Barbara Roszkowska-Lech

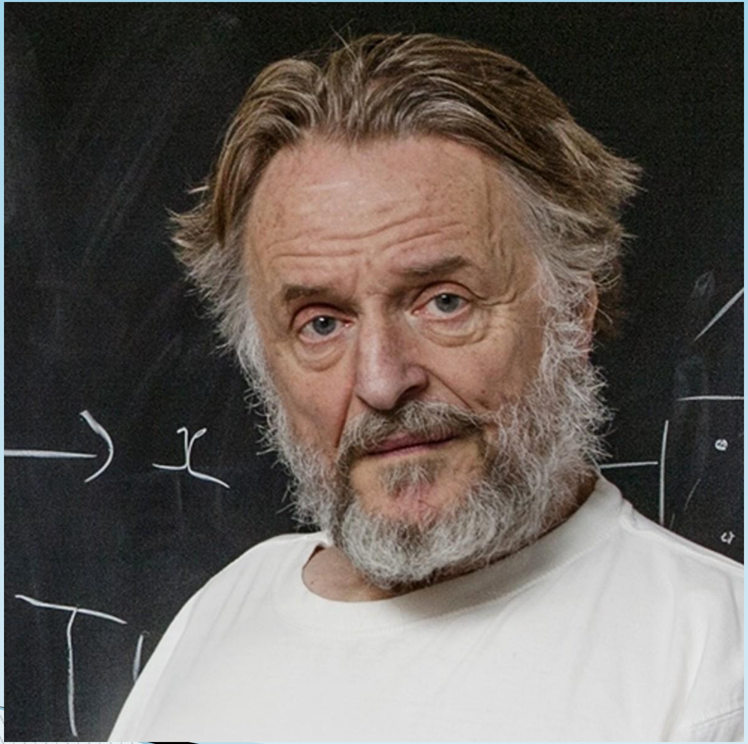
Armia Conwaya
czyli
z Fibonaccim na pustynię

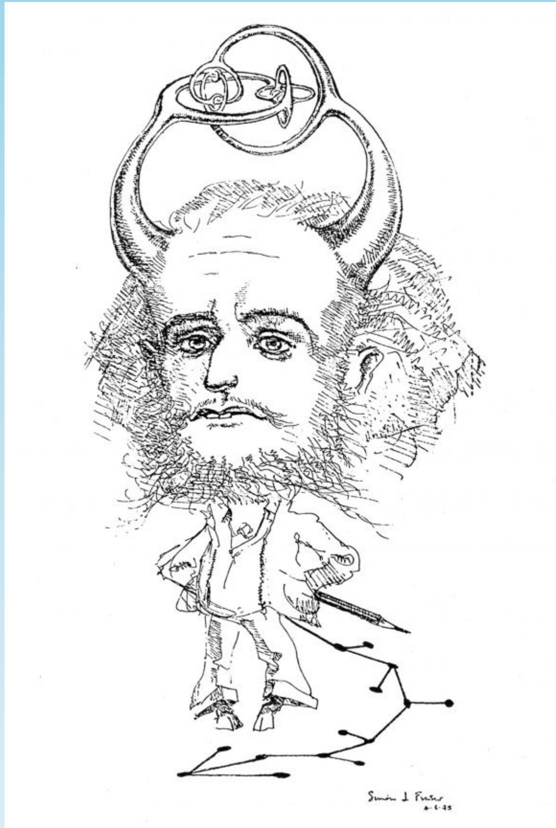
Szkoła Matematyki Poglądowej
Wola Ducka, 21 lutego 2020

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

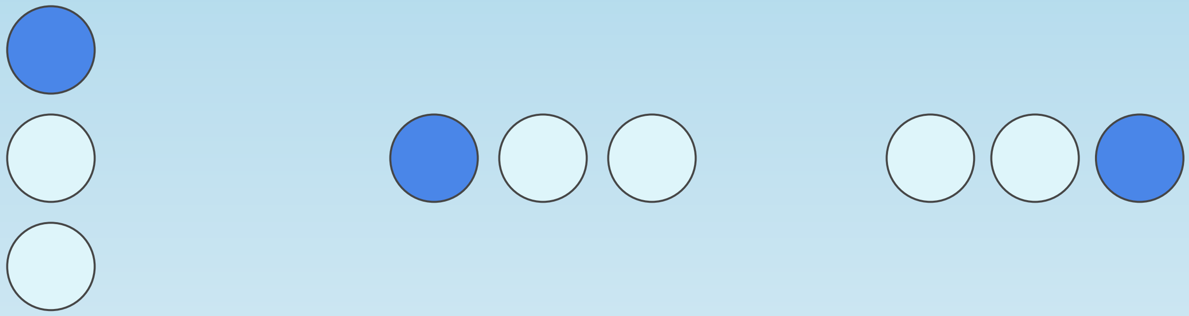
Samotnik

John Horton Conway

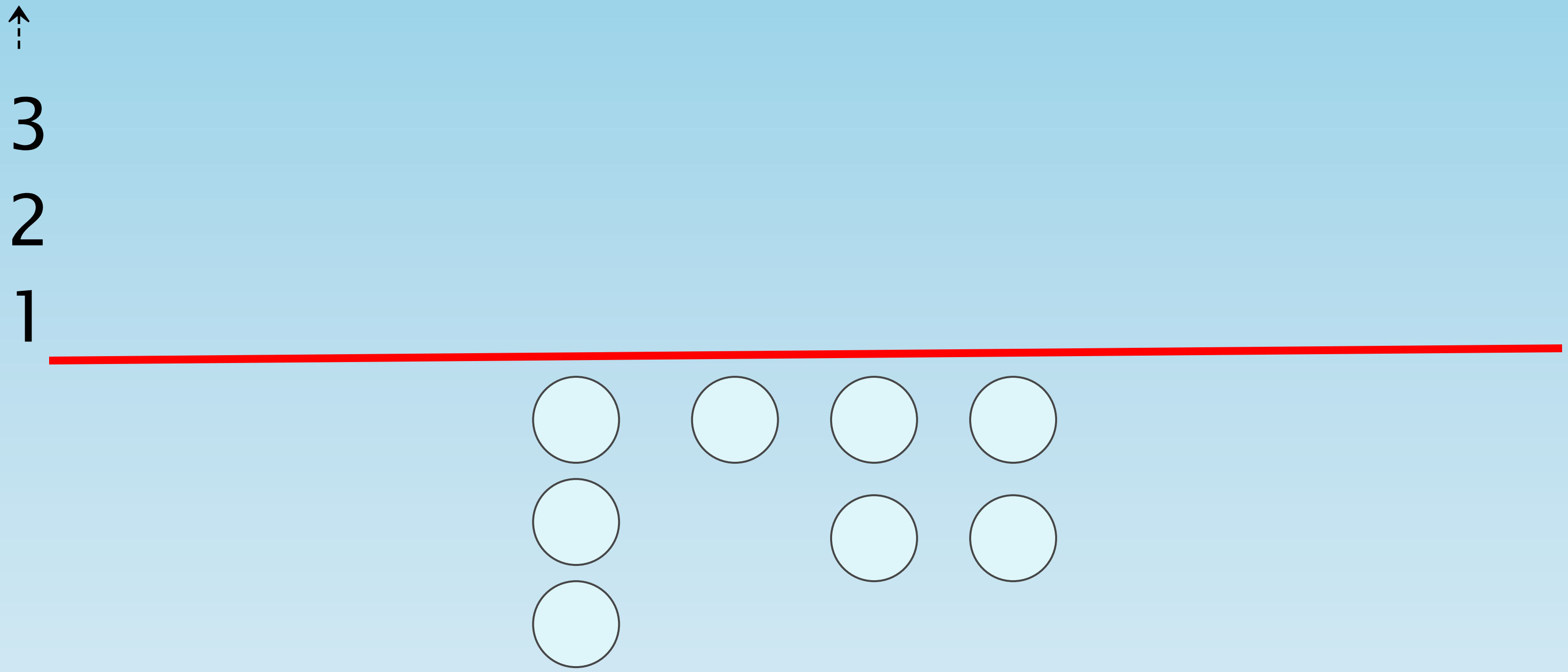




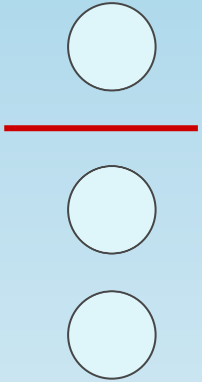
Dozwolone ruchy



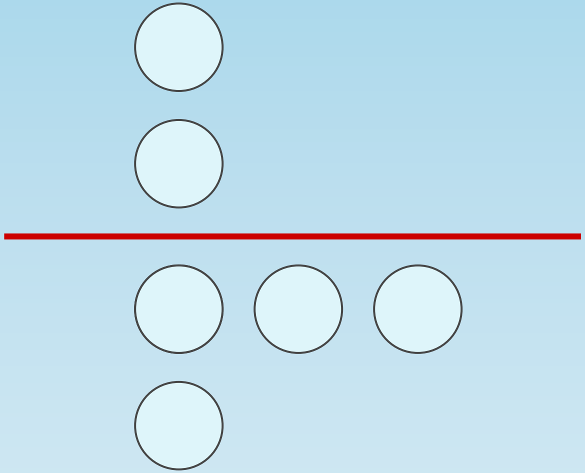
Wyruszamy na pustynię



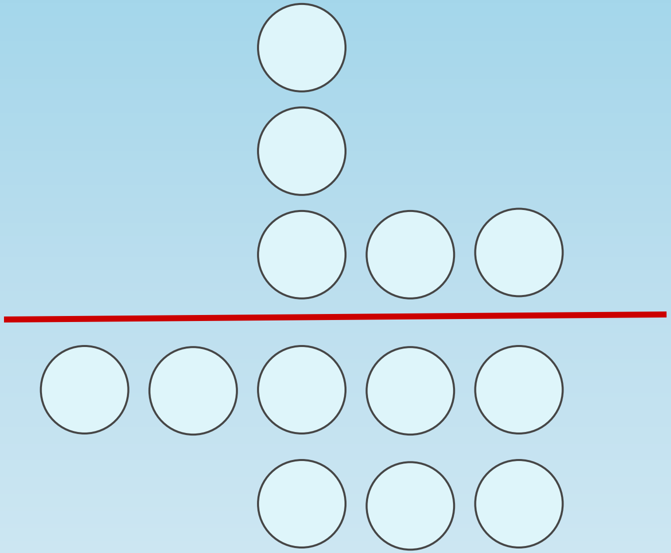
Przekraczamy granicę



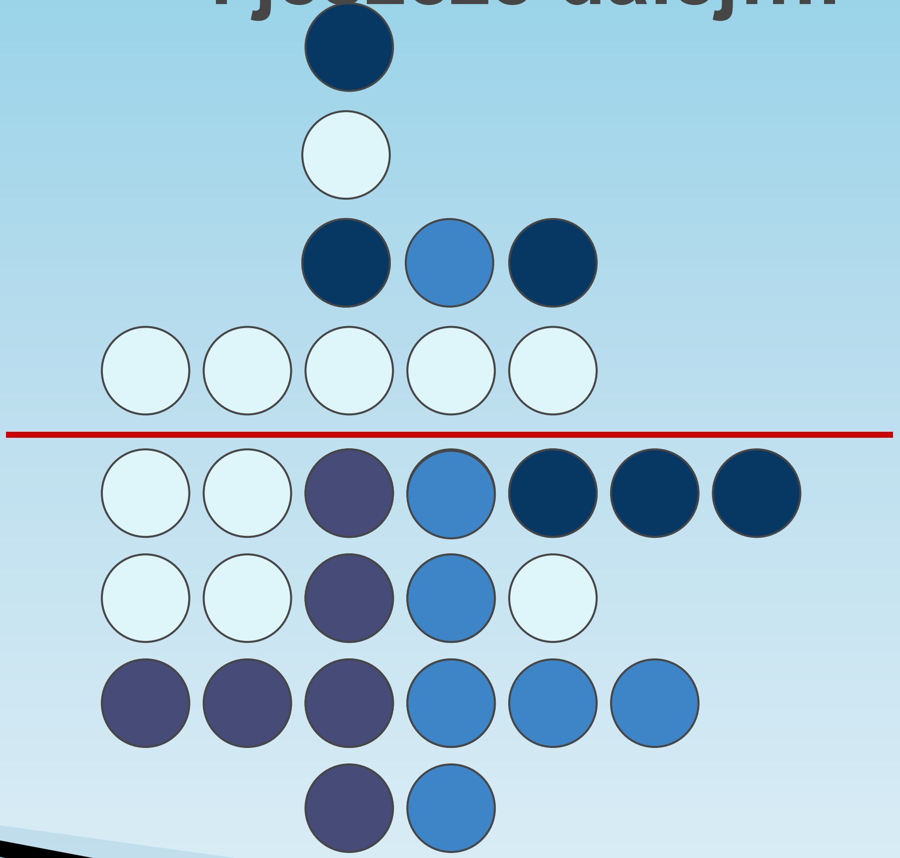
idziemy dalej



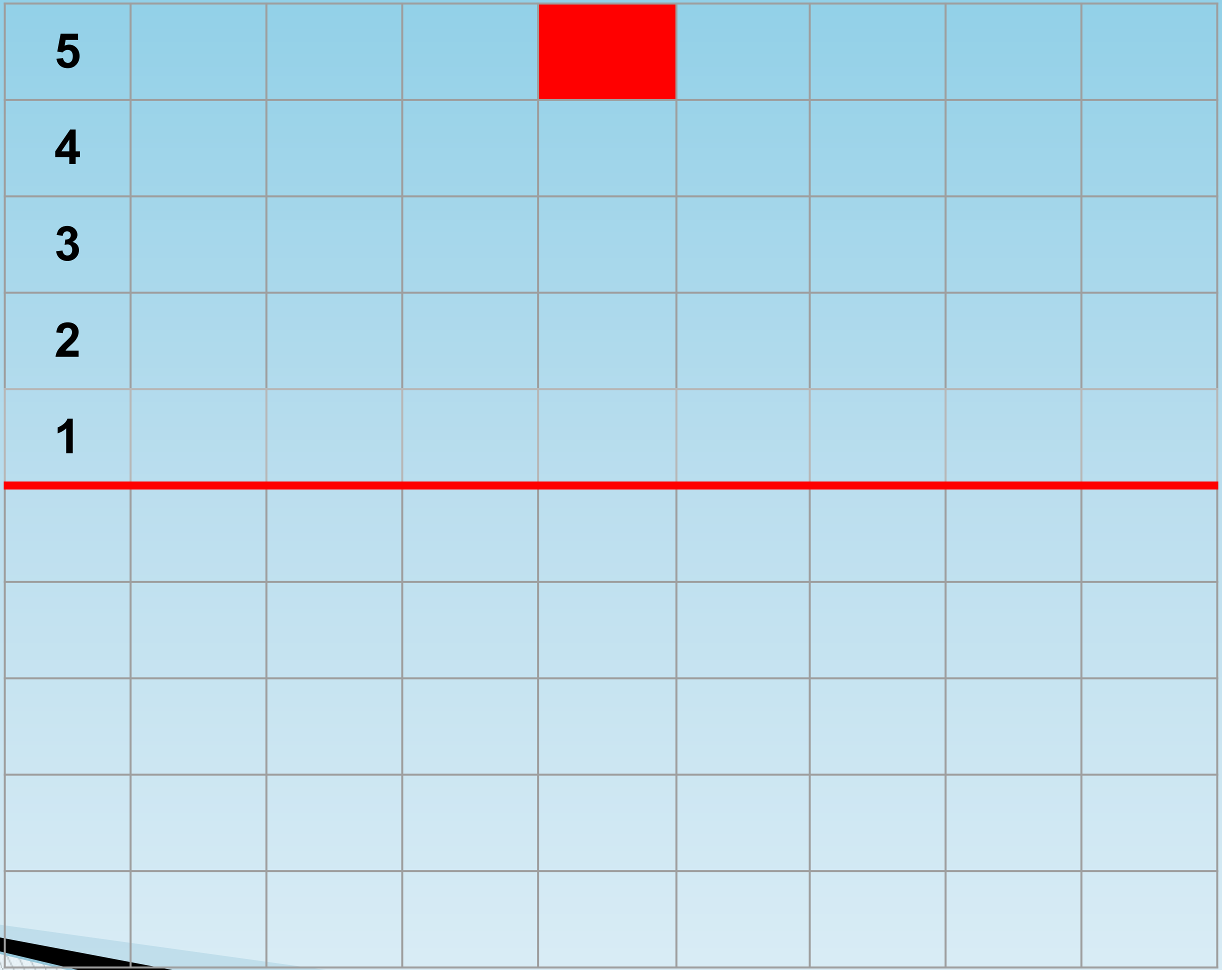
i dalej



i jeszcze dalej….



5								
4								
3								
2								
1								


5
4
3
2
1

x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4
x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
	...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	
	...	...	x^9	x^8	x^9	...	...	

x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4
x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
	...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	
	...	...	x^9	x^8	x^9	...	...	

Wielomian Conwaya w(x) odpowiadający konfiguracji końcowej zawiera wyraz wolny 1.

Jeśli $x > 0$, to $w(x) \geqslant 1$.

- $x^n + x^{n-1} \rightarrow x^n$,
- $x^n + x^{n+1} \rightarrow x^{n+2}$,
- $x^{n+2} + x^{n+1} \rightarrow x^n$.

W dwóch pierwszych przypadkach w(x) dla $0 < x < 1$ maleje.

Pokażemy, że dla niektórych takich x wartość ta i w trzecim przypadku nie rośnie

Równanie

$$x^{n+2} + x^{n+1} = x^n$$

jest równoważne, dla dodatnich x, równaniu

$$x^2 + x = 1,$$

którego jednym z pierwiastków jest odwrotność złotej liczby

$$1/\varphi = (-1 + \sqrt{5})/2.$$

Zatem dla $x = 1/\varphi$ wartość wielomianu Conwaya nie rośnie, a dla konfiguracji końcowej ma wartość co najmniej 1.

Wystarczy pokazać, że wartość ta dla każdej początkowej konfiguracji jest mniejsza od 1.

Obliczymy nieskończoną sumę odpowiadającą maksymalnej konfiguracji, gdy wszystkie pola w dolnej części szachownicy są zajęte.

x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4
x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
	...	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	
	...	...	x^9	x^8	x^9	...	...	

$$x^5 + 3x^6 + 5x^7 + \ldots = x^5(1 + 3x + 5x^2 + \ldots) =$$

$$= x^5[(1 + x + x^2 + \ldots) + 2x(1 + 2x + 3x^2 + \ldots)] =$$

$$= x^5[1/(1-x) + 2x/(1-x)^2] = x^5 \cdot (1+x)/(1-x)^2.$$

Dla $x = 1/\varphi$ wartość tego wyrażenia to

$$x + x^2 = 1.$$

Dla skończonej konfiguracji początkowej wartość tego wyrażenia będzie mniejsza od 1!!!

Nie ma szans aby dotrzeć na pustyni do piątego poziomu!

Z Fibonaccim...

Ciąg Fibonacciego

$$F_0 = F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ ,\ (n \geqslant 2)$$

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 2,\ (n \geqslant 1).$$

				$F_{□+□}$				
				⋮				
…	$F_{□}$	$F_{□+1}$	$F_{□+2}$	$F_{□+3}$	$F_{□+2}$	$F_{□+1}$	$F_{□}$	…
…	$F_{□-1}$	$F_{□}$	$F_{□+1}$	$F_{□+2}$	$F_{□+1}$	$F_{□}$	$F_{□-1}$	…
	…	$F_{□-1}$	$F_{□}$	$F_{□+1}$	$F_{□}$	$F_{□-1}$	…	
F_1	…	$F_{□-2}$	$F_{□-1}$	$F_{□}$	$F_{□-1}$	$F_{□-2}$	…	F_1
	F_1	…	$F_{□-2}$	$F_{□-1}$	$F_{□-2}$	…	F_1	
		F_1	…	$F_{□-2}$	…	F_1		
			⋱	⋮	⋰			
				F_1				

Niech teraz W_0 będzie suma liczb Fibonacciego odpowiadającą początkowej konfiguracji na planszy a W_j taką sumą po j ruchach.

Zauważmy, że

$$W_0 \geqslant W_2 \geqslant W_3 \geqslant \ldots$$

Suma S_n wszystkich liczb Fibonacciego dla konfiguracji początkowej dla ustalonego n

$$S_n = F_{n+5} - 4n - 8 < F_{n+5}.$$

Czyli mamy kolejny dowód, że nie możemy osiągnąć poziomu 5.

Minimalne armie

2, 4, 8, 20 “żołnierzy” to liczności minimalnych armii pozwalające osiągnąć poziomy, odpowiednio 1, 2, 3, 4.

Przypadek 1 jest oczywisty.

				$F_{\square+\square}$				
				⋮				
…	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+3}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	…
…	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	…
	…	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	…	
F_1	…	$F_{\square-2}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square-2}$	…	F_1
	F_1	…	$F_{\square-2}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square-2}$	…	F_1	
		F_1	…	$F_{\square-2}$	…	F_1		
			⋱	⋮	⋰			
				F_1				

				$\vdots$				
…	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	…
	…	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	…	
F_1	…	$F_{\square-2}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square-2}$	…	F_1
	F_1	…	$F_{\square-2}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square-2}$	…	F_1	
		F_1	…	$F_{\square-2}$	…	F_1		
			$\ddots$	$\vdots$	$\iddots$			
				F_1				

$$W_0 = F_{\square} + 2F_{\square-1} = F_{\square+1} + F_{\square-1} < F_{\square+2}.$$

…	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+3}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	…
…	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	…
	…	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	…	
F_1	…	$F_{\square-2}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square-2}$	…	F_1
	F_1	…	$F_{\square-2}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square-2}$	…	F_1	
		F_1	…	$F_{\square-2}$	…	F_1		
				F_1				

$$W_0 = F_{\square} + 3F_{\square-1} + 3F_{\square-2} = F_{\square+1} + 2F_{\square-1} + 3F_{\square-2} =$$

$$= F_{\square+1} + 2F_{\square} + F_{\square-2} = F_{\square+2} + F_{\square} + F_{\square-2} < F_{\square+2} + F_{\square+1}$$

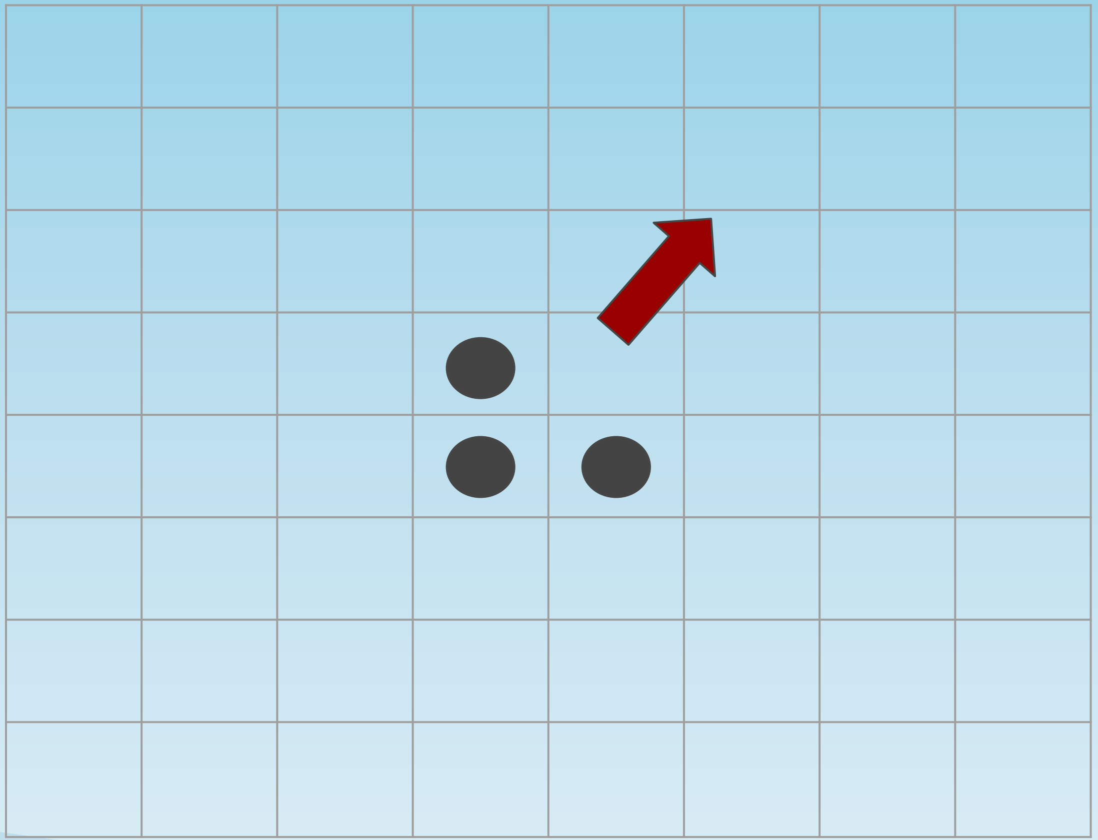
$$= F_{\square+3}.$$

				$F_{\square+4}$				
...	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+3}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	...
...	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square+2}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	...
	...	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square+1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	...	
	$F_{\square-3}$	$F_{\square-2}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square-2}$	$F_{\square-3}$	$F_{\square-4}$
		$F_{\square-3}$	$F_{\square-2}$	$F_{\square-1}$	$F_{\square-2}$	$F_{\square-3}$	$F_{\square-4}$	
			$F_{\square-3}$	$F_{\square-2}$	$F_{\square-3}$			
			$\ddots$	$F_{\square-3}$	$\iddots$			
				$\vdots$				

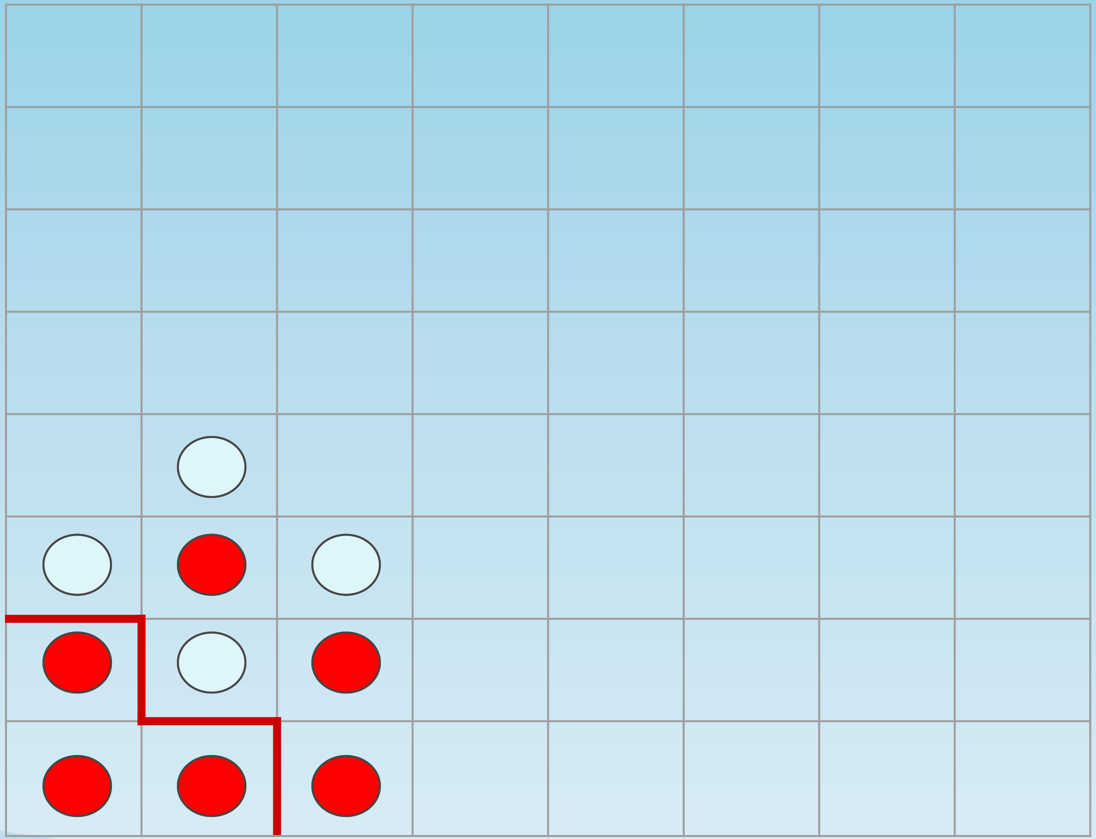
dla n =5, $W_0 = 54 < 55 = F_9$.

Maxim Kontsevich

Uwalnianie klonów



Uwalnianie klonów



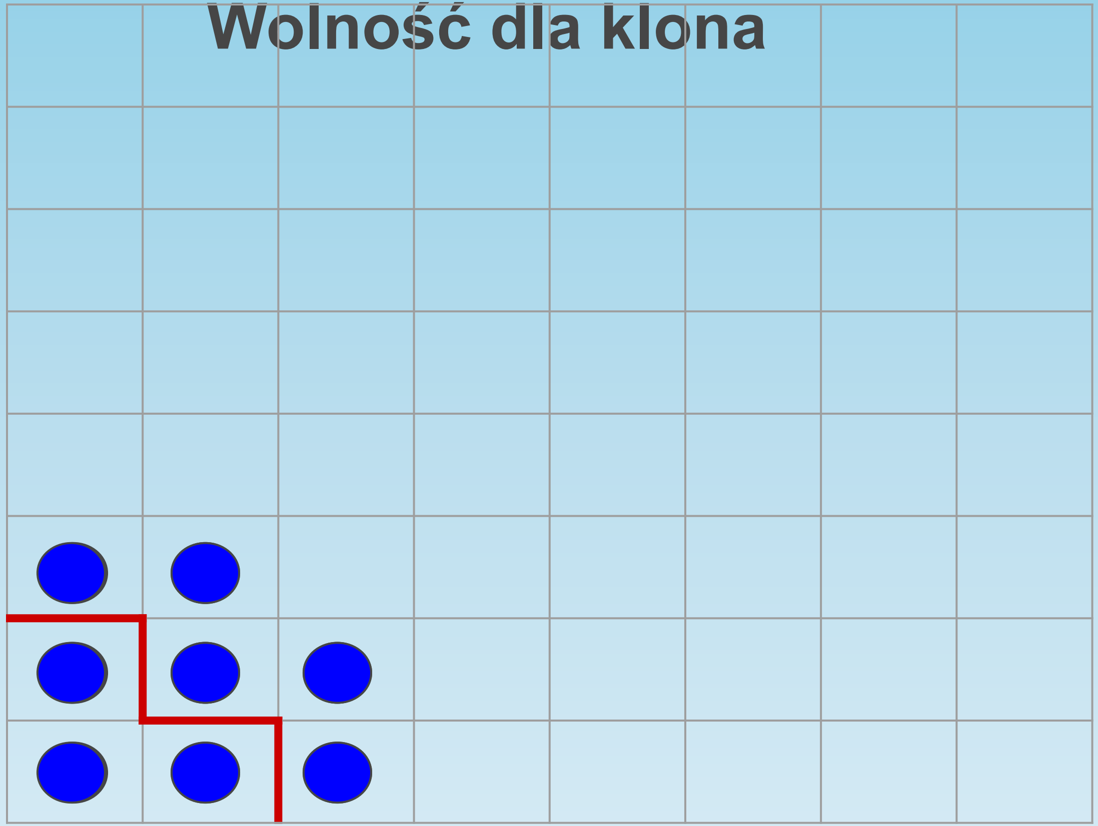
Sumy
plansza = 4

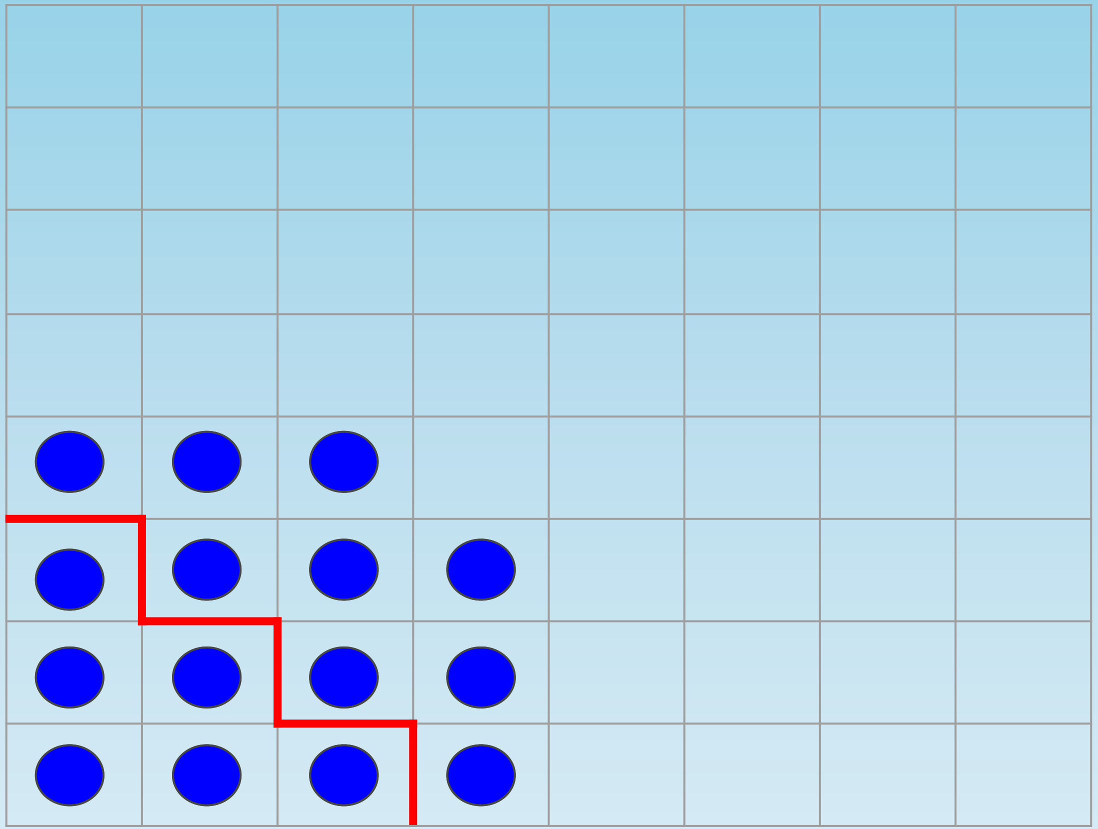
więzienie = 2

 = 2

1/64							
1/32	1/64						
1/16	1/32	1/64					
1/8	1/16	1/32	1/64				
1/4	1/8	1/16	1/32	1/64			
1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64		
1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	...

Wolność dla klona

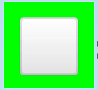




1/64							
1/32	1/64						
1/16	1/32	1/64					
1/8	1/16	1/32	1/64				
1/4	1/8	1/16	1/32	1/64			
1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64		
1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	…

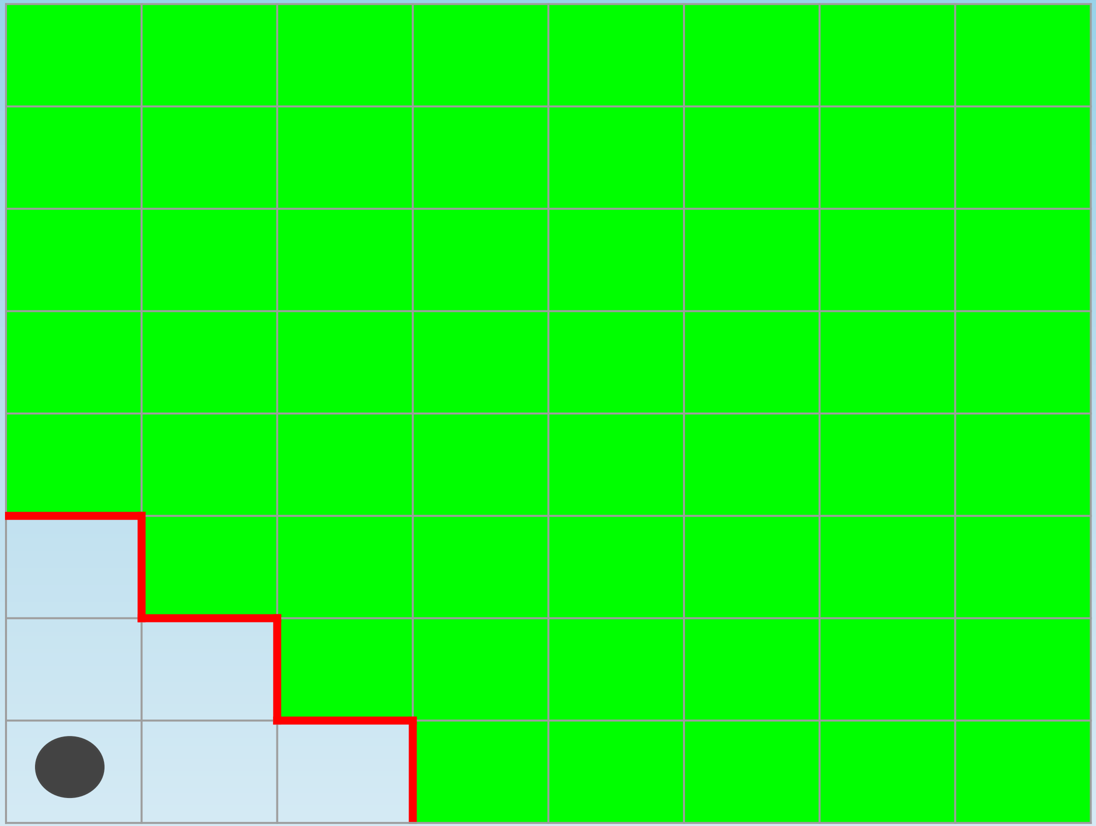
więzienie = 2 ¾

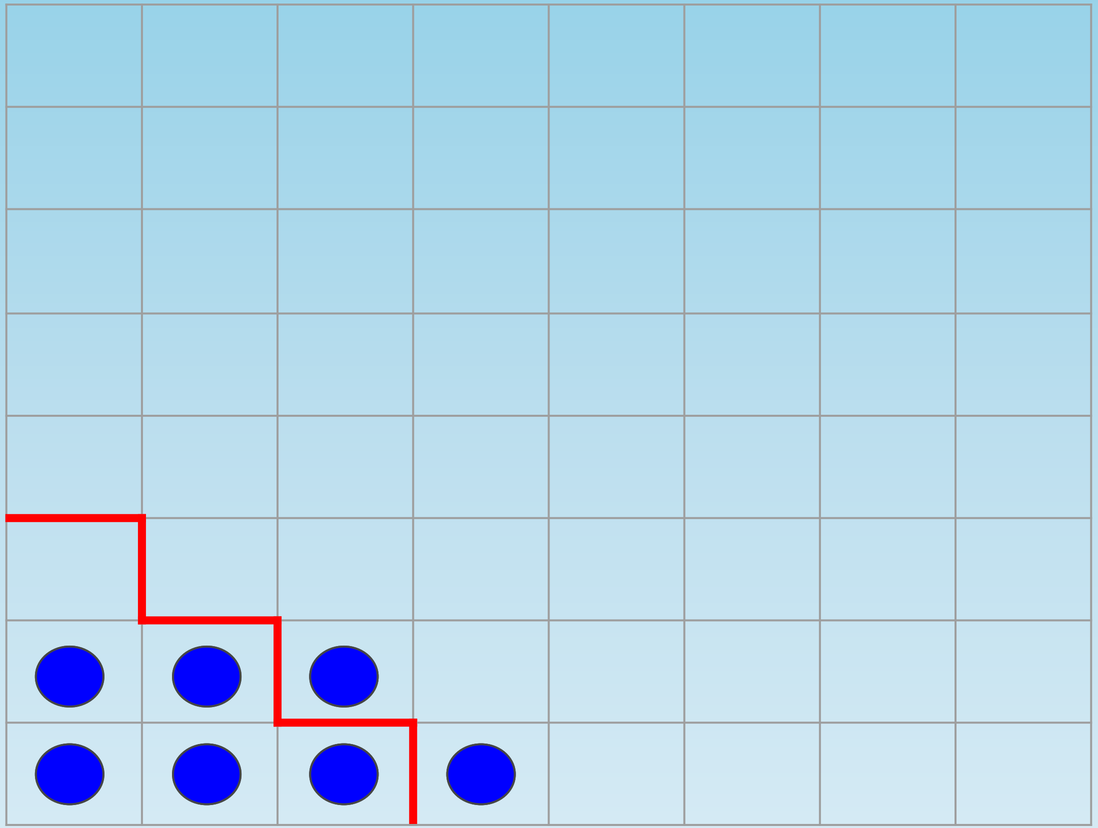
plansza = 4

 =1 ¼

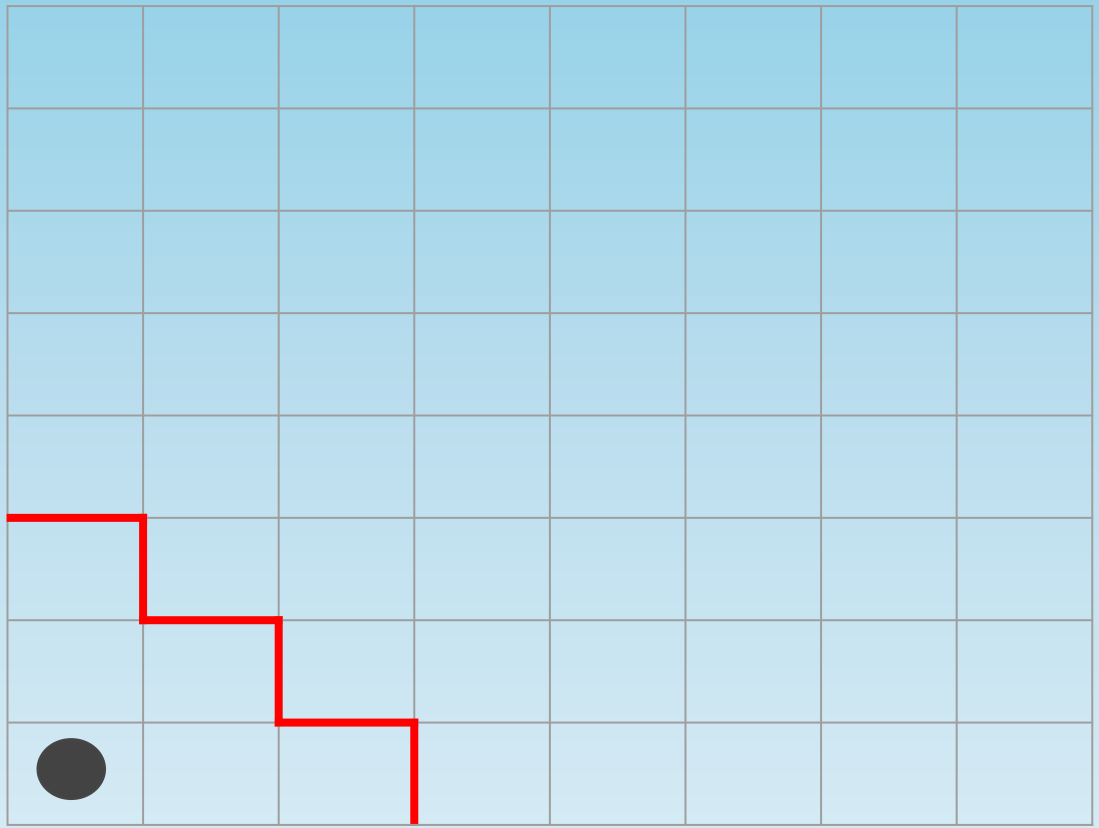
Start =1

1 < 1 ¼ ???

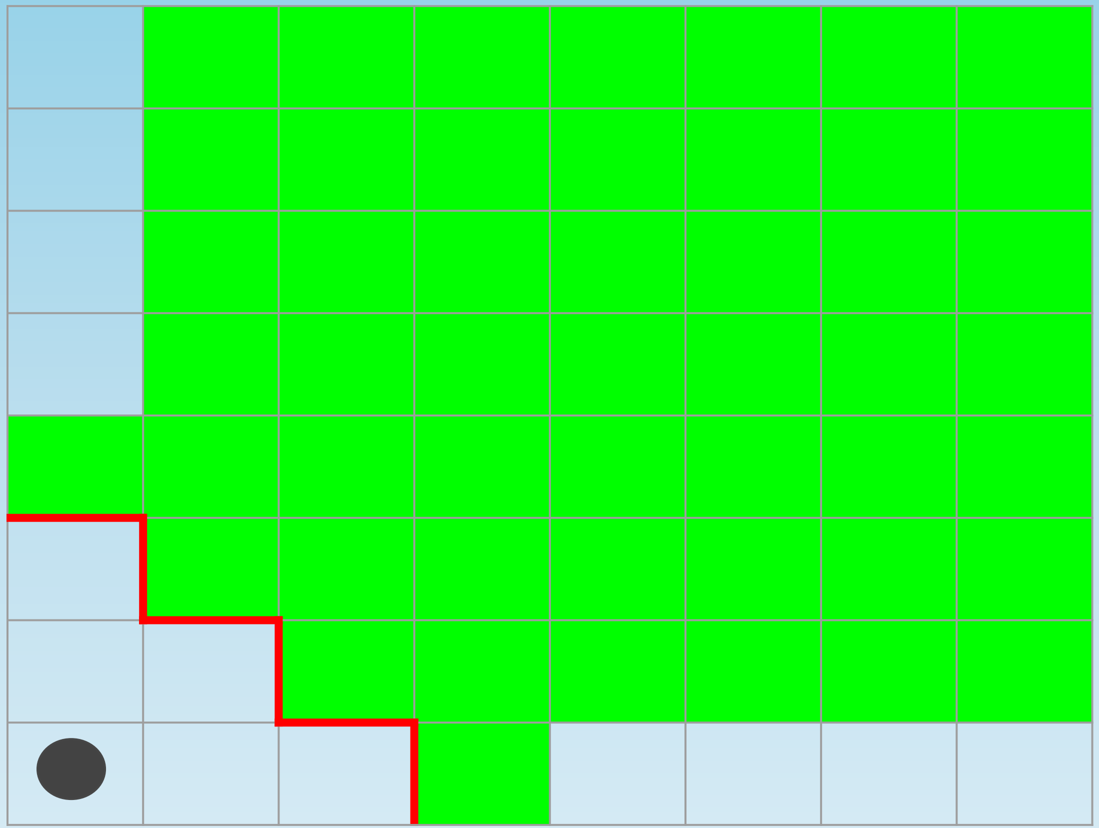




Zawsze dokładnie jeden klon jest na linii granicznej

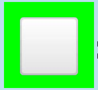


Zawsze dokładnie jeden klon jest na linii granicznej.

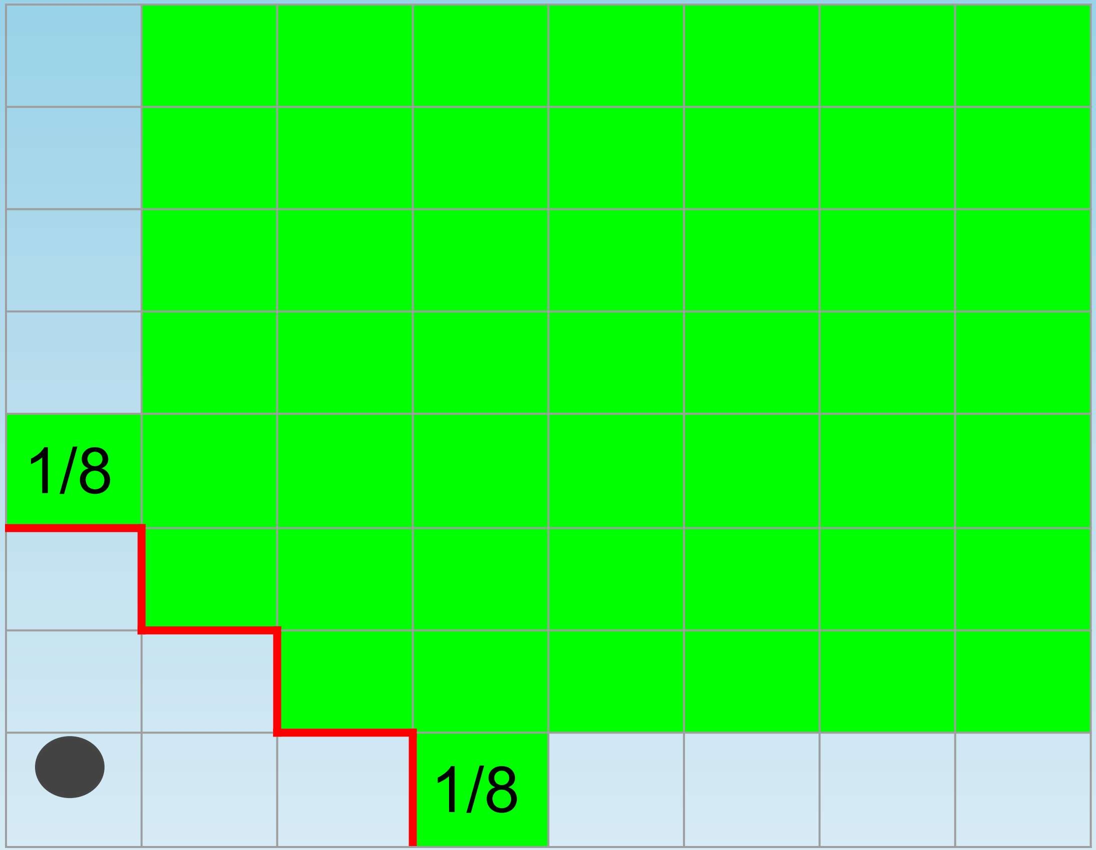


więzienie = 2 ¾

plansza = 4

 =1 ¼- ¼ = 1

start =1



Pytania

- Jakie są minimalne k-komórkowe więzienia z których nie można uciec?
- Jak sprawdzić, czy z danego więzienia nie da sie uciec?

Literatura

- E.Berlekamp, J. Conway, R.Guy, Winning Ways for Your Mathematical Plays, Academic Press, London, 1982

- M. Aigner, Moving into the Desert with Fibonacci, Mathematics Magazine, Vol 70, no1 (1997) pp 11-21

- B. Csakany, R,Juhasz, The Solitare Army Reinspected, Mathematics Magazine, Vol 73, no5 (1997) pp 354-362

- F. Chung, R. Graham, J> Morrison, A, Odlysko, Pebbling a chesboard, Amer. math. Monthly 102 (1995) 113-123

Dziękuję za uwagę