Czy to tylko sztuczka, czy to już metoda?

Adam Bobrowski

Politechnika Lubelska

Adam Feliks Bielecki i Jan Maria Kisyński

Czytać dowody między wierszami ...

George (György) Pólya

In order to solve a differential equation you look at it till a solution occurs to you

Czytać dowody między wierszami ...

George (György) Pólya

In order to solve a differential equation you look at it till a solution occurs to you

Trzy rozdziały.

Zasada Banacha

$(\mathbb{X}, d)$-przestrzeń metryczna zupełna:

Jeśli dla odwzorowania $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ można tak dobrać $q \in [0, 1)$, że

$$d(Tx, Ty) \leqslant q\, d(x, y), \qquad x, y \in \mathbb{X},$$

to istnieje dokładnie jeden taki $x^* \in \mathbb{X}$, że $Tx^* = x^*$. Co więcej, dla dowolnego $x \in \mathbb{X}$, $x^* = \lim_{n\to\infty} T^n x$.

Zasada Banacha

$(\mathbb{X}, d)$-przestrzeń metryczna zupełna:

Jeśli dla odwzorowania $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ można tak dobrać $q \in [0, 1)$, że

$$d(Tx, Ty) \leqslant q\, d(x, y), \qquad x, y \in \mathbb{X},$$

to istnieje dokładnie jeden taki $x^* \in \mathbb{X}$, że $Tx^* = x^*$. Co więcej, dla dowolnego $x \in \mathbb{X}$, $x^* = \lim_{n\to\infty} T^n x$.

Dowód

Zasada Banacha

$(\mathbb{X}, d)$-przestrzeń metryczna zupełna:

Jeśli dla odwzorowania $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ można tak dobrać $q \in [0, 1)$, że

$$d(Tx, Ty) \leqslant q\, d(x, y), \qquad x, y \in \mathbb{X},$$

to istnieje dokładnie jeden taki $x^* \in \mathbb{X}$, że $Tx^* = x^*$. Co więcej, dla dowolnego $x \in \mathbb{X}$, $x^* = \lim_{n\to\infty} T^n x$.

Dobrać

Zasada Banacha

$(\mathbb{X}, d)$-przestrzeń metryczna zupełna:

Jeśli dla odwzorowania $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ można tak dobrać $q \in [0, 1)$, że

$$d(Tx, Ty) \leqslant q\, d(x, y), \qquad x, y \in \mathbb{X},$$

to istnieje dokładnie jeden taki $x^* \in \mathbb{X}$, że $Tx^* = x^*$. Co więcej, dla dowolnego $x \in \mathbb{X}$, $x^* = \lim_{n\to\infty} T^n x$.

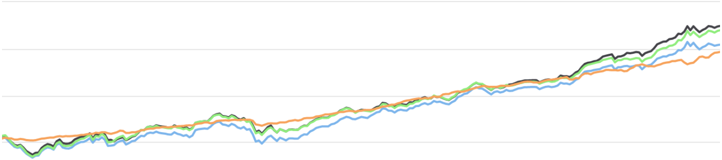
$$\mathbb{X} - \text{przestrzeń Banacha}, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Krótki kurs analizy funkcjonalnej

- Co to jest tensor?
- Co to jest funkcja ciągła?

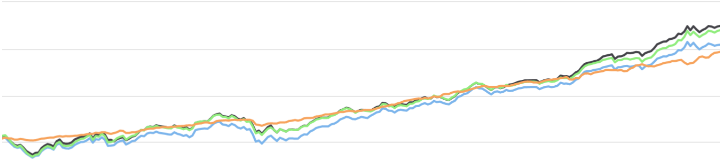
Krótki kurs analizy funkcjonalnej

- Co to jest tensor?
- Co to jest funkcja ciągła?
- „Jasiu, jako mój uczeń kształcisz się u mię na nauce. Co to jest mój chłopczę?"



Krótki kurs analizy funkcjonalnej

- Co to jest tensor?
- Co to jest funkcja ciągła?
- „Jasiu, jako mój uczeń kształcisz się u mię na nauce. Co to jest mój chłopczę?"



- Przestrzeń funkcji ciągłych jest zupełna.

$\approx$ twierdzenie Picarda

Dane $u \in \mathbb{R}^n$ oraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, globalnie lipschitzowska:

$$|f(u) - f(v)| \leqslant L|u - v|.$$

Problem: istnienie i jedyność rozwiązań równania (ukł. równań)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t)), t \geqslant t_0 \qquad x(t_0) = u.$$

$\approx$ twierdzenie Picarda, c.d.

- $h > 0$, $\mathbb{X}$ – przestrzeń $C[t_0, t_0 + h]$, funkcji ciągłych (o wartościach w $\mathbb{R}^n$) na przedziale $[t_0, t_0 + h]$ z normą maximum.

$\approx$ twierdzenie Picarda, c.d.

- $h > 0$, $\mathbb{X}$ – przestrzeń $C[t_0, t_0 + h]$, funkcji ciągłych (o wartościach w $\mathbb{R}^n$) na przedziale $[t_0, t_0 + h]$ z normą maximum.
- Operator $\mathbb{X} \ni x \mapsto Tx \in \mathbb{X}$,

$$(Tx)(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\, \mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$

$\approx$ twierdzenie Picarda, c.d.

- $h > 0$, $\mathbb{X}$ – przestrzeń $C[t_0, t_0 + h]$, funkcji ciągłych (o wartościach w $\mathbb{R}^n$) na przedziale $[t_0, t_0 + h]$ z normą maximum.
- Operator $\mathbb{X} \ni x \mapsto Tx \in \mathbb{X}$,

$$(Tx)(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$

- Liczymy

$$\|Tx - Ty\| = \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \left| \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(y(s))\,\mathrm{d}s \right|$$

≈ twierdzenie Picarda, c.d.

- $h > 0$, $\mathbb{X}$ – przestrzeń $C[t_0, t_0 + h]$, funkcji ciągłych (o wartościach w $\mathbb{R}^n$) na przedziale $[t_0, t_0 + h]$ z normą maximum.
- Operator $\mathbb{X} \ni x \mapsto Tx \in \mathbb{X}$,

$$(Tx)(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$

- Liczymy

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \left| \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(y(s))\,\mathrm{d}s \right| \\ &= \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \left| \int_{t_0}^{t} [f(x(s)) - f(y(s))]\,\mathrm{d}s \right| \end{aligned}$$

$\approx$ twierdzenie Picarda, c.d.

- $h > 0$, $\mathbb{X}$ – przestrzeń $C[t_0, t_0 + h]$, funkcji ciągłych (o wartościach w $\mathbb{R}^n$) na przedziale $[t_0, t_0 + h]$ z normą maximum.
- Operator $\mathbb{X} \ni x \mapsto Tx \in \mathbb{X}$,

$$(Tx)(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$

- Liczymy

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \left| \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(y(s))\,\mathrm{d}s \right| \\ &= \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \left| \int_{t_0}^{t} [f(x(s)) - f(y(s))]\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant L \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant Lh\|x - y\|. \end{aligned}$$

Dla, na przykład, $h = \frac{3}{4L}$

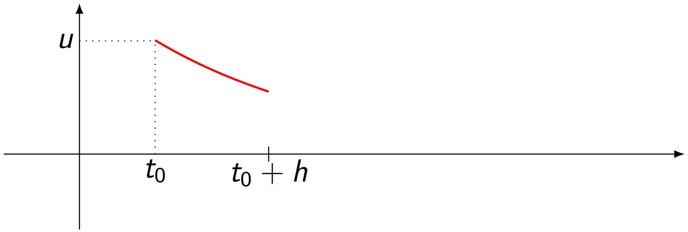
Unikatowy punkt stały

$$x^*(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x^*(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$

Dla, na przykład, $h = \frac{3}{4L}$

Unikatowy punkt stały

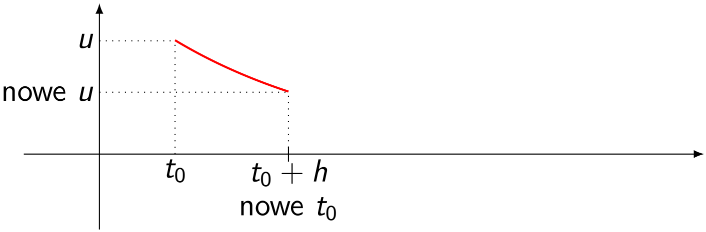
$$x^*(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x^*(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$



Dla, na przykład, $h = \frac{3}{4L}$

Unikatowy punkt stały

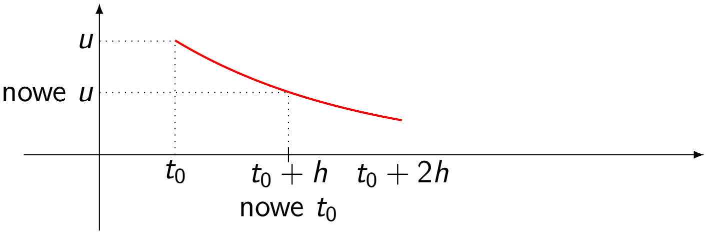
$$x^*(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x^*(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$



Dla, na przykład, $h = \frac{3}{4L}$

Unikatowy punkt stały

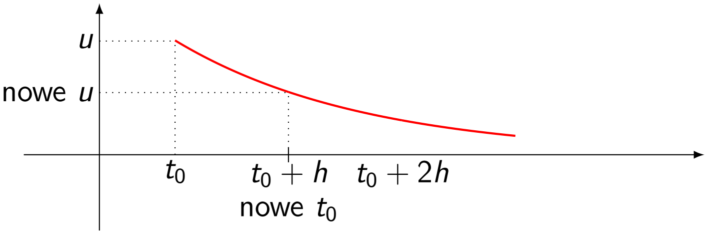
$$x^*(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x^*(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$



Dla, na przykład, $h = \frac{3}{4L}$

Unikatowy punkt stały

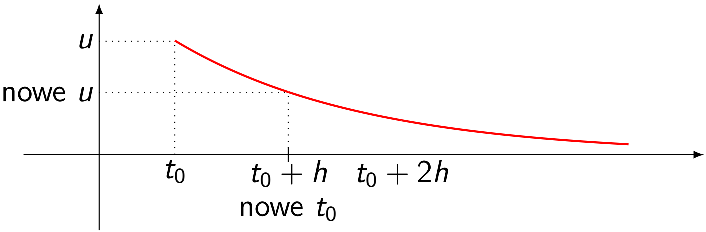
$$x^*(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x^*(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$



Dla, na przykład, $h = \frac{3}{4L}$

Unikatowy punkt stały

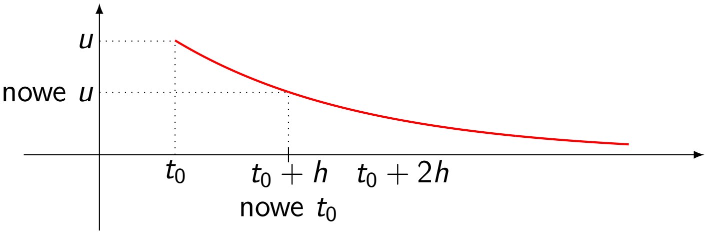
$$x^*(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x^*(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$



Dla, na przykład, $h = \frac{3}{4L}$

Unikatowy punkt stały

$$x^*(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x^*(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$

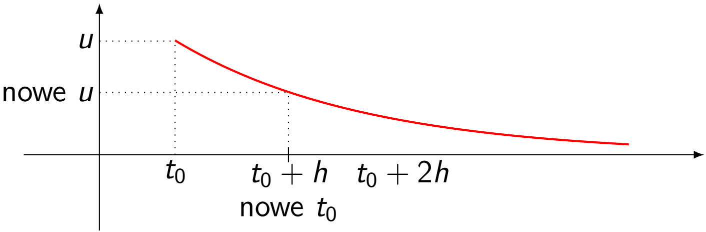


Rozwiązanie na całej osi, lecz ...

Dla, na przykład, $h = \frac{3}{4L}$

Unikatowy punkt stały

$$x^*(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x^*(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$



Rozwiązanie na całej osi, lecz ...

Kogo brakuje?

Adam Bielecki był doktorantem Witolda Wilkosza

- Doktorat w roku 1935.
- Sondenraktion Krakau.
- Przeniósł się do Lublina w 1947.
- Największe osiągnięcie: redukcja aksjomatów geometrii euklidesowej podanej przez D. Hilberta.
- Najbardziej znany z ...

Norma Bieleckiego

- Dla prostoty $t_0 = 0$, $\lambda > 0$–parametr, $\mathbb{X}$ ta sama przestrzeń $C[0,h]$ funkcji ciągłych na $[0,h]$.

Norma Bieleckiego

- Dla prostoty $t_0 = 0$, $\lambda > 0$–parametr, $\mathbb{X}$ ta sama przestrzeń $C[0, h]$ funkcji ciągłych na $[0, h]$.
- Ten sam operator, inna norma.

$$\|x\|_\lambda = \max_{t \in [0,h]} \mathrm{e}^{-\lambda t} |x(t)|.$$

Norma Bieleckiego

- Dla prostoty $t_0 = 0$, $\lambda > 0$–parametr, $\mathbb{X}$ ta sama przestrzeń $C[0,h]$ funkcji ciągłych na $[0,h]$.
- Ten sam operator, inna norma.

$$\|x\|_\lambda = \max_{t\in[0,h]} \mathrm{e}^{-\lambda t}|x(t)|.$$

$$\|Tx - Ty\|_\lambda = \max_{t\in[0,h]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|\int_0^t [f(x(s)) - f(y(s))]\,\mathrm{d}s\right|$$

Norma Bieleckiego

- Dla prostoty $t_0 = 0$, $\lambda > 0$–parametr, $\mathbb{X}$ ta sama przestrzeń $C[0,h]$ funkcji ciągłych na $[0,h]$.
- Ten sam operator, inna norma.

$$\|x\|_\lambda = \max_{t\in[0,h]} \mathrm{e}^{-\lambda t}|x(t)|.$$

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|_\lambda &= \max_{t\in[0,h]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|\int_0^t [f(x(s)) - f(y(s))]\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant L \max_{t\in[0,h]} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}[\mathrm{e}^{-\lambda s}|x(s) - y(s)|]\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Norma Bieleckiego

- Dla prostoty $t_0 = 0$, $\lambda > 0$–parametr, $\mathbb{X}$ ta sama przestrzeń $C[0, h]$ funkcji ciągłych na $[0, h]$.
- Ten sam operator, inna norma.

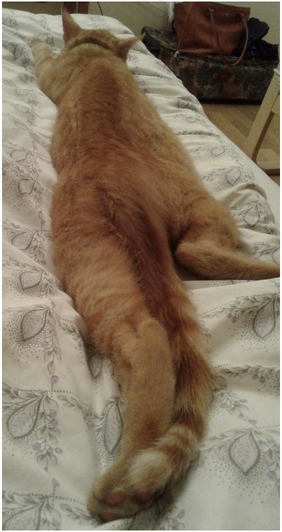
$$\|x\|_\lambda = \max_{t\in[0,h]} \mathrm{e}^{-\lambda t}|x(t)|.$$

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|_\lambda &= \max_{t\in[0,h]} \mathrm{e}^{-\lambda t} \left| \int_0^t [f(x(s)) - f(y(s))] \, \mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant L \max_{t\in[0,h]} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} [\mathrm{e}^{-\lambda s}|x(s) - y(s)|] \, \mathrm{d}s \\
&\leqslant \max_{t\in[0,h]} L \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \, \mathrm{d}s \|x - y\|_\lambda < \frac{L}{\lambda} \|x - y\|_\lambda.
\end{aligned}$$

Wzór metra

Właśnie ustalono nową jednostkę długości: jeden Rych. Jeden Rych to jeden stary metr.

Ile Rychów ma odcinek liczący trzy stare metry? (a) pół Rycha (b) półtora Rycha (c) trzy Rychy czy (d) sześć Rychów?



Inne sformułowanie zasady Banacha.

To więcej niż sztuczka

- Lekka modyfikacja: rozwiązanie na całej półosi rosnące podwykładniczo.
- To początek teorii punktów stałych w Lublinie.

To więcej niż sztuczka

- Lekka modyfikacja: rozwiązanie na całej półosi rosnące podwykładniczo.
- To początek teorii punktów stałych w Lublinie.
- Szereg artykułów, ukazują się do dziś.
- Dla każdych funkcji $y, z \in C[0,1]$ istnieje dokładnie jedna taka $x \in C[0,1]$, że

$$x(t) - \int_0^t x(t-s)z(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \qquad t \in [0,1].$$

To więcej niż sztuczka

- Lekka modyfikacja: rozwiązanie na całej półosi rosnące podwykładniczo.
- To początek teorii punktów stałych w Lublinie.
- Szereg artykułów, ukazują się do dziś.
- Dla każdych funkcji $y, z \in C[0,1]$ istnieje dokładnie jedna taka $x \in C[0,1]$, że

$$x(t) - \int_0^t x(t-s)z(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \qquad t \in [0,1].$$

- Wrażenie estetyczne! (Matematyka jest częścią kultury ..., Bernard Turowicz; obraz w połamanych ramach)

Teoria półgrup operatorów

Sztuka przyporządkowywania

operatorowi działającemu w przestrzeni Banacha $\mathbb{B}$ jego eksponenty

$$A \mapsto \mathrm{e}^{tA}, t \geqslant 0; \qquad \mathrm{e}^{(s+t)A} = \mathrm{e}^{sA}\mathrm{e}^{tA};$$

operatory e^{tA} ograniczone, A niekoniecznie.

Teoria półgrup operatorów

Sztuka przyporządkowywania

operatorowi działającemu w przestrzeni Banacha $\mathbb{B}$ jego eksponenty

$$A \mapsto \mathrm{e}^{tA}, t \geqslant 0; \qquad \mathrm{e}^{(s+t)A} = \mathrm{e}^{sA}\mathrm{e}^{tA};$$

operatory e^{tA} ograniczone, A niekoniecznie.

Metoda (Peano, Hadamard, etc.):

(a) Rozwiązać równanie

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax(t), t \geqslant 0, \qquad x(0) = u \in \mathbb{B},$$

dla u z gęstego podzbioru $\mathbb{X}$, (b) zdefiniować $\mathrm{e}^{tA}u = x(t)$, a na koniec (c) rozszerzyć tę definicję na całą przestrzeń $\mathbb{X}$.

Przykłady: (a) A–operator ograniczony

Znacznie prostsza sytuacja.

Przykłady: (a) A–operator ograniczony

Znacznie prostsza sytuacja.

$$x(t) \;=\; u \qquad (t \geqslant 0)$$

Przykłady: (a) A–operator ograniczony

Znacznie prostsza sytuacja.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= u \qquad (t \geqslant 0) \\
(Tx)(t) &= u + \int_0^t Ax(s)\,\mathrm{d}s = u + tAu \qquad (t \geqslant 0)
\end{aligned}
$$

Przykłady: (a) A–operator ograniczony

Znacznie prostsza sytuacja.

$$\begin{aligned} x(t) &= u \qquad (t \geqslant 0) \\ (Tx)(t) &= u + \int_0^t Ax(s)\,\mathrm{d}s = u + tAu \qquad (t \geqslant 0) \\ (T^2x)(t) &= u + \int_0^t A(u + sAu)\,\mathrm{d}s = u + tAu + \frac{1}{2}t^2A^2u \end{aligned}$$

Przykłady: (a) *A*–operator ograniczony

Znacznie prostsza sytuacja.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= u \qquad (t \geqslant 0)\\
(Tx)(t) &= u + \int_0^t Ax(s)\,\mathrm{d}s = u + tAu \qquad (t \geqslant 0)\\
(T^2x)(t) &= u + \int_0^t A(u + sAu)\,\mathrm{d}s = u + tAu + \frac{1}{2}t^2A^2u\\
(T^nx)(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^kA^k}{k!}u
\end{aligned}
$$

Przykłady: (a) A–operator ograniczony

Znacznie prostsza sytuacja.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= u \qquad (t \geqslant 0) \\
(Tx)(t) &= u + \int_0^t Ax(s)\,\mathrm{d}s = u + tAu \qquad (t \geqslant 0) \\
(T^2x)(t) &= u + \int_0^t A(u + sAu)\,\mathrm{d}s = u + tAu + \frac{1}{2}t^2A^2u \\
(T^nx)(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^kA^k}{k!}u \\
x^*(t) &= \mathrm{e}^{tA}u := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kA^k}{k!}u.
\end{aligned}
$$

Przykłady: (b) A–pochodna

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, funkcje ciągłe z granicami w $\pm\infty$, $Au = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \in \mathbb{B}$.

Przykłady: (b) A–pochodna

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, funkcje ciągłe z granicami w $\pm\infty$, $Au = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \in \mathbb{B}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= Ax(t), \qquad x(0) = u,\\
\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} &= \frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau}, \qquad x(0,\tau) = u(\tau),
\end{aligned}
$$

Przykłady: (b) A–pochodna

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, funkcje ciągłe z granicami w $\pm\infty$, $Au = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \in \mathbb{B}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= Ax(t), \qquad x(0) = u,\\
\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} &= \frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau}, \qquad x(0,\tau) = u(\tau),\\
x(t,\tau) &= u(t+\tau) \qquad \text{(dla różniczkowalnego } u\text{).}
\end{aligned}
$$

Przykłady: (b) A–pochodna

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, funkcje ciągłe z granicami w $\pm\infty$, $Au = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \in \mathbb{B}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= Ax(t), & x(0) &= u, \\
\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} &= \frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau}, & x(0,\tau) &= u(\tau), \\
x(t,\tau) &= u(t+\tau) & &\text{(dla różniczkowalnego } u).
\end{aligned}$$

Eksponenta pochodnej:

$$(\mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

Przykłady: (b) A–pochodna

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, funkcje ciągłe z granicami w $\pm\infty$, $Au = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \in \mathbb{B}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= Ax(t), \qquad x(0) = u,\\
\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} &= \frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau}, \qquad x(0,\tau) = u(\tau),\\
x(t,\tau) &= u(t+\tau) \qquad \text{(dla różniczkowalnego } u\text{)}.
\end{aligned}
$$

Eksponenta pochodnej:

$$(\mathrm{e}^{t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

Lasota!

Twierdzenie Hille'a–Yosidy

Dla A istnieje eksponenta spełniająca warunek

$$\|e^{tA}\| \leqslant 1, \qquad t \geqslant 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

Twierdzenie Hille'a–Yosidy

Dla A istnieje eksponenta spełniająca warunek

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leqslant 1, \qquad t \geqslant 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

- dziedzina $D(A)$ jest zbiorem gęstym w $\mathbb{X}$ oraz
- dla każdego $v \in \mathbb{B}$ i $\lambda > 0$ istnieje dokładnie jeden taki $u \in D(A)$, że

$$\lambda u - Au = v$$

  i do tego $\|\lambda u\| \leqslant \|v\|$.

Twierdzenie Hille'a–Yosidy

Dla A istnieje eksponenta spełniająca warunek

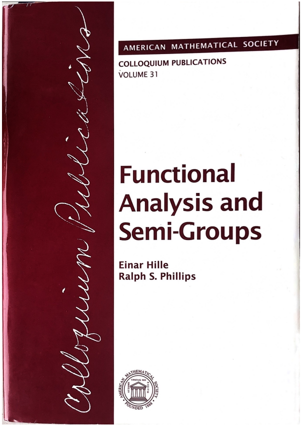
$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leqslant 1, \qquad t \geqslant 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

- dziedzina $D(A)$ jest zbiorem gęstym w $\mathbb{X}$ oraz
- dla każdego $v \in \mathbb{B}$ i $\lambda > 0$ istnieje dokładnie jeden taki $u \in D(A)$, że
  $$\lambda u - Au = v$$
  i do tego $\|\lambda u\| \leqslant \|v\|$.

Piszemy wtedy $u = (\lambda - A)^{-1} v; (\lambda - A)^{-1} v = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{tA} v \,\mathrm{d}t.$

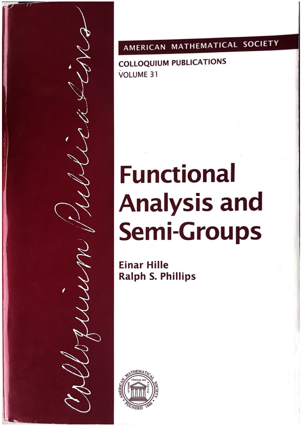
Twierdzenie Trottera–Neveu–Kato



- W Hille'u–Phillipsie (1957) brak:
- Kiedy ciąg półgrup $\{\mathrm{e}^{tA_n}, t \geqslant 0\}$ zbiega do jakiejś (nieznanej z góry) półgrupy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n} u = \mathrm{e}^{tA} u, u \in \mathbb{B}.$$

Twierdzenie Trottera–Neveu–Kato



- W Hille'u–Phillipsie (1957) brak:
- Kiedy ciąg półgrup $\{\mathrm{e}^{tA_n}, t \geqslant 0\}$ zbiega do jakiejś (nieznanej z góry) półgrupy:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n} u = \mathrm{e}^{tA} u, u \in \mathbb{B}.$$

- Odpowiedź Trottera i Neveu (1958) oraz Kato (1959):
- Gdy granica

$$R_\lambda u := \lim_{n\to\infty} (\lambda - A_n)^{-1} u, \ \lambda > 0, u \in \mathbb{B}$$

istnieje i operatory $R_\lambda, \lambda > 0$ mają gęste obrazy. Dowód skomplikowany.

10 lat później, młody adept teorii półgrup ...

... publikuje dowód mniej niż dwu-stronicowy.

Wystarczy zastosować

twierdzenie Hille'a–Yosidy do przestrzeni $c(\mathbb{B})$ ciągów zbieżnych i operatora $\mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (A_n u_n)_{n\geqslant 1}$.

Dowód (dwa kroki):

$$\mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (A_n u_n)_{n\geqslant 1}$$

1. $\mathcal{A}$ jest generatorem.
2. $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\mathrm{e}^{tA_n} u_n\right)_{n\geqslant 1}.$

Dowód (dwa kroki):

$$\mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (A_n u_n)_{n\geqslant 1}$$

1. $\mathcal{A}$ jest generatorem.
2. $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\mathrm{e}^{tA_n} u_n\right)_{n\geqslant 1}$.

Dowód (1):

(a) Dla $(v_n)_{n\geqslant 1} \in c(\mathbb{B})$, rozwiązaniem równania

$$\lambda(u_n)_{n\geqslant 1} - \mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (v_n)_{n\geqslant 1}$$

może być tylko

$$(u_n)_{n\geqslant 1} := \left((\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1} =: \mathcal{R}_\lambda (v_n)_{n\geqslant 1}$$

Dowód (dwa kroki):

$$\mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (A_n u_n)_{n\geqslant 1}$$

1. $\mathcal{A}$ jest generatorem.
2. $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\mathrm{e}^{tA_n} u_n\right)_{n\geqslant 1}$.

Dowód (1):

(a) Dla $(v_n)_{n\geqslant 1} \in c(\mathbb{B})$, rozwiązaniem równania

$$\lambda(u_n)_{n\geqslant 1} - \mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (v_n)_{n\geqslant 1}$$

może być tylko

$$(u_n)_{n\geqslant 1} := \left((\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1} =: \mathcal{R}_\lambda (v_n)_{n\geqslant 1}$$

I to jest prawdziwe rozwiązanie:

$$(\lambda - \mathcal{A})\mathcal{R}_\lambda (v_n)_{n\geqslant 1} = (v_n)_{n\geqslant 1}, \mathcal{R}_\lambda(\lambda - \mathcal{A})(u_n)_{n\geqslant 1} = (u_n)_{n\geqslant 1}.$$

(b) Gęstość obrazu R_λ daje gęstość obrazu $\mathcal{R}_\lambda$ = dziedzinie $\mathcal{A}$.

Czy to tylko piękna sztuczka?

- Kluczowa rola $\mathcal{A}$.

Czy to tylko piękna sztuczka?

- Kluczowa rola $\mathcal{A}$.
- Jeśli $\mathbb{B}$ jest przestrzenią Hilberta ...

Czy to tylko piękna sztuczka?

- Kluczowa rola $\mathcal{A}$.
- Jeśli $\mathbb{B}$ jest przestrzenią Hilberta ...
- Przykład:
  - A co jeśli $R_\lambda, \lambda > 0$ nie mają gęstych obrazów?
  - T. G. Kurtz w 1970 roku: półgrupy nie zbiegają, ale istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{tA_n} u \,\mathrm{d}s, \qquad t > 0, u \in \mathbb{B}.$$

Czy to tylko piękna sztuczka?

- Kluczowa rola $\mathcal{A}$.
- Jeśli $\mathbb{B}$ jest przestrzenią Hilberta ...
- Przykład:
  - A co jeśli $R_\lambda, \lambda > 0$ nie mają gęstych obrazów?
  - T. G. Kurtz w 1970 roku: półgrupy nie zbiegają, ale istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{tA_n} u \,\mathrm{d}s, \qquad t > 0, u \in \mathbb{B}.$$

  - 20 (!) lat później: teoria półgrup scałkowanych.
  - $\mathcal{A}$ jest generatorem półgrupy scałkowanej danej wzorem

$$U_{\mathcal{A}}(t)(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\int_0^t \mathrm{e}^{sA_n} u_n \,\mathrm{d}s\right)_{n\geqslant 1}.$$

Czytanie to niebezpieczna umiejętność ...

Równanie

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(t,\tau)}{\partial \tau^2}, \qquad x(0,\tau) = u(\tau), \quad (t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R})$$

($u \in C[-\infty,\infty]$ – dane)

Czytanie to niebezpieczna umiejętność ...

Równanie

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(t,\tau)}{\partial \tau^2}, \qquad x(0,\tau) = u(\tau), \quad (t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R})$$

($u \in C[-\infty,\infty]$ – dane) ma rozwiązanie

$$x(t,\tau) = \left[\mathrm{e}^{t\triangle} u\right](\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{t}} u(\tau+\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = E\, u(\tau + w(t)).$$

Czytanie to niebezpieczna umiejętność ...

Równanie

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(t,\tau)}{\partial \tau^2}, \qquad x(0,\tau) = u(\tau), \quad (t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R})$$

$(u \in C[-\infty,\infty]$ – dane) ma rozwiązanie

$$x(t,\tau) = \left[\mathrm{e}^{t\triangle} u\right](\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{t}} u(\tau+\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = E\,u(\tau + w(t)).$$

II tom Fellera: jak rozwiązać równanie

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(t,\tau)}{\partial \tau^2}, \qquad x(0,\tau) = u(\tau), x(t,0) = 0, \quad (t,\tau \geqslant 0).$$

Pomysł Williama Thomsona (Lorda Kelvina)

1. Rozszerz u do funkcji nieparzystej.
2. Zastosuj wzór znany dla całej osi.
3. Obetnij rozwiązanie do prawej półosi.

Pomysł Williama Thomsona (Lorda Kelvina)

1. Rozszerz u do funkcji nieparzystej.
2. Zastosuj wzór znany dla całej osi.
3. Obetnij rozwiązanie do prawej półosi.

$$\boxed{\mathrm{e}^{t\triangle_0} u = O\mathrm{e}^{t\triangle} R u}$$

Pomysł Williama Thomsona (Lorda Kelvina)

1. Rozszerz u do funkcji nieparzystej.
2. Zastosuj wzór znany dla całej osi.
3. Obetnij rozwiązanie do prawej półosi.

$$\boxed{\mathrm{e}^{t\triangle_0} u = O\mathrm{e}^{t\triangle} R u}$$

4. A jeśli $x(t,0) = 0$ zamienimy na $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(t,0) = 0$?

Pomysł Williama Thomsona (Lorda Kelvina)

1. Rozszerz u do funkcji nieparzystej.
2. Zastosuj wzór znany dla całej osi.
3. Obetnij rozwiązanie do prawej półosi.

$$\boxed{\mathrm{e}^{t\triangle_0} u = O \mathrm{e}^{t\triangle} R u}$$

4. A jeśli $x(t,0) = 0$ zamienimy na $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(t,0) = 0$?
5. Zrób to samo, ale z rozszerzeniem parzystym! (Tak to ja lubię!)

Pomysł Williama Thomsona (Lorda Kelvina)

1. Rozszerz u do funkcji nieparzystej.
2. Zastosuj wzór znany dla całej osi.
3. Obetnij rozwiązanie do prawej półosi.

$$\boxed{\mathrm{e}^{t\triangle_0} u = O\mathrm{e}^{t\triangle} Ru}$$

4. A jeśli $x(t,0) = 0$ zamienimy na $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(t,0) = 0$?
5. Zrób to samo, ale z rozszerzeniem parzystym! (Tak to ja lubię!)
6. Dlaczego to działa?
7. Dlaczego takie a nie inne rozszerzenia?

Warunki brzegowe a rozszerzenia

A co jeśli warunek brzegowy jest bardziej skomplikowany, np.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(t,0) = ax(t,0)?$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{t\triangle_{w.b.}}u = O\mathrm{e}^{t\triangle}Ru}$$

Jak dobrać R, by przestrzeń rozszerzeń była niezmiennicza i do tego związana z zadanym, wyjściowym warunkiem brzegowym?

Warunki brzegowe a rozszerzenia

A co jeśli warunek brzegowy jest bardziej skomplikowany, np.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(t,0) = ax(t,0)?$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{t\triangle_{w.b.}} u = O\mathrm{e}^{t\triangle} R u}$$

Jak dobrać R, by przestrzeń rozszerzeń była niezmiennicza i do tego związana z zadanym, wyjściowym warunkiem brzegowym?

$$\boxed{\geqslant 20 \text{ lat}}$$

Jak z war. brzegowych otrzymać rozszerzenia?

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $D(A) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B}\}$

$$(\mathrm{e}^{tA}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

Jak z war. brzegowych otrzymać rozszerzenia?

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $D(A) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B}\}$

$$(\mathrm{e}^{tA}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B} = C[-\infty, 0]$, $A_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $a \geqslant 0$,

Jak z war. brzegowych otrzymać rozszerzenia?

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $D(A) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B}\}$

$$(\mathrm{e}^{tA}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B} = C[-\infty, 0]$, $A_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $a \geqslant 0$,

$$D(A_a) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B} \text{ i } u'(0) = a[u(-1) - u(0)]\}.$$

Jak z war. brzegowych otrzymać rozszerzenia?

$\mathbb{B} = C[-\infty,\infty]$, $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $D(A) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B}\}$

$$(\mathrm{e}^{tA}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B} = C[-\infty,0]$, $A_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $a \geqslant 0$,

$$D(A_a) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B} \text{ i } u'(0) = a[u(-1) - u(0)]\}.$$

$$[\mathrm{e}^{tA_a}u](\tau) = \widetilde{u}(\tau + t), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

Jak z war. brzegowych otrzymać rozszerzenia?

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $D(A) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B}\}$

$$(\mathrm{e}^{tA}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B} = C[-\infty, 0]$, $A_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}, a \geqslant 0$,

$$D(A_a) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B} \text{ i } u'(0) = a[u(-1) - u(0)]\}.$$

$$[\mathrm{e}^{tA_a}u](\tau) = \widetilde{u}(\tau + t), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\widetilde{u}(\cdot + t) \in D(A), t \geqslant 0}$$

Jak z war. brzegowych otrzymać rozszerzenia?

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $D(A) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B}\}$

$$(\mathrm{e}^{tA}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B} = C[-\infty, 0]$, $A_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $a \geqslant 0$,

$$D(A_a) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B} \text{ i } u'(0) = a[u(-1) - u(0)]\}.$$

$$[\mathrm{e}^{tA_a}u](\tau) = \widetilde{u}(\tau + t), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\widetilde{u}(\cdot + t) \in D(A), t \geqslant 0}$$

$$v(t) := \widetilde{u}(t), t \in [0,1] \quad \Longrightarrow \quad v'(t) = a[u(t-1) - v(t)]$$

Jak z war. brzegowych otrzymać rozszerzenia?

$\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$, $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $D(A) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B}\}$

$$(\mathrm{e}^{tA}u)(\tau) = u(t+\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{B} = C[-\infty, 0]$, $A_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $a \geqslant 0$,

$$D(A_a) = \{u \in \mathbb{B}; u' \in \mathbb{B} \text{ i } u'(0) = a[u(-1) - u(0)]\}.$$

$$[\mathrm{e}^{tA_a}u](\tau) = \tilde{u}(\tau + t), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\tilde{u}(\cdot + t) \in D(A), t \geqslant 0}$$

$$v(t) := \tilde{u}(t), t \in [0,1] \quad \Longrightarrow \quad v'(t) = a[u(t-1) - v(t)] \quad \Longrightarrow$$

$$v(t) = \mathrm{e}^{-at}u(0) - a\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}u(s-1)\,\mathrm{d}s, t \in [0,1].$$

Jedyne możliwe zakończenie

Zapraszam na

wykład p. dra Gregosiewicza

Dziękuję