejscu c, powiedzmy w miejscu k_1. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_1}(c), x) = 2^{-10}$.
- Rozważamy blok 10^2 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_2. Z normalności c blok w_2 pojawia się w c nieskończenie wiele razy; wybieramy miejsce k_2 takie, że $k_2 > 10^2 k_1$. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_2}(c), x) = 2^{-10^2}$.
- Rozważamy blok 10^3 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_3. Z normalności c blok w_3 pojawia się w c nieskończenie wiele razy; wybieramy miejsce k_3 takie, że $k_3 > 10^3 k_1$. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_3}(c), x) = 2^{-10^3}$.

Twierdzenie

Zbiór $o(c)$ jest gęsty w $10^{\mathbb{N}}$.

Dowód.

Dowód poglądowy (bez szczegółów technicznych).

- Wybieramy $x \in 10^{\mathbb{N}}$.
- Rozważamy blok 10 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_1. Z normalności c blok w_1 pojawia się w pewnym miejscu c, powiedzmy w miejscu k_1. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_1}(c), x) = 2^{-10}$.
- Rozważamy blok 10^2 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_2. Z normalności c blok w_2 pojawia się w c nieskończenie wiele razy; wybieramy miejsce k_2 takie, że $k_2 > 10^2 k_1$. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_2}(c), x) = 2^{-10^2}$.
- Rozważamy blok 10^3 początkowych cyfr z x. Niech to będzie blok w_3. Z normalności c blok w_3 pojawia się w c nieskończenie wiele razy; wybieramy miejsce k_3 takie, że $k_3 > 10^3 k_1$. Sprawdzamy, że $d(\sigma^{k_3}(c), x) = 2^{-10^3}$.
- Itd. Powstaje ciąg $(\sigma^{k_n}(c))$ elementów z $o(c)$ taki, że $\sigma^{k_n}(c) \to x$.

Twierdzenie

Niech d będzie dowolnym ciągiem z $10^{\mathbb{N}}$ i takim, dla którego liczba $0,d$ jest normalna. Wtedy $o(d)$ jest gęsty w $10^{\mathbb{N}}$.

Dowód.

Analogiczny. $\square$

Twierdzenie

Niech d będzie dowolnym ciągiem z $10^{\mathbb{N}}$ i takim, dla którego liczba $0,d$ jest normalna. Wtedy $o(d)$ jest gęsty w $10^{\mathbb{N}}$.

Dowód.

Analogiczny. $\square$

Wniosek

Prawie wszystkie elementy zbioru $10^{\mathbb{N}}$ (lub prawie wszystkie liczby w zbiorze $[0,1]$) są tranzytywne.

Równoważna definicja

Liczba x jest normalna jeśli jest **jednonormalna** (ang. *simply normal*) w bazach $10, 10^2, \ldots$, to jest

$$\lim_{n\to+\infty} F(d,x,n) = \frac{1}{b}$$

dla wszystkich $b = 10, 10^2, \ldots$.

Przykład

Liczba

$$\frac{13717421}{1111111111} = ???$$

jest jednonormalna w bazie 10, ale nie jest jednonormalna w bazach $10^2, 10^3$ idt. Ponadto nie jest również normalna.

Równoważna definicja

Liczba x jest normalna jeśli jest **jednonormalna** (ang. *simply normal*) w bazach $10, 10^2, \ldots$, to jest

$$\lim_{n \to +\infty} F(d, x, n) = \frac{1}{b}$$

dla wszystkich $b = 10, 10^2, \ldots$.

Przykład

Liczba

$$\frac{13717421}{1111111111} = 0,(0123456789)$$

jest jednonormalna w bazie 10, ale nie jest jednonormalna w bazach $10^2, 10^3$ idt. Ponadto nie jest również normalna.

$$F_m(w,x,n) = \frac{\#\{1 \leqslant i \leqslant n : \ x_i = a_1, \ldots, x_{i+k-1} = a_k, i \equiv 1 \mod k\}}{n}$$

Twierdzenie

Następujące warunki są równoważne:

1. liczba x jest normalna w bazie b,
2. liczba x jest ,jednonnormalna w bazach $b, b^2, \ldots$,
3. istnieje stała C taka, że dla nieskończenie wielu ℓ oraz dla dowolnego słowa w długości nie większej niż ℓ,
$$\limsup_{n\to+\infty} F_m(w,x,n) < C \cdot b^{-|w|},$$
4. jak w punkcie 3, to
$$\limsup_{n\to+\infty} F(w,x,n) < C \cdot b^{-|w|}.$$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \exp(2\pi i m b^k x) = 0$ (Weil, 1916).

Dwa problemy otwarte:

- Która z liczb π, e, $\sqrt{2}$ jest normalna (nie wiemy nawet, czy $\sqrt{2}$ posiada nieskończenie wiele 5-tek w rozwinięciu dziesiętnym)?

Dwa problemy otwarte:

- Która z liczb π, e, $\sqrt{2}$ jest normalna (nie wiemy nawet, czy $\sqrt{2}$ posiada nieskończenie wiele 5-tek w rozwinięciu dziesiętnym)?
- Czy wszystkie niewymierne liczby algebraiczne są normalne?