Kilka uwag o przedziałach ufności

Wojciech Zieliński

Katedra Ekonometrii i Statystyki, SGGW
http://wojtek.zielinski.statystyka.info

LX Szkoła Matematyki Poglądowej
26 sierpnia 2019

Statystyka

Statystyka


ja
WAKACJE
STATYSTYKA
MINISTER ZDROWIA OSTRZEGA PRZED
kwejk.pl

Kilka myśli o statystyce

Kilka myśli o statystyce

Popularne

Kłamstwo, wierutne kłamstwo, statystyka

Kilka myśli o statystyce

Popularne

Kłamstwo, wierutne kłamstwo, statystyka

Charles H. Grosvenor

Liczby nie kłamią, ale kłamcy liczą

Kilka myśli o statystyce

C. R. Rao

Statystyka jest bardziej sposobem myślenia lub wnioskowania niż pęczkiem recept na młócenie danych w celu odsłonięcia odpowiedzi

Kilka myśli o statystyce

C. R. Rao

Statystyka jest bardziej sposobem myślenia lub wnioskowania niż pęczkiem recept na młócenie danych w celu odsłonięcia odpowiedzi

Vic Barnett

... statystyka jest nauką o tym, jak wykorzystywać informacje do analizy i wytyczania kierunków działania w warunkach niepewności

Początki

Początki

WALENTY OSTASIEWICZ

ROZWÓJ MYŚLI STATYSTYCZNEJ W POLSCE W XIX WIEKU

1. RODOWÓD STATYSTYKI

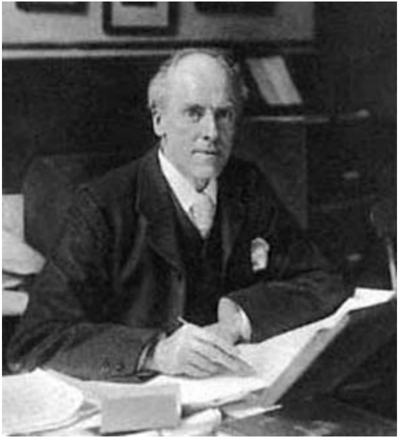
To co dzisiaj nazywamy statystyką ma dość skomplikowaną historię. Mimo iż oficjalna, udokumentowana na piśmie, historia dyscypliny o tej nazwie jest niezbyt długa, to jednak jej korzenie sięgają antycznej Grecji. Statystyka nowożytna pojawia się wraz z rozwojem nauki nowożytnej. Data narodzin nauki nowożytnej jest dokładnie znana. Jest to wigilia św. Marcina 10 listopada 1619 roku. Wówczas to Kartezjusz w objawieniu poznał podstawy zdumiewającej nauki (*mirabilis scientiae fundamenta*). Rok później, czyli w 1620 F. Bacon publikuje *Novum Organum*, sam autor jak i jego dzieło miały duży wpływ na rozwój statystyki jako nauki.

Początki

Początki

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Karl Pearson (1857-1936)

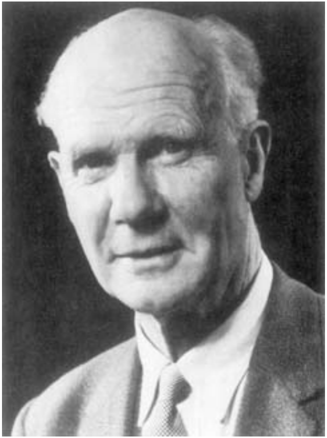


William Sealey Gosset (1876-1937)

William Sealey Gosset (1876-1937) = Student

Sir Ronald Aylmer Fisher FRS (1890–1962)

Egon Sharpe Pearson (1895-1980)



Jerzy Spława–Neyman (1894-1981)

JERZY NEYMAN
DOCENT STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

Truizm

Podstawowe narzędzia wnioskowania statystycznego

- estymacja przedziałowa (przedziały ufności)
- weryfikacja hipotez statystycznych (testy statystyczne)

Model statystyczny

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Model statystyczny - przykład

Model dwumianowy

$$(\{0, 1, \ldots, n\}, \{Bin\,(n, \theta)\,,\ \theta \in [0, 1]\})$$

$$P_\theta\{\xi = k\} = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

Model statystyczny - przykład

Model Poissona

$$(\{0, 1, \ldots\}, \{Po(\lambda),\ \lambda > 0\})$$

$$P_\lambda\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \ldots$$

Model statystyczny - przykład

Model wykładniczy

$$(\mathbb{R}_+, \{Exp\,(\lambda)\,,\ \lambda > 0\})$$

$$f_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\frac{t}{\lambda}\right\},\ t \in \mathbb{R}^+$$

Model statystyczny - przykład

Model gaussowski

$$\left(\mathbb{R}, \left\{N\left(\mu, \sigma^2\right),\ \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

$$f_{\mu,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},\ t \in \mathbb{R}$$

Model statystyczny

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Model statystyczny

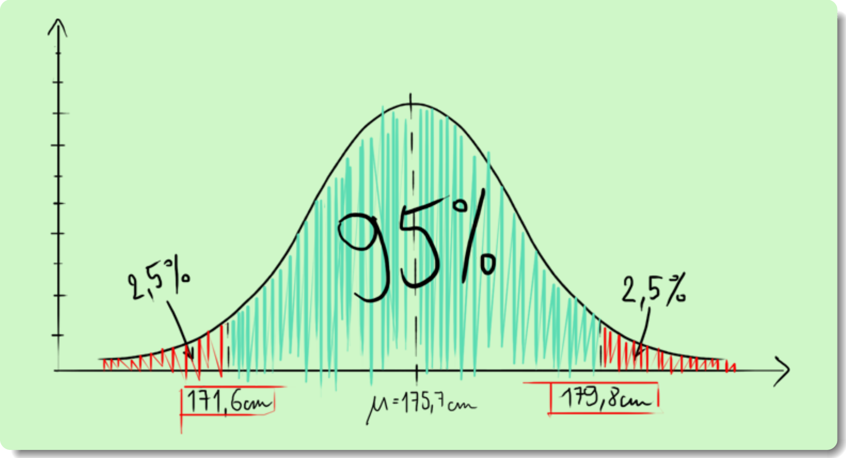
Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Cel wnioskowania statystycznego

na podstawie próby z modelu statystycznego „odgadnąć” rozkład rządzący modelowanym zjawiskiem

Przedział ufności



Przedział ufności

ON THE TWO DIFFERENT ASPECTS OF THE REPRESENTATIVE METHOD: THE METHOD OF STRATIFIED SAMPLING AND THE METHOD OF PURPOSIVE SELECTION.

By JERZY NEYMAN

(Biometric Laboratory, Nencki Institute, Soc. Sci. Lit. Varsoviensis, Warsaw).

[Read before the Royal Statistical Society, June 19th, 1934, the PRESIDENT, the RT. HON. LORD MESTON of Agra and Dunottar, K.C.S.I., LL.D., in the Chair.]

Journal of the Royal Statistical Society
Vol. 97, No. 4 (1934), pp. 558–625

Przedział ufności

The form of this solution consists in determining certain intervals, which I propose to call the confidence intervals (see Note I), in which we may assume are contained the values of the estimated characters of the population, the probability of an error in a statement of this sort being equal to or less than $1 - \varepsilon$, where ε is any number $0 < \varepsilon < 1$, chosen in advance. The number ε I call the confidence coefficient. It is important to note that the methods of estimating, particularly in the case of large samples, resulting from the work of Fisher, are often precisely the same as those which are already in common use. Thus the new solution of the problems of estimation consists mainly in a rigorous justification of what has been generally considered correct more or less on intuitive grounds.†

Przedział ufności

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Przedział ufności

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Definicja przedziału ufności

Przedział $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ taki, że

$$P_\theta\{\theta \in (\underline{\theta}(X),\ \overline{\theta}(X))\} \geq \gamma,\ \forall \theta \in \Theta$$

nazywamy **przedziałem ufności** na **poziomie ufności** γ.

Przedział ufności

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Definicja przedziału ufności

Przedział $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ taki, że

$$P_\theta\{(\underline{\theta}(X),\ \overline{\theta}(X)) \ni \theta\} \geq \gamma,\ \forall \theta \in \Theta$$

nazywamy **przedziałem ufności** na **poziomie ufności** γ.

Przedział ufności

Ważna uwaga

Przedziałów ufności na zadanym poziomie ufności istnieje bardzo dużo!

Przedział ufności

Ważna uwaga

Przedziałów ufności na zadanym poziomie ufności istnieje bardzo dużo!

W wielu modelach statystycznych wręcz nieskończenie wiele!

Przedział ufności - przykład

$\big(R, \{N(\mu,\sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\}\big)$, $\sigma^2 = ?$

Zadanie:
na podstawie próby $X_1, \ldots, X_n$ zbudować przedział ufności dla wariancji σ^2 na poziomie ufności γ

Przedział ufności - przykład

$\left(R, \left\{N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\right\}\right)$, $\sigma^2 =?$

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ oraz niech

$$\mathcal{S}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Przedział ufności - przykład

$\left(R, \left\{N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+\right\}\right)$, $\sigma^2 =?$

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ oraz niech

$$\mathcal{S}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Jak wiadomo, zmienna losowa

$$\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}$$

ma rozkład chi-kwadrat z $n-1$ stopniami swobody.

Przedział ufności

Rozkład chi-kwadrat

This distribution was first described by the German statistician Friedrich Robert Helmert in papers of 1875–6,[21][22] where he computed the sampling distribution of the sample variance of a normal population. Thus in German this was traditionally known as the *Helmert'sche* ("Helmertian") or "Helmert distribution".

The distribution was independently rediscovered by the English mathematician Karl Pearson in the context of goodness of fit, for which he developed his Pearson's chi-square test, published in 1900, with computed table of values published in (Elderton 1902), collected in (Pearson 1914, pp. xxxi–xxxiii, 26–28, Table XII). The name "chi-square" ultimately derives from Pearson's shorthand for the exponent in a multivariate normal distribution with the Greek letter Chi, writing $-½\chi^2$ for what would appear in modern notation as $-½\mathbf{x}^T\Sigma^{-1}\mathbf{x}$ (Σ being the covariance matrix).[23] The idea of a family of "chi-square distributions", however, is not due to Pearson but arose as a further development due to Fisher in the 1920s.[21]

Przedział ufności - przykład

Poziom ufności γ

Jakiekolwiek dwie liczby t_1 i t_2 takie, że

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{t_1 \leq \frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \leq t_2\right\} = \gamma$$

dają przedział ufności dla wariancji na poziomie ufności γ:

$$\left(\frac{\mathcal{S}^2}{t_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\mathcal{S}^2}{t_1}\right)$$

Przedział ufności - przykład

Poziom ufności γ

Jakiekolwiek dwie liczby t_1 i t_2 takie, że

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{t_1 \leq \frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \leq t_2\right\} = \gamma$$

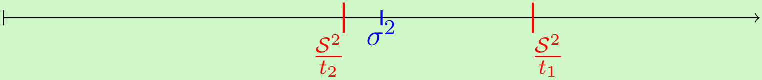
dają przedział ufności dla wariancji na poziomie ufności γ:

$$\left(\frac{\mathcal{S}^2}{t_2};\ \frac{\mathcal{S}^2}{t_1}\right)$$

Przedział ufności - przykład

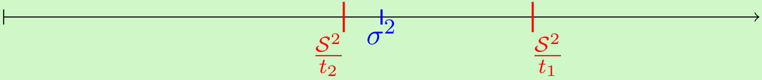
Przedział ufności - przykład

Się udało!

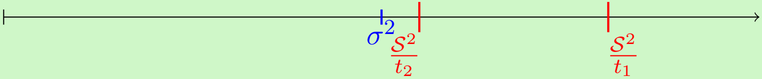


Przedział ufności - przykład

Się udało!

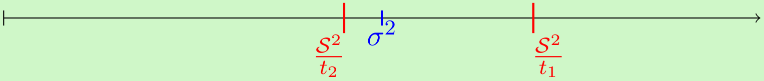


Przeszacowanie

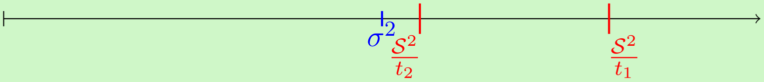


Przedział ufności - przykład

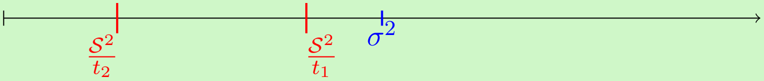
Się udało!



Przeszacowanie



Niedoszacowanie

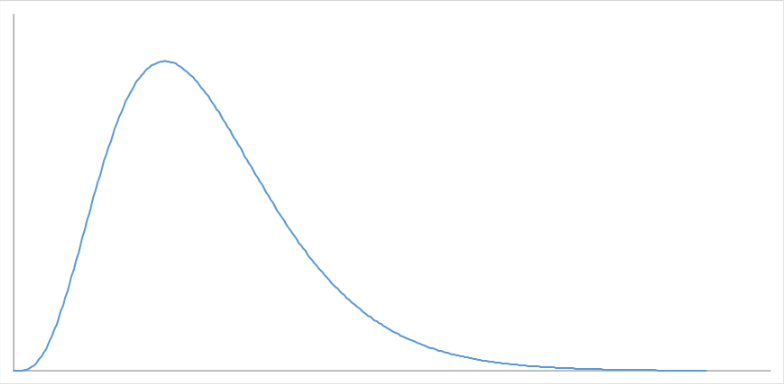


Przedział ufności - przykład

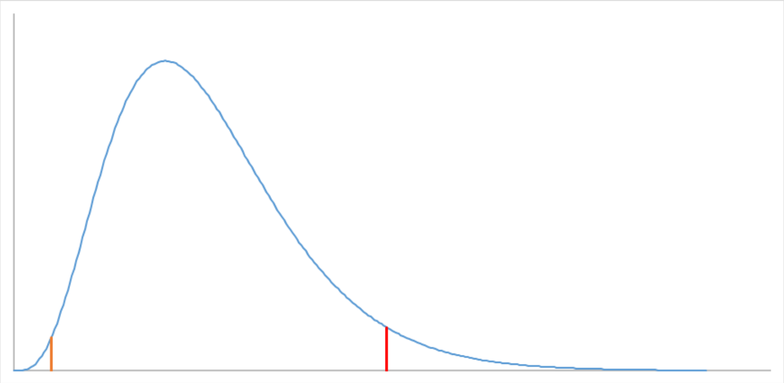
Ważne pytanie

JAK WYBRAĆ LICZBY t_1 ORAZ t_2???

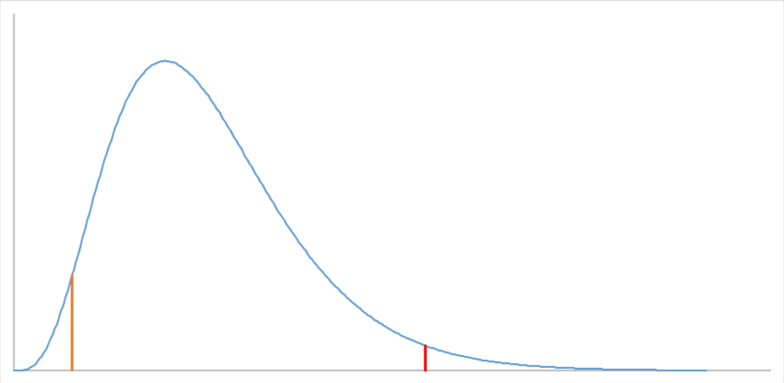
Przedział ufności - przykład



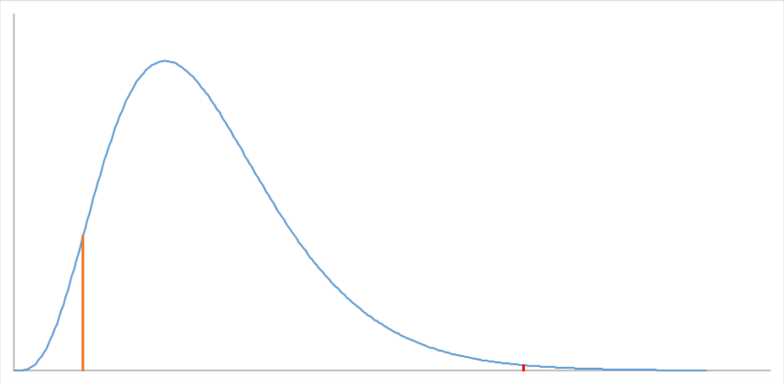
Przedział ufności - przykład



Przedział ufności - przykład



Przedział ufności - przykład



Przedział ufności - przykład

Jak łatwo widać...

Przedział ufności - przykład

Jak łatwo widać...

istnieje **nieskończenie** wiele przedziałów ufności dla wariancji.

Przedział ufności - przykład

Jak łatwo widać...

istnieje **nieskończenie** wiele przedziałów ufności dla wariancji.

Przedział ufności - przykład

W takim razie...

Przedział ufności - przykład

W takim razie...

który wybrać?

Przedział ufności - przykład

W takim razie...

który wybrać?

Przedział ufności - przykład

W takim razie...

który wybrać?

A więc...

Przedział ufności - przykład

W takim razie...

który wybrać?

A więc...

potrzebne są **jakieś** dodatkowe kryteria!

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1

Najbardziej popularne:

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1

Najbardziej popularne:
równe ryzyka przeszacowania i niedoszacowania.

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1

Najbardziej popularne:
równe ryzyka przeszacowania i niedoszacowania.

Wybór liczb t_1 i t_2 takich, że

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \leq t_1\right\} = \frac{1-\gamma}{2} \text{ oraz } P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \geq t_2\right\} = \frac{1-\gamma}{2}$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1

Najbardziej popularne:
równe ryzyka przeszacowania i niedoszacowania.

Wybór liczb t_1 i t_2 takich, że

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \leq t_1\right\} = \frac{1-\gamma}{2} \text{ oraz } P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \geq t_2\right\} = \frac{1-\gamma}{2}$$

Wówczas...

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{t_2} \geq \sigma^2\right\} = \frac{1-\gamma}{2} \text{ oraz } P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{t_1} \leq \sigma^2\right\} = \frac{1-\gamma}{2}$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1

Zwyczajowe oznaczenia:

$$t_1 = \chi^2_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}} \text{ oraz } t_2 = \chi^2_{n-1,\frac{1-\gamma}{2}}$$

Przedział ufności na poziomie ufności γ:

$$\left(\frac{\mathcal{S}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\gamma}{2}}};\ \frac{\mathcal{S}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}}} \right)$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1

Zwyczajowe oznaczenia:

$$t_1 = \chi^2_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}} \text{ oraz } t_2 = \chi^2_{n-1,\frac{1-\gamma}{2}}$$

Przedział ufności na poziomie ufności γ:

$$\left(\frac{\mathcal{S}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\gamma}{2}}};\ \frac{\mathcal{S}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}}} \right)$$

Wartość krytyczna $\chi^2_{u,\varepsilon}$

$$P\left\{\chi^2_u \geq \chi^2_{u,\varepsilon}\right\} = \varepsilon$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1

Jeżeli poziom ufności klasycznie oznaczymy jako $1-\alpha$, to otrzymujemy książkowy zapis:

$$\left(\frac{\mathcal{S}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}};\ \frac{\mathcal{S}^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1a

Nierówne ryzyka przeszacowania i niedoszacowania.

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1a

Nierówne ryzyka przeszacowania i niedoszacowania.

Dla danych γ_1 i γ_2 $(\gamma_1 + \gamma_2 = 1 - \gamma)$ wybieramy liczby t_1 i t_2 tak, że

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \leq t_1\right\} = \gamma_1 \text{ oraz } P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \geq t_2\right\} = \gamma_2$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1a

Nierówne ryzyka przeszacowania i niedoszacowania.

Dla danych γ_1 i γ_2 $(\gamma_1+\gamma_2=1-\gamma)$ wybieramy liczby t_1 i t_2 tak, że

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\leq t_1\right\}=\gamma_1 \text{ oraz } P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\geq t_2\right\}=\gamma_2$$

Wówczas...

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{t_2}\geq \sigma^2\right\}=\gamma_2 \text{ oraz } P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{t_1}\leq \sigma^2\right\}=\gamma_1$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #1a

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{t_2} \geq \sigma^2\right\} = \gamma_2 \text{ oraz } P_{\mu,\sigma^2}\left\{\frac{\mathcal{S}^2}{t_1} \leq \sigma^2\right\} = \gamma_1$$

Liczba γ_1 jest prawdopodobieństwem **niedoszacowania.**

Liczba γ_2 jest prawdopodobieństwem **przeszacowania.**

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #2

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #2

Jaka jest minimalna wartość wariancji?

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #2

Jaka jest minimalna wartość wariancji?

Nie chcemy niedoszacować!

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #2

Jaka jest minimalna wartość wariancji?

Nie chcemy niedoszacować!

Przyjmując $\gamma_1 = 0$ otrzymujemy $t_1 = 0$.

Lewostronny przedział ufności ma postać

$$\left(\frac{\mathcal{S}^2}{t_2};\ +\infty\right)$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #3

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #3

Jaka jest maksymalna wartość wariancji?

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #3

Jaka jest maksymalna wartość wariancji?

Nie chcemy przeszacować!

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #3

Jaka jest maksymalna wartość wariancji?

Nie chcemy przeszacować!

Przyjmując $\gamma_2 = 0$ otrzymujemy $t_2 = +\infty$.

Prawostronny przedział ufności ma postać

$$\left(0;\ \frac{\mathcal{S}^2}{t_1}\right)$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4

Najkrótszy

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4

Najkrótszy

Wybór takich liczb t_1 i t_2, że

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{t_1 \leq \frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \leq t_2\right\} = \gamma$$

oraz długość przedziału jest najmniejsza.

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4

Najkrótszy

Wybór takich liczb t_1 i t_2, że

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{t_1 \leq \frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2} \leq t_2\right\} = \gamma$$

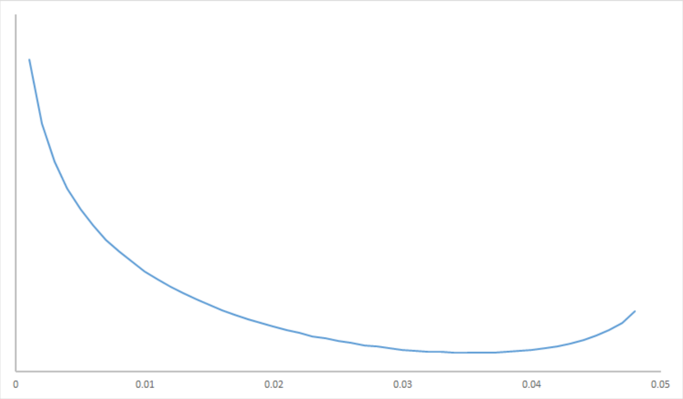
oraz długość przedziału jest najmniejsza.

To znaczy...

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \min!$$

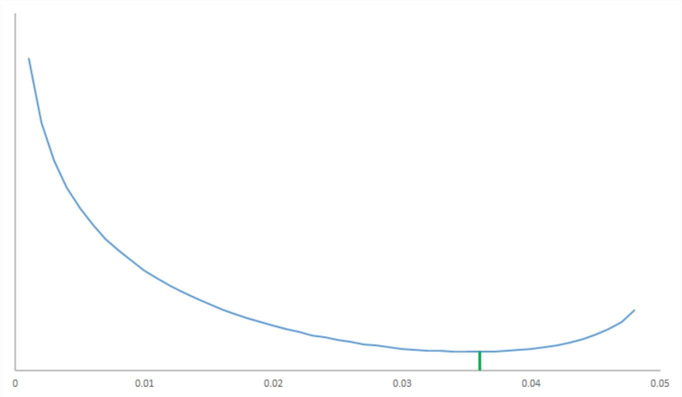
Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4



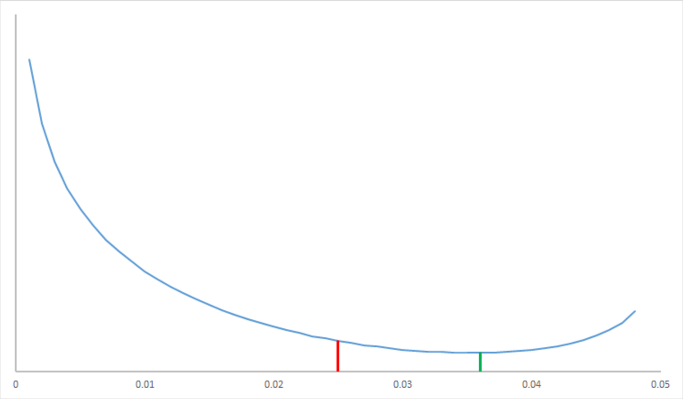
Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4



Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4



Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4

Szukamy takich liczb t_1 i t_2, że

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \min!$$

przy warunku

$$F_{n-1}(t_2) - F_{n-1}(t_1) = \gamma.$$

(tutaj $F_{n-1}(\cdot)$ oznacza dystrybuantę rozkładu chi-kwadrat z $n-1$ stopniami swobody)

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4

Proste zastosowanie znanej techniki mnożników Lagrange'a pokazuje, że t_1 i t_2 są takie, że

$$\begin{cases} t_1^2 f_{n-1}(t_1) = t_2^2 f_{n-1}(t_2) \\ F_{n-1}(t_2) - F_{n-1}(t_1) = \gamma \end{cases}$$

(tutaj $f_{n-1}(\cdot)$ oznacza gęstość rozkładu chi-kwadrat z $n-1$ stopniami swobody)

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #4

df	std	kr	kr/std	(γ_2)
10	0.2592	0.2207	14.84%	(0.0476)
20	0.0750	0.0690	8.06%	(0.0443)
30	0.0383	0.0362	5.54%	(0.0420)
40	0.0241	0.0231	4.22%	(0.0403)
50	0.0169	0.0163	3.41%	(0.0390)
60	0.0127	0.0123	2.86%	(0.0380)
70	0.0100	0.0097	2.47%	(0.0372)
80	0.0081	0.0079	2.16%	(0.0365)
90	0.0068	0.0066	1.93%	(0.0359)
100	0.0058	0.0057	1.74%	(0.0354)

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5

Zbudować przedział ufności o zadanej względnej długości.

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5

Zbudować przedział ufności o zadanej względnej długości.

Względna długość przedziału ufności

$$\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$$

jest **zmienną losową.**

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5

Zbudować przedział ufności o zadanej względnej długości.

Względna długość przedziału ufności

$$\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$$

jest **zmienną losową**.

Dwie wersje

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5

Zbudować przedział ufności o zadanej względnej długości.

Względna długość przedziału ufności

$$\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$$

jest **zmienną losową**.

Dwie wersje

a. Średnia (oczekiwana) względna długość.

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5

Zbudować przedział ufności o zadanej względnej długości.

Względna długość przedziału ufności

$$\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$$

jest **zmienną losową**.

Dwie wersje

a. Średnia (oczekiwana) względna długość.
b. Prawie na pewno.

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Przedział ufności o zadanej średniej względnej długości.

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

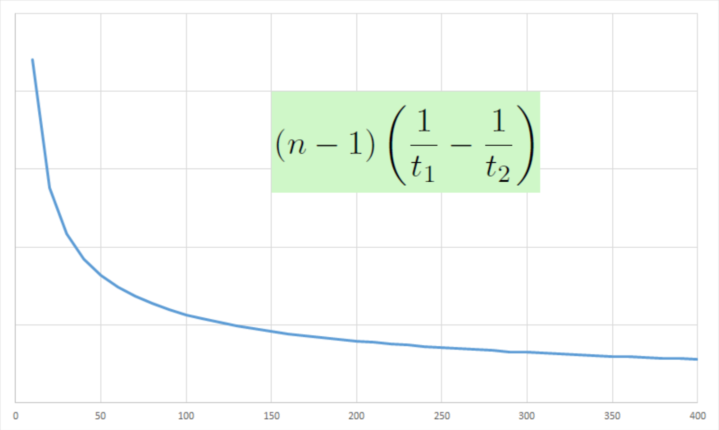
Przedział ufności o zadanej średniej względnej długości.

Oczekiwana względna długość przedziału ufności

$$E_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)=(n-1)\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$$

Przedział ufności - przykład

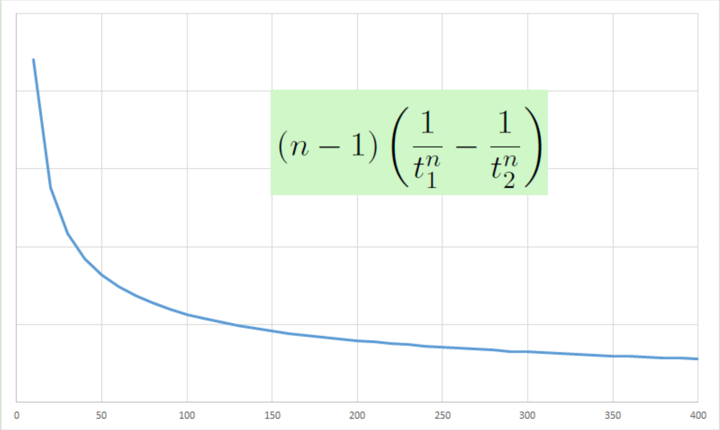
Dodatkowe kryterium #5a



$$(n-1)\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a



Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Rozkłady chi-kwadrat są uporządkowane dyspersyjnie!

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Rozkłady chi-kwadrat są uporządkowane dyspersyjnie!

Porządek dyspersyjny

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Rozkłady chi-kwadrat są uporządkowane dyspersyjnie!

Porządek dyspersyjny

Zmienne losowe X oraz Y o dystrybuantach F oraz G są w porządku dyspersyjnym, jeżeli

$$X \leq_{dysp} Y \equiv G^{-1}F(x) - x \text{ jest funkcją rosnącą}$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Rozkłady chi-kwadrat są uporządkowane dyspersyjnie!

Porządek dyspersyjny
Zmienne losowe X oraz Y o dystrybuantach F oraz G są w porządku dyspersyjnym, jeżeli

$$X \leq_{dysp} Y \equiv G^{-1}F(x) - x \text{ jest funkcją rosnącą}$$

Równoważnie: $X \leq_{dysp} Y$, jeżeli dla wszystkich $0 < \alpha < \beta < 1$

$$F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha) \leq G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha)$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Rozkłady chi-kwadrat są uporządkowane dyspersyjnie:

$$\chi^2_u \leq_{dysp} \chi^2_v \quad \text{dla} \quad u < v$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Rozkłady chi-kwadrat są uporządkowane dyspersyjnie:

$$\chi^2_u \leq_{dysp} \chi^2_v \quad \text{dla} \quad u < v$$

czyli

$$t_2^u - t_1^u \leq t_2^v - t_1^v$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Rozkłady chi-kwadrat są uporządkowane dyspersyjnie:

$$\chi^2_u \leq_{dysp} \chi^2_v \quad \text{dla} \quad u < v$$

czyli

$$t_2^u - t_1^u \leq t_2^v - t_1^v$$

czyli

$$\frac{1}{t_1^u} - \frac{1}{t_2^u} \geq \frac{1}{t_1^v} - \frac{1}{t_2^v}$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Rozkłady chi-kwadrat są uporządkowane dyspersyjnie:

$$\chi^2_u \leq_{dysp} \chi^2_v \quad \text{dla} \quad u < v$$

czyli

$$t_2^u - t_1^u \leq t_2^v - t_1^v$$

czyli

$$\frac{1}{t_1^u} - \frac{1}{t_2^u} \geq \frac{1}{t_1^v} - \frac{1}{t_2^v}$$

czyli

średnia długość przedziału ufności maleje wraz ze wzrostem liczności próby

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Dla danego $\delta > 0$ znaleźć takie najmniejsze n, że

$$(n-1)\left(\frac{1}{t_1^n} - \frac{1}{t_2^n}\right) \leq \delta$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Dla danego $\delta > 0$ znaleźć takie najmniejsze n, że

$$(n-1)\left(\frac{1}{t_1^n} - \frac{1}{t_2^n}\right) \le \delta$$

Rozwiązanie...

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5a

Dla danego $\delta > 0$ znaleźć takie najmniejsze n, że

$$(n-1)\left(\frac{1}{t_1^n} - \frac{1}{t_2^n}\right) \leq \delta$$

Rozwiązanie...

numeryczne!

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5b

Przedział ufności o zadanej „prawie na pewno” długości.

$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\left(\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)\leq\delta\right\}\geq \text{ duże}$$

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5b

Przedział ufności o zadanej „prawie na pewno” długości.

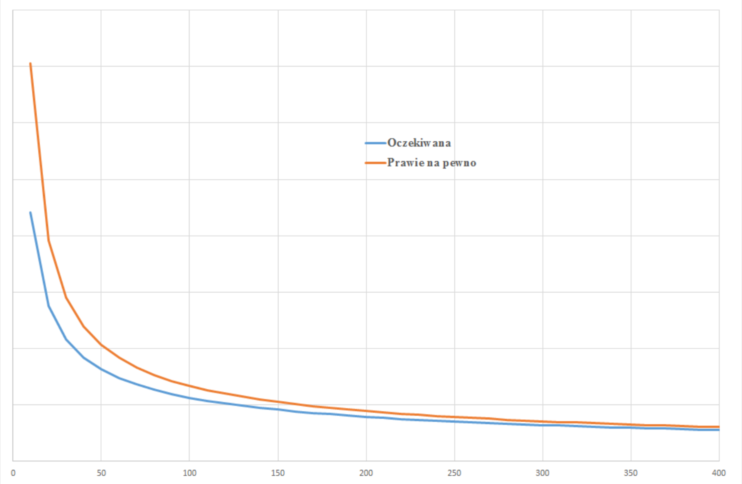
$$P_{\mu,\sigma^2}\left\{\left(\frac{\mathcal{S}^2}{\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)\leq\delta\right\}\geq \text{ duże}$$

Rozwiązanie...

podobnie jak poprzednio: numeryczne!

Przedział ufności - przykład

Dodatkowe kryterium #5



I jeszcze jeden przykład

Przedział...

I jeszcze jeden przykład

Przedział...

który **nie** jest przedziałem ufności!

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $\left(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\left(n,\theta\right),\ \theta\in(0,1)\}\right)$

Zadanie:
zbudować przedział ufności dla prawdopodobieństwa θ.

I jeszcze jeden przykład

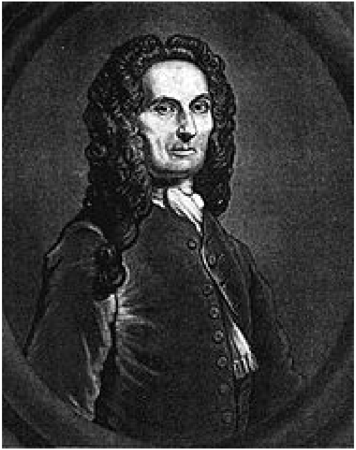
Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

Niemal w **każdym** podręczniku jest napisane:

aby zbudować przedział ufności dla prawdopodobieństwa θ *dla dużych* n *skorzystaj z twierdzenia de Moivre-Laplace'a:*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P_\theta\left\{\frac{\zeta_n-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\le x\right\}-\Phi(x)\right|=0$$

Abraham de Moivre (1667-1754) – Francja



Pierre Simon de Laplace (1749-1827) – Francja

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

Ponieważ dla dużych n

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P_\theta\left\{\frac{\zeta_n-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\leq x\right\}-\Phi(x)\right|=0$$

więc przedział

$$\left(\frac{\zeta_n}{n}-u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{\zeta_n}{n}\left(1-\frac{\zeta_n}{n}\right)};\ \frac{\zeta_n}{n}+u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{\zeta_n}{n}\left(1-\frac{\zeta_n}{n}\right)}\right)$$

jest traktowany jako przedział ufności dla θ

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

Ponieważ dla dużych n

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P_\theta\left\{\frac{\zeta_n-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\le x\right\}-\Phi(x)\right|=0$$

więc przedział

$$\left(\frac{\zeta_n}{n}-u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{\zeta_n}{n}\left(1-\frac{\zeta_n}{n}\right)};\ \frac{\zeta_n}{n}+u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{\zeta_n}{n}\left(1-\frac{\zeta_n}{n}\right)}\right)$$

jest traktowany jako przedział ufności dla θ (przybliżony)

I jeszcze jeden przykład

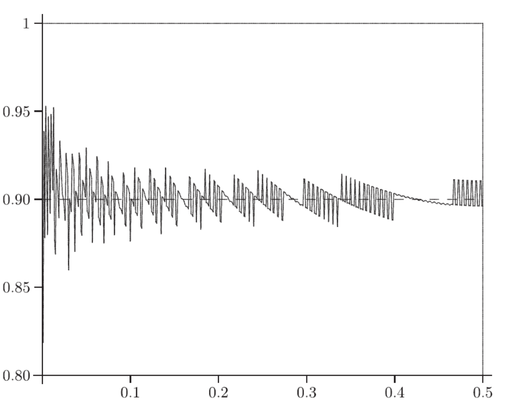
Model dwumianowy $(\{0, 1, \ldots, n\}, \{Bin\,(n, \theta)\,,\ \theta \in (0, 1)\})$

Prawdopodobieństwo pokrycia

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

Prawdopodobieństwo pokrycia



I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

Dlaczego tak się dzieje???

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

Twierdzenie de Moivre-Laplace'a:

$$(\forall\theta)\,(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N(\theta))\,(\forall n>N(\theta))$$
$$\sup_{x\in R}\left|P_\theta\left\{\frac{\zeta_n-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\leq x\right\}-\Phi(x)\right|<\varepsilon$$

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

Twierdzenie de Moivre-Laplace'a:

$$(\forall\theta)\,(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N(\theta))\,(\forall n>N(\theta))$$
$$\sup_{x\in R}\left|P_\theta\left\{\frac{\zeta_n-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\le x\right\}-\Phi(x)\right|<\varepsilon$$

ale nie zachodzi

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N)\,(\forall n>N)\,(\forall\theta)$$
$$\sup_{x\in R}\left|P_\theta\left\{\frac{\zeta_n-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\le x\right\}-\Phi(x)\right|<\varepsilon$$

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

A jak powinno być???

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $\left(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\}\right)$

C. J. Clopper oraz E. S. Pearson (1934) The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial, Biometrika 26, 404-413.

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0,1,\ldots,n\},\{Bin\,(n,\theta)\,,\ \theta\in(0,1)\})$

C. J. Clopper oraz E. S. Pearson (1934) The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial, Biometrika 26, 404-413.

Przedział ufności

$$\left(B^{-1}\left(\zeta_n, n-\zeta_n+1; \frac{1-\gamma}{2}\right);\ B^{-1}\left(\zeta_n+1, n-\zeta_n; \frac{1+\gamma}{2}\right)\right)$$

tutaj $B^{-1}\left(\cdot,\cdot;\cdot\right)$ oznacza kwantyl rozkładu Beta.

I jeszcze jeden przykład

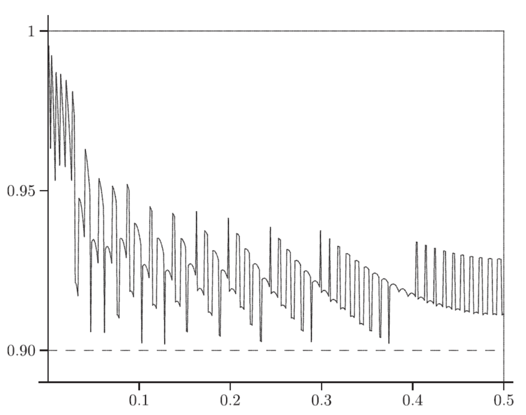
Model dwumianowy $(\{0, 1, \ldots, n\}, \{Bin\,(n, \theta)\,,\ \theta \in (0, 1)\})$

Prawdopodobieństwo pokrycia

I jeszcze jeden przykład

Model dwumianowy $(\{0, 1, \ldots, n\}, \{Bin\,(n, \theta)\,,\ \theta \in (0, 1)\})$

Prawdopodobieństwo pokrycia



Kilka uwag końcowych

Kilka uwag końcowych

1. prawdopodobieństwo pokrycia **musi** być nie mniejsze niż założony poziom ufności

Kilka uwag końcowych

1. prawdopodobieństwo pokrycia **musi** być nie mniejsze niż założony poziom ufności
2. istnieje **nieskończenie** wiele przedziałów ufności

Kilka uwag końcowych

1. prawdopodobieństwo pokrycia **musi** być nie mniejsze niż założony poziom ufności
2. istnieje **nieskończenie** wiele przedziałów ufności
3. należy podać **dodatkowe** kryterium wyboru przedziału ufności

Kilka uwag końcowych

$$P\left\{\sigma^2 \in (10, 20)\right\} = 0.9$$

Kilka uwag końcowych

Bezsensowny napis

$$P\left\{\sigma^2 \in (10, 20)\right\} = 0.9$$

Kilka uwag końcowych

Bezsensowny napis

$$P\left\{\sigma^2 \in (10, 20)\right\} = 0.9$$

Poprawnie

Kilka uwag końcowych

Bezsensowny napis

$$P\left\{\sigma^2 \in (10, 20)\right\} = 0.9$$

Poprawnie

Wariancja jest **jakąś** liczbą z przedziału $(10, 20)$.
„Przekonanie” o prawidłowości wniosku wynosi 90%.

Uwaga bibliograficzna

Literatura tematu...

Uwaga bibliograficzna

Literatura tematu...

jest bardzo bogata w **każdym** języku świata

Uwaga bibliograficzna

Literatura tematu...

jest bardzo bogata w **każdym** języku świata

Wystarczy wpisać...

przedział ufności
confidence interval (*angielski*)
intervalle de confiance (*francuski*)
Konfidenzintervall (*niemiecki*)
intervallo di confidenza (*włoski*)
intervalo de confianza (*hiszpański*)
megbízhatósági intervallum (*węgierski*)

Uwaga bibliograficzna

lub wykorzystać

https://translate.google.pl/ i wybrać

afrikaans	duński	indonezyjski	luksemburski	perski	tadżycki
albański	esperanto	irlandzki	łaciński	polski	tajski
amharski	estoński	islandzki	łotewski	portugalski	tamilski
angielski	filipiński	japoński	macedoński	rosyjski	telugu
arabski	fiński	jawajski	malajalam	rumuński	turecki
azerski	francuski	jidysz	malajski	samoański	ukraiński
baskijski	fryzyjski	joruba	malgaski	serbski	urdu
bengalski	galicyjski	kannada	maltański	shona	uzbecki
białoruski	grecki	kataloński	maori	sindhi	walijski
birmański	gruziński	kazachski	marathi	słowacki	węgierski
bośniacki	gudżarati	khmerski	mongolski	słoweński	wietnamski
bułgarski	hausa	kirgiski	nepalski	somalijski	włoski
cebuański	hawajski	koreański	niderlandzki	sotho	xhosa
chiński (tradycyjny)	hebrajski	korsykański	niemiecki	suahili	zulu
chiński (uproszczony)	hindi	kreolski (Haiti)	norweski	sundajski	
chorwacki	hiszpański	kurdyjski	ormiański	syngaleski	
czeski	hmong	laotański	paszto	szkocki gaelicki	
cziczewa	igbo	litewski	pendżabski	szwedzki	

Na zakończenie

Na zakończenie

Dziękuję Państwu za wysłuchanie pogadanki

Na zakończenie

Dziękuję Państwu za wysłuchanie pogadanki

i życzę udanego zaufanego przedziałowania

Na zakończenie

Dziękuję Państwu za wysłuchanie pogadanki

i życzę udanego zaufanego przedziałowania