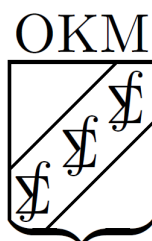


# LXI Szkoła Matematyki Poglądowej

## Matematyczne zmiany

OŚRODEK KULTURY MATEMATYCZNEJ



20-24 LUTEGO 2020, WOLA DUCKA



Warsaw Center  
of Mathematics  
and Computer Science



Wydział Matematyki  
i Nauk Informatycznych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

	czwartek, 20 lutego	NIEZMIENNIKI piątek, 21 lutego prowadzący: ŁUKASZ BOŻYK	POWAŻNE SKUTKI MAŁYCH ZMIAN sobota, 22 lutego prowadzący: KAMILA ŁYCZEK	UKŁADY DYNAMICZNE niedziela, 23 lutego prowadzący: DOMINIK KWIETNIAK	ZMIEŃ PODEJŚCIE! poniedziałek, 24 lutego prowadzący: GRZEGORZ KOSIOROWSKI
8:15–9:00		śniadanie	śniadanie		śniadanie
9:00–9:45		MICHAŁ SKRZYPCZAK <i>Odczyt Laureata Medalu Filca♥ LX Szkoły</i>	PAWEŁ TRACZYK <i>Teoria węzłów – młoda klasyka, zmiany, zmiany, zmiany...</i>	śniadanie	ANDRZEJ KOMISARSKI <i>Nieoczekiwane konsekwencje zmiany czasu</i>
10:00–10:45		BARTŁOMIJ BZDĘGA <i>(Pól)niezmienniki w zadaniach olimpijskich</i>	ADAM BOBROWSKI <i>Czy to tylko sztuczka, czy to już metoda?</i>	JAKUB BYSZEWSKI <i>O podziałach figur geometrycznych na kawałki</i>	PRZEMYSŁAW WOJTASZCZYK <i>Modele matematyczne – czy lepsze są lepsze?</i>
10:45–11:15		przerwa kawowa	przerwa kawowa	przerwa kawowa	przerwa kawowa
11:15–12:00		MICHAŁ PILIPCZUK <i>O ciągu <math>n^n</math></i>	ADAM DZEDZEJ <i>Maszyna Zeemana, czyli „wiersze oprawcy”</i>	KAROL GRYSZKA <i>Liczby normalne i ciąg Champnowne’a</i>	PIOTR KRZYŻANOWSKI <i>Przyspieszenie</i>
12:15–13:00		BARBARA ROSZKOWSKA-LECH <i>Armia Conwaya czyli z Fibonaccim na pustynię</i>	SZYMON CHARZYŃSKI <i>Transformacje cechowania</i>	MATEUSZ ŁĄCKI <i>Kwantowe układy dynamiczne okresowe w czasie</i>	ADAM GREGOSIEWICZ <i>Czułość w dzisiejszych czasach to już nic szczególnego</i>
13:15–15:00		obiad	obiad <i>(przerwa popołudniowa)</i>	obiad	obiad <i>Ogłoszenie Laureata Medalu Filca♥ LXI Szkoły</i>
15:15–16:00		<i>(przerwa popołudniowa)</i>	MATEUSZ KRUKOWSKI <i>Polski kryzys demograficzny</i>	<i>(przerwa popołudniowa)</i>	
16:15–17:00		ŁUKASZ BOŻYK <i>Teoria GeoGrafów</i>	WOJCIECH CZERWIŃSKI <i>Spacer po kracie</i>	MARCEL MROCZEK <i>Papier, nożyce, kamień, jaszczurka</i>	
17:15–18:00		MICHAŁ WOJCIECHOWSKI <i>Czasem to co niezmienne bywa nieźle zakręcone</i>	KRZYSZTOF SZALAPIŃSKI <i>Zrób sobie teleport</i>	MARTHA UBIK <i>Prosta jest prosta. A odcinek i okrąg jeszcze łatwiejsze...</i>	
18:15–19:00	kolacja	kolacja		kolacja	
19:30–∞	MAŁGORZATA MIKOŁAJCZYK <i>Turniej „I Know Maths”♣</i>		BAL	RENATA JURASIŃSKA <i>Konkurs na Wzorowego Słuchacza♠</i>	

## ♥ MEDAL FILCA

Tradycją Szkół Matematyki Poglądowej jest nagradzanie najlepszego odczytu każdej szkoły Medalem Filca. Głosowanie odbywa się ostatniego dnia. Każdy uczestnik Szkoły może oddać głosy na jego zdaniem najlepsze (cokolwiek to dla niego znaczy) wykłady.

Zasady głosowania są następujące:

- Każdy ma co najwyżej tyle głosów, na ilu referatach był obecny.
- Na jeden wykład jedna osoba może oddać co najwyżej 10 głosów.
- Liczba wykładów, na które się głosuje, jest ograniczona z góry tylko przez posiadaną liczbę głosów.
- Głosowanie jest anonimowe.
- Głosy należy oddawać najpóźniej w poniedziałek do obiadu.
- Wykładowca, który otrzyma największą liczbę głosów, zostaje Medalistą Filca.
- Podczas ogłaszania wyników podawane są trzy najlepiej ocenione wykłady.
- Uroczyste wręczenie medalu oraz odczyt Laureata będą mieć miejsce podczas następnej Szkoły.

LISTA DOTYCHCZASOWYCH MEDALISTÓW FILCA ORAZ WZOROWYCH SŁUCHACZY:

[smp.uph.edu.pl/szkoly/medale](http://smp.uph.edu.pl/szkoly/medale)

## ♠ KONKURS NA WZOROWEGO SŁUCHACZA

W zawodach może wziąć udział każdy uczestnik Szkoły (wykładowca, słuchacz), odpowiadając na pytania i łamigłówki związane z najróżniejszymi detalami dotyczącymi aktualnej Szkoły. Wzorowym słuchaczem można zostać co najwyżej trzykrotnie.

## ♣ TURNIEJ „I KNOW MATHS”

Turniej drużynowy wzorowany na popularnej grze towarzyskiej iKnow. Gra zapewni maksimum emocji. Sprawdzi, czego jeszcze nie wiesz o matematyce i jej peryferiach, a co z pewnością chciałbyś wiedzieć.

## (Pół)niezmienniki w zadaniach olimpijskich

Bartłomiej Bzdega

Półniezmienniki są bliskimi krewniakami niezmienników. Są to takie własności przekształcanych obiektów, które w odróżnieniu od niezmienników mogą (a czasem nawet muszą) się zmieniać, jednak zmiana ta jest w pewien sposób kontrolowana.

W dowodzeniu twierdzeń rola półniezmienników na ogół jest zabraniająca lub wymuszająca. Pierwsza z nich, podobnie jak w przypadku niezmienników, jest użyteczna w dowodzeniu, że z pewnego obiektu  $A$  za pomocą danych przekształceń nie możemy otrzymać obiektu  $B$ . Druga – w dowodzeniu, że otrzymanie obiektu  $B$  jest nieuniknione.

Zaprezentuję obie te metody na przykładzie kilku zadań olimpijskich.

### O ciągu $n^n$

Michał Pilipczuk

Opowiem o ciągach *poly-rekurencyjnych*, czyli definiowalnych za pomocą układów zależności rekurencyjnych opisanych wielomianami. Skupimy się na pytaniu, jak odróżniać ciągi poly-rekurencyjne od takich, których nie da się opisać w taki sposób. W szczególności naszkicujemy dowód, że ciąg  $a_n = n^n$  nie jest poly-rekurencyjny.

### Armia Conwaya, czyli z Fibonaccim na pustynię

Barbara Roszkowska-Lech

Każdy zetknął się prawdopodobnie z jednoosobowymi grami planszowymi, w których pionki przesuwa się według wcześniej ustalonych zasad. Takie łamigłówki są często inspiracją dla pewnych fascynujących, czysto matematycznych problemów.

Omówimy grę, znaną pod nazwą *Conway's Soldiers*, rozgrywaną na nieskończonej planszy przedzielonej poziomą linią. Gra polega na wprowadzeniu pionków (żołnierzy) jak najdalej na pustynię znajdującą się po drugiej stronie linii. Ponadto pokażemy kilka różnych wariantów tej łamigłówki.

## Teoria GeoGrafów

Łukasz Bożyk

Odbiór odczytu o niezmiennikach niezmiennie pojawiających się na odczytach o niezmiennikach może zmieniać się na gorsze, jeśli sposób ich przedstawienia się nie zmienia. Tym razem zmienimy nieco język w opowieści dotyczącej klasycznych wyników o niezmiennikach w grafach planarnych.

---

## Czasem to co niezmiennie bywa nieźle zakręcone

Michał Wojciechowski

Niezbędnym punktem odniesienia dla zmian są rzeczy, które pozostają niezmiennie. Wśród atrakcyjnych matematycznie zagadnień, gdzie jest to szczególnie dobrze widoczne znajdują się kombinatoryczne problemy pokryciowe. Setki tricków wydobywających na jaw niezmienniki opierają się na tzw. kolorowaniu. Ale zdarzają się problemy odporne na takie kolorowe metody. Pokażę pochodzący od Conwaya przykład wyjątkowej urody bardzo wyrafinowanego niezmiennika, który posłuży nam do pokonania zadania „kolorowo beznadziejnego”.

---

## Teoria węzłów – młoda klasyka, zmiany, zmiany, zmiany...

Paweł Traczyk

Prawdopodobnie nie byłoby trudno znaleźć specjalistów, którzy teorię węzłów wywiedliby wprost od, co najmniej, starożytnych Greków. Ale jako teoria na serio uprawiana przez matematyków jest ona raczej dosyć młoda, ma może ze 150 lat.

W tym odczycie chciałbym przedstawić rewolucję kombinatoryczną w teorii węzłów i kontrrewolucję kategorię, czyli przejście od metod teorii homotopii dopełnienia węzła do czysto kombinatorycznego podejścia, którego najpełniejszym wyrazem jest wielomian Jonesa. Następnie z powrotem do metod homologicznych tym razem, czyli do homologii Khovanova i homologii Heegaarda-Floera.

---

## Czy to tylko sztuczka, czy to już metoda?

Adam Bobrowski

Opowiem o trzech matematycznych pomysłach: pierwszy pochodzi od mojego matematycznego dziadka, Adama Bieleckiego, drugi od matematycznego ojca, Jana Kisińskiego, a trzeci jakby ode mnie.

Niezależnie od głównego tematu, mają być one pretekstem do refleksji nad tym, jak analityczne myślenie globalne nauczycieli wpływa na uczniów i rozwój ich talentu. Dla mnie zetknięcie z ideami mych matematycznych antenatów było przede wszystkim przeżyciem estetycznym, ale i nieprzemijającą inspiracją, pożywką dla raczkujących w mym mózgu analitycznych bakterii. Czy zatem istnieje zjawisko intelektualnej chemotaksji?

---

## Maszyna Zeemana, czyli „wiersze oprawcy”

Adam Dzedzej

Zademonstrowane zostanie tytułowe urządzenie, które demonstruje jak niewielkie (ciągłe) zmiany parametrów powodują gwałtowne zmiany położenia układu i zmiana ta jest o tyle nieodwracalna, że powrót do poprzedniej wartości parametrów nie przywraca układu do stanu pierwotnego. Potem opowiem „standardową” historię o katastrofie zwanej ostrzem i innych najpopularniejszych osobliwościach. Powstała cała masa przykładów „zastosowań”, czyli odnajdowania tego zjawiska w różnych modelach. Nie jestem ekspertem od takich modeli, więc ograniczę się do listy przykładów.

Za to będę chciał razem ze słuchaczami zastanowić się nad tą właśnie powszechnością występowania zjawiska. Co oznacza, że pewnych obiektów jest „dużo”, gdy moc nam nie pomoże („bo wszystkiego jest ta sama nieskończoność”). Mam nadzieję, że nie wyjdę w teren, który już trochę zarósł w mojej pamięci rozważając strukturalną stabilność.

---

## Transformacje cechowania

Szymon Charzyński

Czasami rozważanie zmian, które z pozoru nic nie zmieniają okazuje się mieć bardzo daleko idące skutki.

Fizyczne pola, takie jak np. klasyczne pole elektromagnetyczne można opisywać za pomocą potencjałów. W elektrostatyce pole elektryczne może być opisane jako gradient funkcji skalarnej, a w magnetostatyce pole magnetyczne można zapisać jako rotację pola wektorowego (tzw. potencjału wektorowego). Taki opis nie jest jednoznaczny – do potencjału skalarnego można dodać dowolną stałą, a do potencjału wektorowego można dodać gradient dowolnej funkcji, a ze zmienionych tak potencjałów otrzymamy dokładnie te same pola, co z potencjałów pierwotnych. Takie transformacje, które zmieniają sposób w jaki opisujemy stan układu fizycznego, ale nie zmieniają samego stanu układu, nazywamy transformacjami cechowania. Rozważanie tych z pozoru nieciekawych transformacji, które jak się wydaje, niczego nie zmieniają, doprowadziło do powstania jednej z fundamentalnych teorii fizycznych. Teoria pól z cechowaniem jest podstawowym narzędziem do opisywania między innymi cząstek elementarnych i oddziaływań między nimi. Jest też interesującym przykładem zastosowań różnych narzędzi matematycznych w fizyce, takich jak: teoria grup i reprezentacji, teoria wiązek włóknistych, geometria różniczkowej i topologia. W moim referacie omówię kilka historycznych przykładów i aktualnych zastosowań teorii pól z cechowaniem.

## Polski kryzys demograficzny

Mateusz Krukowski

Parafrazując słowa Marksa i Engelsa: *widmo krąży po Europie – widmo kryzysu demograficznego*. Do tej tezy postaram się przekonać uczestników referatu, a swoją opowieść rozpocznę w zamierzczłej przeszłości, czyli czasów kiedy alianci wracali do domów z frontu II wojny światowej. Następnie przejdę do tematu rewolucji seksualnej lat 60. i 70. argumentując, że zmiany społeczno-obyczajowe są bardzo ważnym komponentem zapaści demograficznej.

W prezentacji nie zabraknie również kilku slajdów poświęconych programowi zachęcającemu do prokreacji. Referat zakończy się krótkim konkursem, więc gorąco zachęcam do zabrania ze sobą telefonów, smartfonów, tabletów i innych urządzeń z dostępem do internetu.

## Spacer po kracie

Wojciech Czerwiński

Będziemy rozważać ścieżki w  $d$ -wymiarowej kracie  $\mathbb{Z}^d$ , w których każdy krok jest przesunięciem się o jeden ze skończenie wielu danych wektorów. Rozważymy kilka wariantów tego pytania.

Mimo prostego sformułowania tego typu problemy mają bardzo ciekawą i nietrywialną strukturę, która wciąż nie jest zrozumiana. Jak zobaczymy problem nieraz staje się o wiele ciekawszy, gdy zmienimy pewien, wydawałoby się detal, w definicji.

## Zrób sobie teleport

Krzysztof Szalapiński

Chcesz wiedzieć jak samemu zaprogramować i uruchomić swój program na komputerze kwantowym? Jeżeli Twoja odpowiedź brzmi „Tak i Nie” to znaczy, że jesteś gotów na moją prezentację.

---

## O podziałach figur geometrycznych na kawałki

Jakub Byszewski

Jednym z klasycznych zagadnień dotyczących podziału figur geometrycznych na kawałki jest trzeci problem Hilberta. Jego rozwiązanie mówi o istnieniu czworościanów o równych wysokościach i przystających podstawach, których nie można złożyć z kilku kawałków będących przystającymi wielościanami. Dehn podał rozwiązanie tego problemu konstruując niezmiennik takiego rozkładu. W swoim referacie omówię utrzymane w podobnym duchu wyniki z lat 90-tych i 2000-ych o podziale figur geometrycznych na podobne kawałki (trójkąty, prostokąty, itd.) pochodzące od Laczkovicha, Szekeresa, Freilinga, Szegedy’ego i innych.

---



## Liczby normalne i ciąg Champernowe'a

Karol Gryszka

Wyberzemy dowolną liczbę rzeczywistą, niech to będzie  $\sqrt{2}$ . Rozważmy następnie jej rozwinięcie dziesiętne, to jest

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688724209698078569671875376948073176\dots$$

i zapytajmy o częstotliwość występowania na przykład cyfry 0. W powyższym przykładzie jest ich 6 na 57, a więc jest to proporcja bliska 1 : 10. Wszystkich cyfr jest 10, więc proporcja jest bliska takiej, jak w losowej liczbie o 57 cyfrach. Czy to przypadek? Co byśmy otrzymali, gdybyśmy rozważyli nie 57, a milion, bilion, googol cyfr?

W teorii liczb wyróżniane są tak zwane *liczby normalne*, a więc takie liczby, w których, kolokwialnie mówiąc, częstość występowania poszczególnych cyfr oraz dłuższych ciągów cyfr w rozwinięciu dziesiętnym jest zgodna z tym, ile oczekivalibyśmy od losowej liczby. W szczególności, cyfra 0 występuje średnio raz na 10 cyfr.

Liczby normalne to określenie specjalnej klasy liczb i (jednocześnie) ciągów, do których zalicza się ciąg Champernowe'a – zbudowany ze wszystkich możliwych liczb. Taki ciąg można zdefiniować nie tylko w systemie dziesiętnym, ale również w systemach o innych podstawach.

Normalność liczby można przetłumaczyć na język układów dynamicznych przez utożsamienie liczby z orbitą punktu, który jest ciągiem cyfr z rozwinięcia dziesiętnego. Okazuje się wtedy, że taka orbita wykazuje pewną istotną cechę – określa punkt tranzytowy. Ponadto, z punktu widzenia teorii ergodycznej (układów dynamicznych, w których dodatkowo rozważa się miarę –s funkcję „mierzącą” wielkość zbioru) liczby normalne okazują się być punktami generycznymi dla miary Lebesgue'a (miary, która w dużym uproszczeniu podaje długość odcinka). Ten związek pozwala na powiązanie faktów teoriolichbowych z faktami znanymi z zupełnie innej teorii. Co więcej, korzystając z tej drugiej szybko możemy się przekonać, że liczb normalnych jest bardzo dużo.

Pisać można bez końca, na prezentacji zaś pokażemy te opisane powyżej oraz inne ciekawe własności liczb normalnych i ciągu Champernowe'a.

## Kwantowe układy dynamiczne okresowe w czasie

Mateusz Łącki

Mechanika kwantowa, podobnie jak mechanika klasyczna określa ruch obiektów, tym samym definiuje układ dynamiczny. Odchodzi się jednak od pojęcia punktu materialnego, na rzecz zespolonego „rozkładu prawdopodobieństwa”.

Wykład zaprezentuje podobieństwa i różnice między tymi dwoma teoriami fizycznymi w kontekście definicji i podstawowych własności układów dynamicznych w obu przypadkach.

Kulminacją wykładu jest przedstawienie układów okresowych w czasie i przedstawienie pewnych problemów otwartych z tym związanych, w kontekście układów wielociałowych.

## Papier, nożyce, kamień, jaszczurka

Marcel Mroczek

Choć na pierwszy rzut oka tego nie widać, wiele zmian zachodzącym w świecie zwierząt można opisać przy pomocy matematyki. Możemy użyć narzędzi pochodzących z teorii układów dynamicznych i ewolucyjnej teorii gier, aby opisywać i przewidywać zachowania zwierząt, zarówno analizując model drapieżnik-ofiara, lub też analizując walki samców o samice.

---

## Prosta jest prosta. A odcinek i okrąg jeszcze łatwiejsze...

Martha Ubik

W czasie referatu odpowiemy na kilka zagadek i użyjemy ich jako pretekstu do przedstawienia pewnych zagadnień układów dynamicznych zadanych na przestrzeniach jednowymiarowych.

---

## Nieoczekiwane konsekwencje zmiany czasu

Andrzej KomisarSKI

Opowiem o modelu urnowym Pólya'i, o którym usłyszałem na Szkole rok temu. Ale wszystko w tej opowieści pozmieniam. Zmienię nawet czas. Oczywiście nie zawaham się też, by pozmienić niezmienniki!

A tak w ogóle, to będzie trochę o rachunku prawdopodobieństwa.

---

## Modele matematyczne – czy lepsze są lepsze?

Przemysław Wojtaszczyk

Odczyt będzie się składał z dwóch części. Pierwsza filozoficzna: Komputery są coraz mocniejsze, a więc się „zatykają” – trzeba im pomóc.

Druga to konkretny opis pewnej zwariowanej metody liczenia średniej temperatury na Ziemi.

---

## Czułość w dzisiejszych czasach to już nic szczególnego

Adam Gregosiewicz

Opowiem o rozstrzygniętej niedawno hipotezie z pogranicza teorii grafów i informatyki teoretycznej, a dotyczącej tak zwanej *czułości funkcji boolowskich*.

---