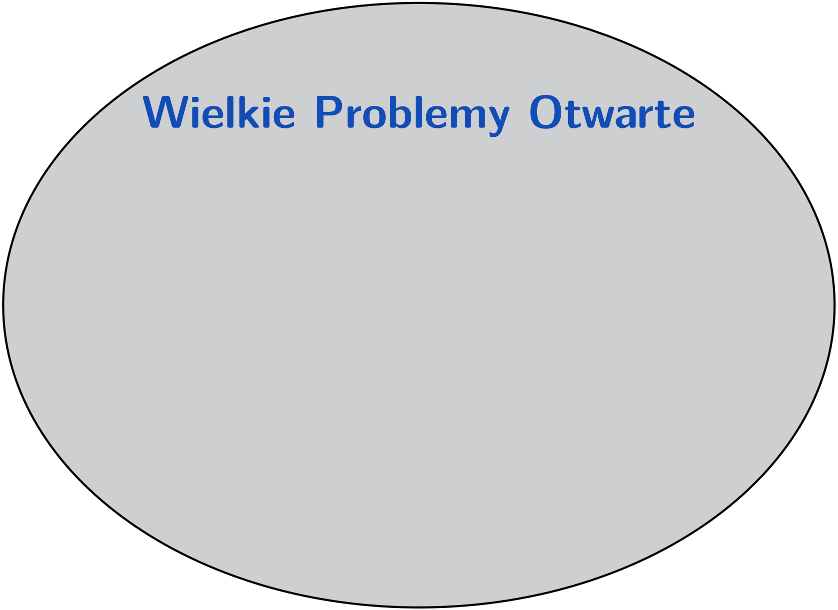
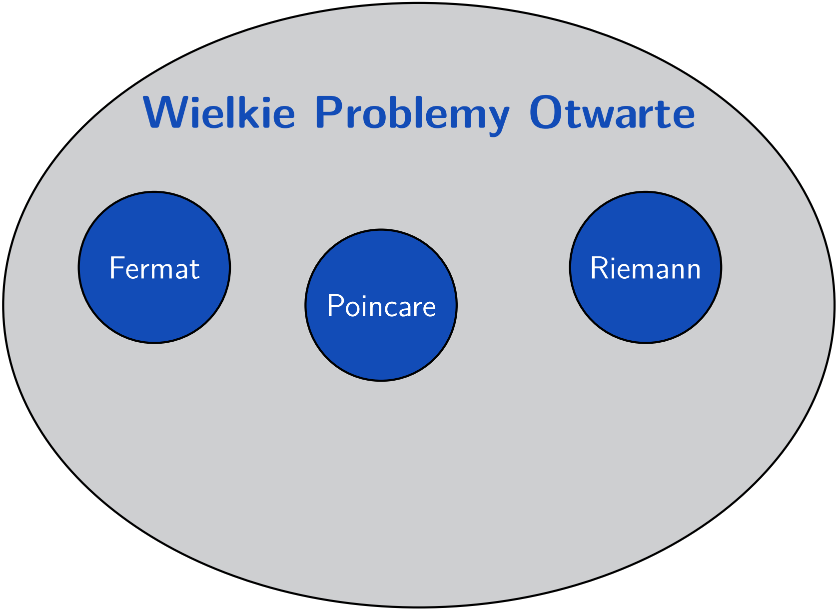
Czułość w dzisiejszych czasach to już nic szczególnego

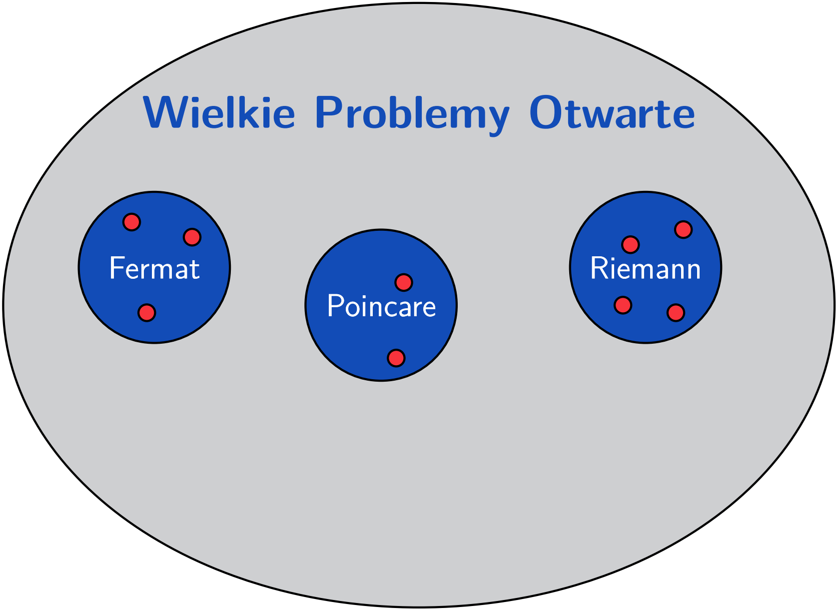
Adam Gregosiewicz

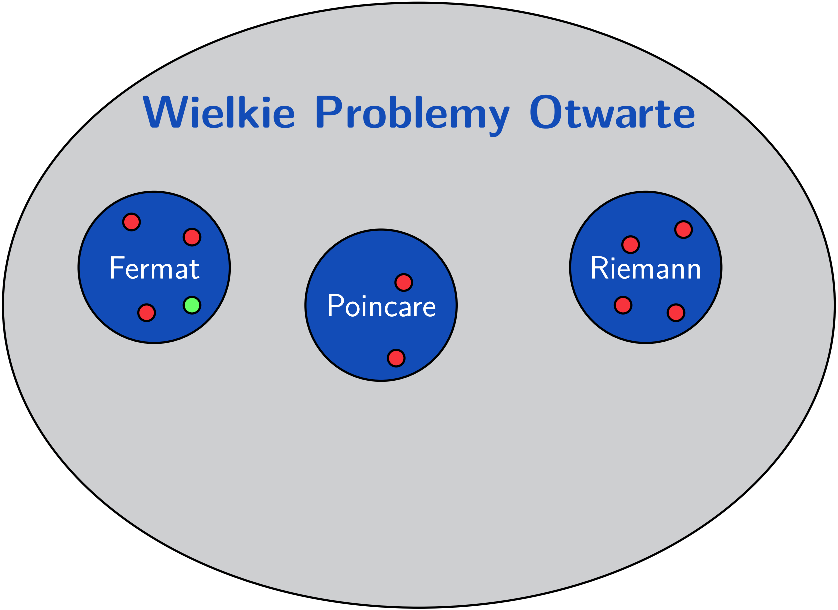
Szkoła Matematyki Poglądowej
24 lutego 2020 r.

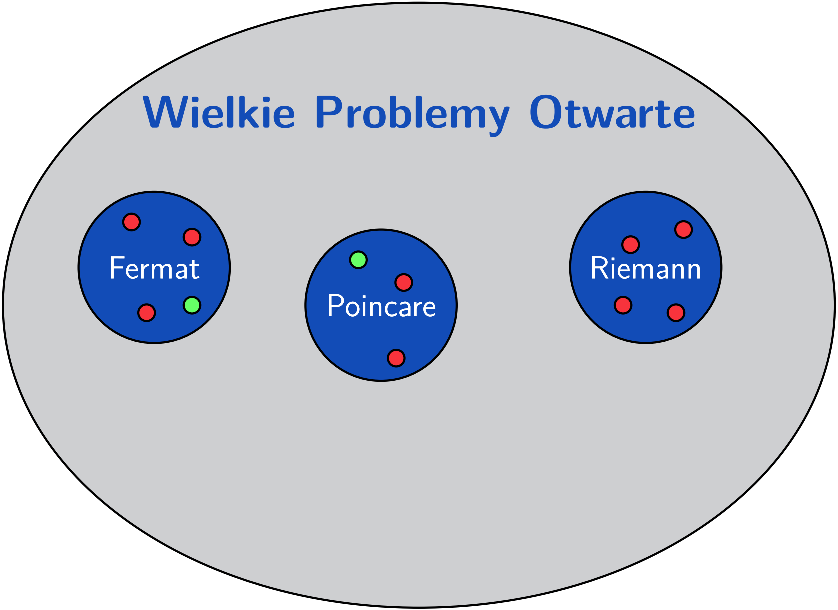
Wielkie Problemy Otwarte

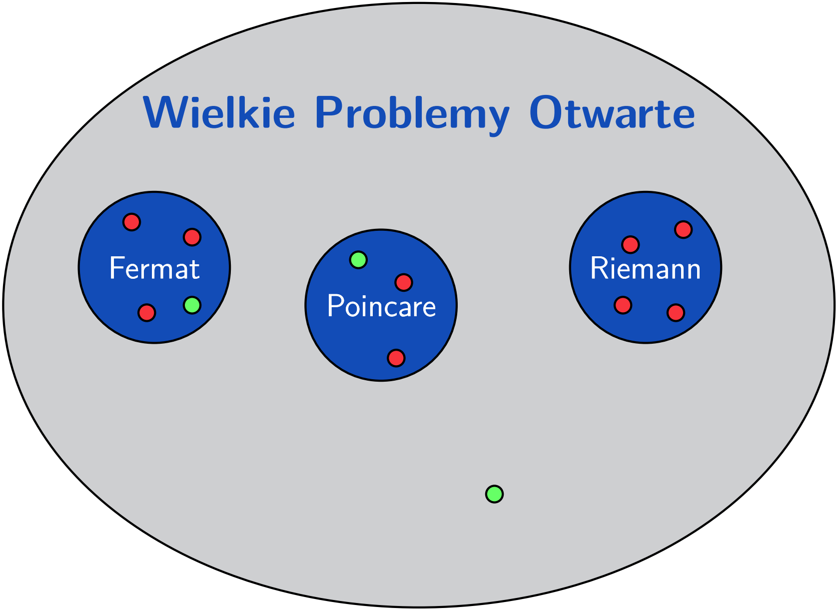

Wielkie Problemy Otwarte


Wielkie Problemy Otwarte
Fermat
Poincare
Riemann


Wielkie Problemy Otwarte
Fermat
Poincare
Riemann


Wielkie Problemy Otwarte
Fermat
Poincare
Riemann


Wielkie Problemy Otwarte
Fermat
Poincare
Riemann


Wielkie Problemy Otwarte
Fermat
Poincare
Riemann

Funkcje boolowskie

Funkcje boolowskie

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

Funkcje boolowskie

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

- $\mathbf{AND}_n$

$$\mathbf{AND}_n(x) = \mathbf{AND}_n(x_1 \ldots x_n) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

Funkcje boolowskie

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

- $\mathbf{AND}_n$

$$\mathbf{AND}_n(x) = \mathbf{AND}_n(x_1 \dots x_n) = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$$

- $\mathbf{OR}_n$

$$\mathbf{OR}_n(x) = \mathbf{OR}_n(x_1 \dots x_n) = x_1 \vee \dots \vee x_n$$

Funkcje boolowskie

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$$

- $\mathbf{AND}_n$

$$\mathbf{AND}_n(x) = \mathbf{AND}_n(x_1 \ldots x_n) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

- $\mathbf{OR}_n$

$$\mathbf{OR}_n(x) = \mathbf{OR}_n(x_1 \ldots x_n) = x_1 \vee \cdots \vee x_n$$

- $\mathbf{XOR}_n$

$$\mathbf{XOR}_n(x) = \mathbf{XOR}_n(x_1 \ldots x_n) = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$$

Złożoność funkcji boolowskich

Złożoność funkcji boolowskich

Jak czuła na zmianę pojedynczego bitu jest funkcja boolowska?

Złożoność funkcji boolowskich

Jak czuła na zmianę pojedynczego bitu jest funkcja boolowska?

Czy zmieniając jeden bit wejścia, mogę zmienić wartość funkcji?

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND_3(100) = 0}$ $\quad\leftrightsquigarrow\quad$ nieczuła

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{0}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{11}{\color{red}\mathbf{0}}) = \mathbf{0}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{11}\textcolor{red}{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ czuła na ostatni bit

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{11}\textcolor{red}{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ czuła na ostatni bit
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftrightsquigarrow\quad$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftrightsquigarrow\quad$ czuła na ostatni bit
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\leftsquigarrow$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{0}$ $\leftsquigarrow$ czuła na ostatni bit
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$ $\leftsquigarrow$ czuła na wszystkie bity

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\leftrightsquigarrow$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{0}$ $\leftrightsquigarrow$ czuła na ostatni bit
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$ $\leftrightsquigarrow$ czuła na wszystkie bity
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{1}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftrightsquigarrow\quad$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftrightsquigarrow\quad$ czuła na ostatni bit
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$ $\quad\leftrightsquigarrow\quad$ czuła na wszystkie bity
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{1}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{0}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ czuła na ostatni bit
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$ $\quad\leftsquigarrow\quad$ czuła na wszystkie bity
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{000}) = \mathbf{1}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\leftsquigarrow$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{0}$ $\leftsquigarrow$ czuła na ostatni bit
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$ $\leftsquigarrow$ czuła na wszystkie bity
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{000}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{XOR}_3(\mathbf{101}) = \mathbf{0}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{0}$ $\leftrightsquigarrow$ nieczuła
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{0}$ $\leftrightsquigarrow$ czuła na ostatni bit
- $\mathbf{AND}_3(\mathbf{111}) = \mathbf{1}$ $\leftrightsquigarrow$ czuła na wszystkie bity
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{110}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{100}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{OR}_3(\mathbf{000}) = \mathbf{1}$
- $\mathbf{XOR}_3(\mathbf{101}) = \mathbf{0}$ $\leftrightsquigarrow$ czuła na wszystkie bity

Złożoność funkcji boolowskich

Lokalna czułość

liczba bitów, na które czuła jest funkcja przy danym wejściu

Złożoność funkcji boolowskich

Lokalna czułość

liczba bitów, na które czuła jest funkcja przy danym wejściu

$$\mathrm{s}(f, x) = \#\{i\colon f(x) \neq f(x^{\{i\}})\}$$

Złożoność funkcji boolowskich

Lokalna czułość

liczba bitów, na które czuła jest funkcja przy danym wejściu

$$\mathrm{s}(f, x) = \#\{i \colon f(x) \neq f(x^{\{i\}})\}$$

Czułość

maksimum czułości lokalnych

Złożoność funkcji boolowskich

Lokalna czułość

liczba bitów, na które czuła jest funkcja przy danym wejściu

$$\mathrm{s}(f, x) = \#\{i \colon f(x) \neq f(x^{\{i\}})\}$$

Czułość

maksimum czułości lokalnych

$$\mathrm{s}(f) = \max_x \mathrm{s}(f, x)$$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathrm{s}(\mathbf{AND}_n) = \mathrm{s}(\mathbf{OR}_n) = \mathrm{s}(\mathbf{XOR}_n) = n$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathrm{s}(\mathbf{AND}_n) = \mathrm{s}(\mathbf{OR}_n) = \mathrm{s}(\mathbf{XOR}_n) = n$
- $f(\mathbf{00}) = f(\mathbf{10}) = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{01}) = f(\mathbf{11}) = \mathbf{1}$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathrm{s}(\mathbf{AND}_n) = \mathrm{s}(\mathbf{OR}_n) = \mathrm{s}(\mathbf{XOR}_n) = n$
- $f(\mathbf{00}) = f(\mathbf{10}) = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{01}) = f(\mathbf{11}) = \mathbf{1}$

$$\mathrm{s}(f) = 1$$

Złożoność funkcji boolowskich

- $\mathrm{s}(\mathbf{AND}_n) = \mathrm{s}(\mathbf{OR}_n) = \mathrm{s}(\mathbf{XOR}_n) = n$
- $f(\mathbf{00}) = f(\mathbf{10}) = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{01}) = f(\mathbf{11}) = \mathbf{1}$

$$\mathrm{s}(f) = 1$$

Intuicje

- Im niższa czułość, tym funkcja jest bardziej „gładka”.
- Im wyższa czułość, tym funkcja jest bardziej „złożona”.

Złożoność funkcji boolowskich

Lokalna czułość blokowa

maksymalna liczba parami rozłącznych podzbiorów

$$B_1, B_2, \ldots, B_k \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

na które czuła jest funkcja przy danym wejściu, to znaczy

$$f(x) \neq f(x^{B_i}), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Złożoność funkcji boolowskich

Lokalna czułość blokowa

maksymalna liczba parami rozłącznych podzbiorów

$$B_1, B_2, \ldots, B_k \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

na które czuła jest funkcja przy danym wejściu, to znaczy

$$f(x) \neq f(x^{B_i}), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Czułość blokowa

maksimum lokalnych czułości blokowych

Złożoność funkcji boolowskich

Lokalna czułość blokowa

maksymalna liczba parami rozłącznych podzbiorów

$$B_1, B_2, \ldots, B_k \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

na które czuła jest funkcja przy danym wejściu, to znaczy

$$f(x) \neq f(x^{B_i}), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Czułość blokowa

maksimum lokalnych czułości blokowych

$$\mathrm{bs}(f) = \max_x \mathrm{bs}(f, x)$$

Złożoność funkcji boolowskich

$$\mathrm{s}(f) \leq \mathrm{bs}(f)$$

Złożoność funkcji boolowskich

$$\mathrm{s}(f) \leq \mathrm{bs}(f)$$

Pytanie

O ile większa może być czułość blokowa od czułości?

Funkcja Rubinsteina

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{n^2} \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \qquad n \text{ parzyste}$$

Funkcja Rubinsteina

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{n^2} \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \qquad n \text{ parzyste}$$

$$f\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{c}\text{przynajmniej jeden} \\ \text{wiersz jest postaci} \\ \mathbf{0}\dots\mathbf{0110}\dots\mathbf{0}\end{array}$$

Funkcja Rubinsteina

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{n^2} \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \qquad n \text{ parzyste}$$

$$f\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \iff \qquad \begin{array}{c}\text{przynajmniej jeden} \\ \text{wiersz jest postaci} \\ \mathbf{0}\dots\mathbf{0110}\dots\mathbf{0}\end{array}$$

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Funkcja Rubinsteina

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{n^2} \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \qquad n \text{ parzyste}$$

$$f\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \iff$$

przynajmniej jeden wiersz jest postaci $\mathbf{0}\ldots\mathbf{0110}\ldots\mathbf{0}$

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Funkcja Rubinsteina

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{n^2} \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \qquad n \text{ parzyste}$$

$$f\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad \iff \quad \begin{array}{c}\text{przynajmniej jeden} \\ \text{wiersz jest postaci} \\ \mathbf{0}\dots\mathbf{0110}\dots\mathbf{0}\end{array}$$

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{s}(f) = 2n$$

Funkcja Rubinsteina

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{n^2} \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \qquad n \text{ parzyste}$$

$$f\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{c}\text{przynajmniej jeden} \\ \text{wiersz jest postaci} \\ \mathbf{0}\dots\mathbf{0110}\dots\mathbf{0}\end{array}$$

$$f\begin{pmatrix} \color{red}{\mathbf{0}} & \mathbf{1} & \color{red}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \\ \color{red}{\mathbf{0}} & \mathbf{1} & \color{red}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \\ \color{red}{\mathbf{0}} & \mathbf{1} & \color{red}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \\ \color{red}{\mathbf{0}} & \mathbf{1} & \color{red}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{s}(f) = 2n$$

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Funkcja Rubinsteina

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{n^2} \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \qquad n \text{ parzyste}$$

$$f\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{c}\text{przynajmniej jeden} \\ \text{wiersz jest postaci} \\ \mathbf{0}\dots\mathbf{0110}\dots\mathbf{0}\end{array}$$

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{s}(f) = 2n$$

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Funkcja Rubinsteina

$$f\colon \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{n^2} \to \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}, \qquad n \text{ parzyste}$$

$$f\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{c}\text{przynajmniej jeden} \\ \text{wiersz jest postaci} \\ \mathbf{0}\dots\mathbf{0110}\dots\mathbf{0}\end{array}$$

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{s}(f) = 2n$$

$$f\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{bs}(f) = \frac{n^2}{2}$$

Hipoteza o czułości

Nisan-Szegedy (1992)

Istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnej funkcji f mamy

$$\mathrm{bs}(f) \leq s(f)^C$$

Dlaczego to jest ważne?

Wielomianowa zależność miar złożoności

Dwie miary złożoności s_1 i s_2 są wielomianowo zależne, jeżeli istnieją takie stałe $C_1, C_2 > 0$, że

$$s_1(f)^{C_1} \leq s_2(f) \leq s_1(f)^{C_2}$$

dla dowolnej funkcji f.

Dlaczego to jest ważne?

Wielomianowa zależność miar złożoności

Dwie miary złożoności s_1 i s_2 są wielomianowo zależne, jeżeli istnieją takie stałe $C_1, C_2 > 0$, że

$$s_1(f)^{C_1} \leq s_2(f) \leq s_1(f)^{C_2}$$

dla dowolnej funkcji f.

Hipoteza o czułości

Czułość i czułość blokowa są wielomianowo zależne.

Dlaczego to jest ważne?

Czułość

Czułość blokowa

Decision tree complexity

Certificate complexity

Degree

Approximate degree

Randomized query complexity

Quantum query complexity

Dlaczego to jest ważne?

Czułość

Czułość blokowa

Decision tree complexity

Certificate complexity

Degree

Approximate degree

Randomized query complexity

Quantum query complexity

Wielomianowo zależne!

Problem równoważny

n-wymiarowa hiperkostka Q^n

- Graf o 2^n wierzchołkach ze zbioru $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^n$.
- Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.

Problem równoważny

n-wymiarowa hiperkostka Q^n

- Graf o 2^n wierzchołkach ze zbioru $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n$.
- Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.

$$\mathbf{0} \;\text{———}\; \mathbf{1}$$

$$Q^1$$

Problem równoważny

n-wymiarowa hiperkostka Q^n

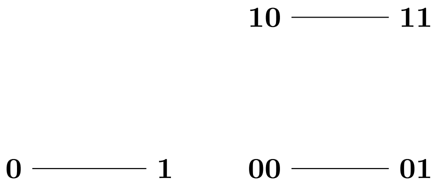
- Graf o 2^n wierzchołkach ze zbioru $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^n$.
- Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.

Q^1

Problem równoważny

n-wymiarowa hiperkostka Q^n

- Graf o 2^n wierzchołkach ze zbioru $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n$.
- Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.

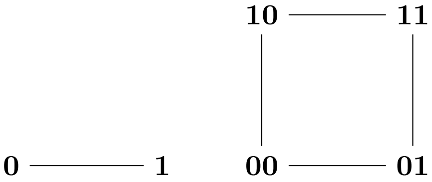


Q^1

Problem równoważny

n-wymiarowa hiperkostka Q^n

- Graf o 2^n wierzchołkach ze zbioru $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n$.
- Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.



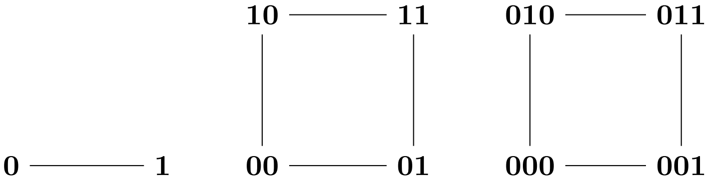
Q^1 Q^2

Problem równoważny

n-wymiarowa hiperkostka Q^n

- Graf o 2^n wierzchołkach ze zbioru $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n$.

- Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.

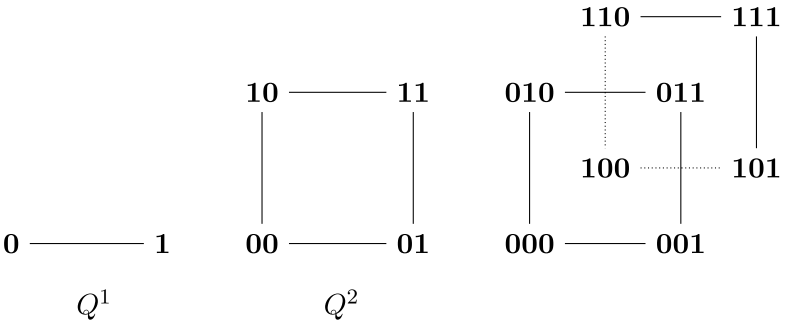


Q^1 Q^2

Problem równoważny

n-wymiarowa hiperkostka Q^n

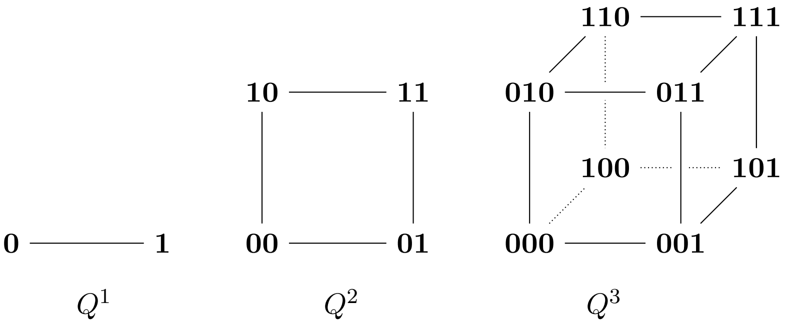
- Graf o 2^n wierzchołkach ze zbioru $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n$.
- Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.



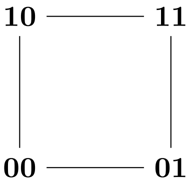
Problem równoważny

n-wymiarowa hiperkostka Q^n

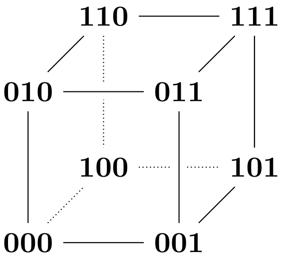
- Graf o 2^n wierzchołkach ze zbioru $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n$.
- Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.



Problem równoważny

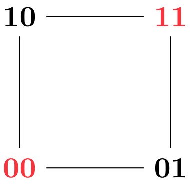


Q^2

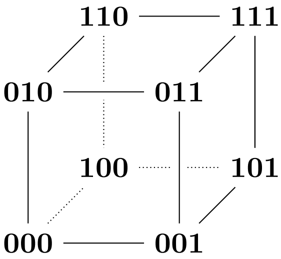


Q^3

Problem równoważny

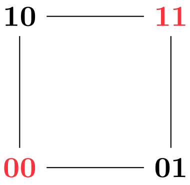


Q^2

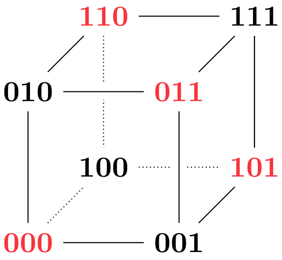


Q^3

Problem równoważny

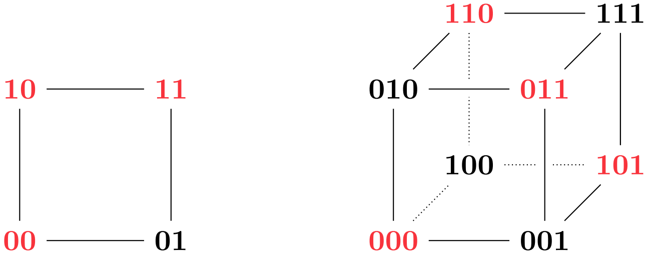


Q^2



Q^3

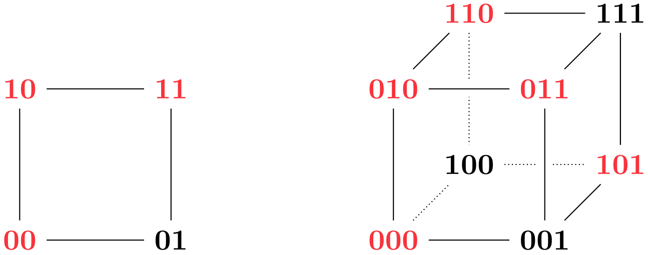
Problem równoważny



Q^2

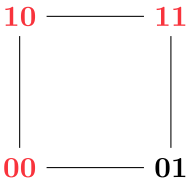
Q^3

Problem równoważny

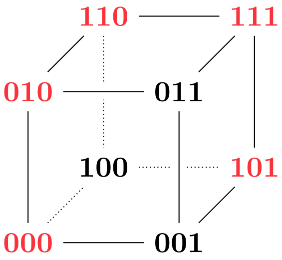


Q^2 Q^3

Problem równoważny



Q^2



Q^3

Problem równoważny

Hipoteza o czułości (Nisan-Szegedy, 1992)

Istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnej funkcji f mamy

$$\mathrm{bs}(f) \leq s(f)^C$$

Problem równoważny

Hipoteza o czułości (Nisan-Szegedy, 1992)

Istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnej funkcji f mamy

$$\mathrm{bs}(f) \leq s(f)^C$$

Gotsman-Linial (1992)

Niech H będzie podgrafem grafu Q^n o $2^{n-1} + 1$ wierzchołkach.

Problem równoważny

Hipoteza o czułości (Nisan-Szegedy, 1992)

Istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnej funkcji f mamy

$$\mathrm{bs}(f) \leq s(f)^C$$

Gotsman-Linial (1992)

Niech H będzie podgrafem grafu Q^n o $2^{n-1} + 1$ wierzchołkach. Jeżeli istnieje stała $C > 0$ (niezależna od n i H), dla której

$$\Delta(H) \geq n^C,$$

to hipoteza o czułości jest prawdziwa.

Problem równoważny

Hipoteza o czułości (Nisan-Szegedy, 1992)

Istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnej funkcji f mamy

$$\mathrm{bs}(f) \leq s(f)^C$$

Gotsman-Linial (1992)

Niech H będzie podgrafem grafu Q^n o $2^{n-1} + 1$ wierzchołkach. Jeżeli istnieje stała $C > 0$ (niezależna od n i H), dla której

$$\Delta(H) \geq n^C,$$

to hipoteza o czułości jest prawdziwa.

$$\Delta(H) := \max_{v \in V(H)} \deg v$$

Rozstrzygnięcie

Hao Huang (2019)

Jeżeli H jest podgrafem Q^n o $2^{n-1}+1$ wierzchołkach, to

$$\Delta(H) \geq \sqrt{n}.$$

Dowód

Fakt 1

Dla dowolnego grafu prostego G mamy

$$\Delta(G) \geq \lambda_1,$$

gdzie λ_1 jest największą wartością własną macierzy sąsiedztwa A_G.

Dowód

Fakt 1

Dla dowolnego grafu prostego G mamy

$$\Delta(G) \geq \lambda_1,$$

gdzie λ_1 jest największą wartością własną macierzy sąsiedztwa A_G.

Dowód. Niech v będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_1. Załóżmy, że największą (co do wartości bezwzględnej) współrzędną v jest v_i.

Dowód

Fakt 1
Dla dowolnego grafu prostego G mamy

$$\Delta(G) \geq \lambda_1,$$

gdzie λ_1 jest największą wartością własną macierzy sąsiedztwa A_G.

Dowód. Niech v będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_1. Załóżmy, że największą (co do wartości bezwzględnej) współrzędną v jest v_i. Wtedy

$$|\lambda_1 v_i| = |(A_G v)_i| = \left| \sum_{j \text{ jest sąsiadem } i} v_j \right| \leq \Delta(G)|v_i|.$$

Macierz sąsiedztwa grafu Q^n

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_1 \sim Q^1$$

Macierz sąsiedztwa grafu Q^n

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_1 \sim Q^1$$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & A_{n-1} \end{pmatrix} \qquad\qquad A_n \sim Q^n$$

Macierz sąsiedztwa grafu Q^n

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_1 \sim Q^1$$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & A_{n-1} \end{pmatrix} \qquad\qquad A_n \sim Q^n$$

Nie potrafimy szacować wartości własnych podmacierzy A_n!

Dowód

Fakt 1'

Dla dowolnego grafu prostego G mamy

$$\Delta(G) \geq \lambda_1,$$

gdzie λ_1 jest największą wartością własną macierzy sąsiedztwa A_G

Dowód

Fakt 1'

Dla dowolnego grafu prostego G mamy

$$\Delta(G) \geq \lambda_1,$$

gdzie λ_1 jest największą wartością własną macierzy sąsiedztwa A_G, w której być może pewne 1 zamieniono na -1.

Dowód

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_1 \sim Q^1$$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & A_{n-1} \end{pmatrix} \qquad\qquad A_n \sim Q^n$$

Dowód

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 \sim Q^1$$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \qquad A_n \sim Q^n$$

Dowód

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 \sim Q^1$$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \qquad A_n \sim Q^n$$

Mamy $A_1^2 = I_2$ oraz

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} A_{n-1}^2 + I_{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & A_{n-1}^2 + I_{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Dowód

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A_1 \sim Q^1$$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \qquad\qquad A_n \sim Q^n$$

Mamy $A_1^2 = I_2$ oraz

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} A_{n-1}^2 + I_{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & A_{n-1}^2 + I_{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \qquad A_n^2 = nI_{2^n}$$

Dowód

$$A_n^2 = nI_{2^n}$$

Dowód

$$A_n^2 = nI_{2^n}$$

Wniosek

Dla wartości własnej λ i wektora własnego v mamy

$$nv = A_n^2 v = A_n A_n v = \lambda A_n v = \lambda^2 v$$

Dowód

$$A_n^2 = nI_{2^n}$$

Wniosek

Dla wartości własnej λ i wektora własnego v mamy

$$nv = A_n^2 v = A_n A_n v = \lambda A_n v = \lambda^2 v,$$

czyli

$$\lambda = \sqrt{n} \qquad \text{lub} \qquad \lambda = -\sqrt{n}.$$

Dowód

$$A_n^2 = nI_{2^n}$$

Wniosek

Dla wartości własnej λ i wektora własnego v mamy

$$nv = A_n^2 v = A_n A_n v = \lambda A_n v = \lambda^2 v,$$

czyli

$$\lambda = \sqrt{n} \qquad \text{lub} \qquad \lambda = -\sqrt{n}.$$

Ponieważ

$$\mathrm{Tr}(A_n) = 0,$$

to dokładnie połowa (2^{n-1}) wartości własnych macierzy A_n jest równa $\sqrt{n}$, a druga połowa jest równa $-\sqrt{n}$.

Dowód

- Rozważmy podmacierz A_H macierzy A_n odpowiadającą H.

Dowód

- Rozważmy podmacierz A_H macierzy A_n odpowiadającą H. Ponieważ A_H jest macierzą symetryczną, to

$$|\lambda_1| = \|A_H\| = \sup_{\|v\|=1} \|A_H v\| = \sup_{\|v_H\|=1} \|A_n v_H\|,$$

gdzie v_H jest wektorem, który „poza H" ma współrzędne równe 0.

Dowód

- Rozważmy podmacierz A_H macierzy A_n odpowiadającą H. Ponieważ A_H jest macierzą symetryczną, to

$$|\lambda_1| = \|A_H\| = \sup_{\|v\|=1} \|A_H v\| = \sup_{\|v_H\|=1} \|A_n v_H\|,$$

gdzie v_H jest wektorem, który „poza H" ma współrzędne równe 0.

- Podprzestrzeń generowana przez wektory własne A_n odpowiadające wartości własnej $\sqrt{n}$ jest wymiaru 2^{n-1}, a podprzestrzeń wektorów v_H jest wymiaru $2^{n-1} + 1$.

Dowód

- Rozważmy podmacierz A_H macierzy A_n odpowiadającą H. Ponieważ A_H jest macierzą symetryczną, to

$$|\lambda_1| = \|A_H\| = \sup_{\|v\|=1} \|A_H v\| = \sup_{\|v_H\|=1} \|A_n v_H\|,$$

  gdzie v_H jest wektorem, który „poza H" ma współrzędne równe 0.
- Podprzestrzeń generowana przez wektory własne A_n odpowiadające wartości własnej $\sqrt{n}$ jest wymiaru 2^{n-1}, a podprzestrzeń wektorów v_H jest wymiaru $2^{n-1}+1$.
- Muszą mieć zatem niezerowy wspólny element v_0.

Dowód

- Rozważmy podmacierz A_H macierzy A_n odpowiadającą H. Ponieważ A_H jest macierzą symetryczną, to
$$|\lambda_1| = \|A_H\| = \sup_{\|v\|=1} \|A_H v\| = \sup_{\|v_H\|=1} \|A_n v_H\|,$$
gdzie v_H jest wektorem, który „poza H" ma współrzędne równe 0.
- Podprzestrzeń generowana przez wektory własne A_n odpowiadające wartości własnej $\sqrt{n}$ jest wymiaru 2^{n-1}, a podprzestrzeń wektorów v_H jest wymiaru $2^{n-1}+1$.
- Muszą mieć zatem niezerowy wspólny element v_0.
- Wtedy jednak, przyjmując $\|v_0\| = 1$, mamy
$$|\lambda_1| \geq \|A_n v_0\| = \sqrt{n}\|v_0\| = \sqrt{n}.$$

Dowód

- Rozważmy podmacierz A_H macierzy A_n odpowiadającą H. Ponieważ A_H jest macierzą symetryczną, to

$$|\lambda_1| = \|A_H\| = \sup_{\|v\|=1} \|A_H v\| = \sup_{\|v_H\|=1} \|A_n v_H\|,$$

gdzie v_H jest wektorem, który „poza H" ma współrzędne równe 0.
- Podprzestrzeń generowana przez wektory własne A_n odpowiadające wartości własnej $\sqrt{n}$ jest wymiaru 2^{n-1}, a podprzestrzeń wektorów v_H jest wymiaru $2^{n-1}+1$.
- Muszą mieć zatem niezerowy wspólny element v_0.
- Wtedy jednak, przyjmując $\|v_0\| = 1$, mamy

$$|\lambda_1| \geq \|A_n v_0\| = \sqrt{n}\|v_0\| = \sqrt{n}.$$

- Ostatecznie

$$\Delta(H) \geq \sqrt{n}.$$

ANNALS OF MATHEMATICS

Princeton University & Institute for Advanced Study

Induced subgraphs of hypercubes and a proof of the Sensitivity Conjecture

Pages 949-955 from Volume 190 (2019), Issue 3 *by Hao Huang*

Abstract

In this paper, we show that every $(2^{n-1}+1)$-vertex induced subgraph of the n-dimensional cube graph has maximum degree at least $\sqrt{n}$. This is the best possible result, and it improves a logarithmic lower bound shown by Chung, Füredi, Graham and Seymour in 1988. As a direct consequence, we prove that the sensitivity and degree of a boolean function are polynomially related, solving an outstanding foundational problem in theoretical computer science, the Sensitivity Conjecture of Nisan and Szegedy.

Keywords

Boolean function, Sensitivity Conjecture, eigenvalue interlacing, hypercube

Mathematical Subject Classification

Primary: 05C35 Secondary: 68Q17, 94C10

DOI

https://doi.org/10.4007/annals.2019.190.3.6

MR

4024566

Zbl

07128144

Milestones

Received: 20 July 2019

Revised: 31 July 2019

Accepted: 28 August 2019

Published online: 28 October 2019

Authors

Hao Huang

Milestones
Received: 20 July 2019
Revised: 31 July 2019
Accepted: 28 August 2019
Published online: 28 October 2019

Authors

Hao Huang
Emory University, Atlanta, GA

Dziękuję za uwagę.