

To jest LX Szkoła Matematyki Poglądowej



To jest LX Szkoła Matematyki Poglądowej

Pomysł stworzenia Ośrodka Kultury Matematycznej powstał w pociągu relacji Toruń–Warszawa, gdzieś w okolicach Kutna, we wrześniu 1987 roku.

W grudniu 1987 roku na ogólnopolskiej konferencji w Siedlcach zyskał realność



i pałac w Mordach.

Równocześnie postanowiono organizować

Szkoły Matematyki Poglądowej.

Leszek Szčerba jest świętym siedleckim
i jest to jedna z najbardziej zasłużonych świętości.

Z prowincjonalnej Wyższej Szkoły Rolniczo-Pedagogicznej
im. Georgi Dymitrowa
zrobił znaczący i doceniany

Uniwersytet Przyrodniczo–Humanistyczny w Siedlcach.

Uczelnia ta stała się też wzorcowym modelem
akademickiego środowiska sprzyjającego niepełnosprawnym.

Mój odczyt będzie dotyczył prac Leszka,
ale najpierw kilka słów o nim.

Bliżej poznałem Leszka w 1961 roku,
gdy razem uczestniczyliśmy w odbywającym się w Krakowie
Zjeździe Matematycznych Kół Naukowych.

Zajmowaliśmy się wówczas podstawami geometrii
– działem nieistniejącej już (praktycznie) dyscypliny
badającej strukturę teorii matematycznych i własności ich modeli.

Konkretnie prace nasze “napędzał” Alfred Tarski, mający
wyjątkowy (u tak wybitnego uczonego)
dar stawiania nietrafnych hipotez – obalanie ich było
(z racji na jego rangę) zawsze publikowalne
i mamy z Leszkiem kilka wspólnych prac tego typu.

Napisaliśmy też wspólnie grubą (raczej niezbyt dobrą) książkę,
której tytuł pomnę.

Leszek zawsze imponował mi
swoją matematyczną błyskotliwością.

Było to tym bardziej uderzające, że w innych zakresach
był notorycznym blagierem
(stąd speleologiczny przydomek *Wspanialec*),
a charakter miał (najdelikatniej mówiąc) trudny.

Leszek zawsze imponował mi
swoją matematyczną błyskotliwością.

Było to tym bardziej uderzające, że w innych zakresach
był notorycznym blagierem
(stąd speleologiczny przydomek *Wspanialec*),
a charakter miał (najdelikatniej mówiąc) trudny.



Jak (prawie) wszyscy wiedzą, pierwsza usterka w *Elementach* Euklidesa została znaleziona dopiero pod koniec XIX stulecia.

Okazało się bowiem, że pojęcie odcinka jest w *Elementach* czysto intuicyjne – to, czy punkt na prostej leży w danym odcinku, czy poza nim, było określane zawsze prawidłowo, ale w tym dedukcyjnym dziele nie było podstaw, aby owo położenie z czegoś wywnioskować.

Spostrzeżenie to jest autorstwa Moritza Pascha i zostało opublikowane w jego *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882).

Oczywiście, natychmiast wyprodukowano szereg paradoksów, w stylu “każdy trójkąt jest równoramienny”, co wystarczy dowieść jedynie dla trójkąta nierównoramiennego.

Oczywiście, natychmiast wyprodukowano szereg paradoksów, w stylu “każdy trójkąt jest równoramienny”, co wystarczy dowieść jedynie dla trójkąta nierównoramiennego.

Skoro $AB \neq AC$
 dwusieczna $\sphericalangle BAC$ i symetralna BC
 przecinają się w punkcie O .

$$OP = OQ,$$

bo O jest na dwusiecznej,

$$OB = OC,$$

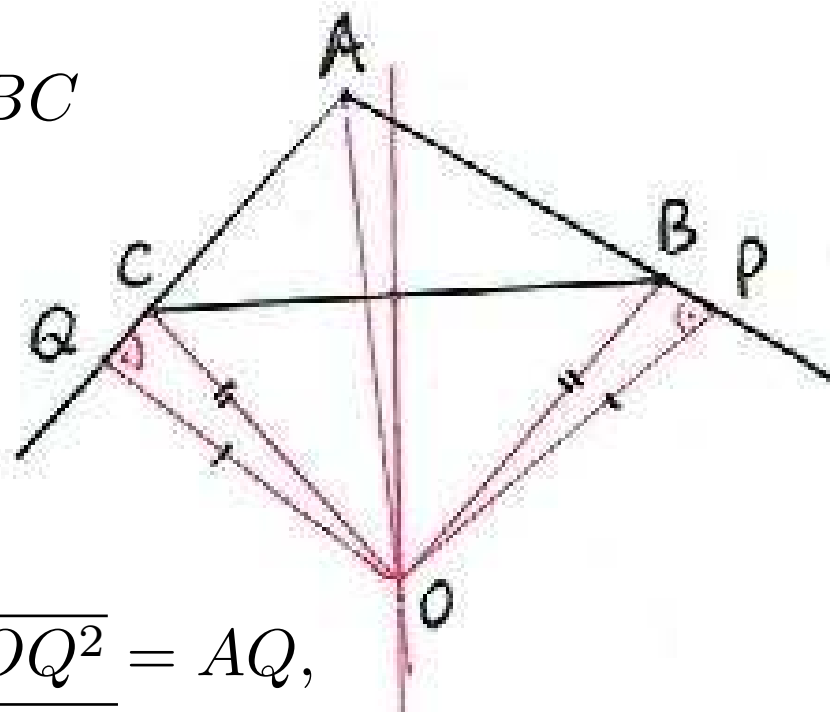
bo O jest na symetralnej,

zatem

$$AP = \sqrt{AO^2 - OP^2} = \sqrt{AO^2 - OQ^2} = AQ,$$

$$BP = \sqrt{BO^2 - OP^2} = \sqrt{CO^2 - OQ^2} = CQ,$$

$$\text{a więc } AB = AP - BP = AQ - CQ = AC.$$



We wspomnianej monografii podany jest “brakujący” aksjomat, zwany od tej pory aksjomatem Pascha i obecny nie tylko w podręcznikach geometrii, ale i topologii.

Głosi on, że

*prosta przecinająca jeden z boków trójkąta
i nie przechodząca przez żaden jego wierzchołek
przecina jeszcze jeden jego bok.*

W topologii za jego pomocą stwierdza się, że prosta rozcina płaszczyznę na dwie spójne części.

Jak łatwo zauważyć, aksjomat Pascha nie tylko określa porządek, lecz także wymiar

– w sposób oczywisty nie może on być większy niż 2.

Pedantyczność charakterystyczna dla podstaw geometrii kazała zastanowić się, czy tych dwóch spraw nie można by rozdzielić.

Propozycję wydzielenia części porządkowej podał w 1909 roku Friedrich Schur (profesor uniwersytetów w Poznaniu i Wrocławiu) w postaci, którą można odczytać jako zdanie

wnętrze trójkąta nie zależy od porządku wierzchołków,
co formalnie wygląda tak

$$\forall abcpx \exists q B(axp) \wedge B(bpc) \rightarrow B(aqb) \wedge B(cxq),$$

gdzie $B(xyz)$ oznacza, że punkt y jest punktem odcinka xz , lub, jak kto woli, y leży między x i z .

Obalając hipotezę Tarskiego, że porządek musi być zamieszany w wymiar, jako część “czystowymiarową” zaproponowałem zdanie orzekające, że

przynajmniej jedna para prostych – z trzech par wyznaczonych przez cztery punkty – ma punkt wspólny,
co formalnie wygląda tak

$$\forall abcd \exists x (L(abx) \wedge L(cdx)) \vee (L(acx) \wedge L(bdx)) \vee (L(adx) \wedge L(bcx)),$$

($L(xyz)$ oznacza, że te punkty są współliniowe),

co dało mi satysfakcję wygłoszenia na rzeczonym Zjeździe dowodu, że koniunkcja przytoczonych zdań, Schura i mojego, zastępuje aksjomat Pascha, (i to wygłoszenia w Collegium Maius!).

Pozostało pytanie, czy w zaproponowanych zdaniach nie kryją się jednak jakieś fakty, które są już zawarte również w innych aksjomatach.

W przypadku aksjomatu wymiarowego dowód był trywialny, ale z aksjomatem podanym przez Schura
(a zwanym zewnętrznym aksjomatem Pascha)
było trudniej.

I tego dotyczyła praca Leszka, którą chcę zreferować.

Ale najpierw zdarzenie, które było powodem zawartego w niej twierdzenia. Otóż Leszek wspólnie z Wolframem Schwabhauserem udowodnili pewnego razu mocne twierdzenie (dotyczyło ono sumowania modeli, co tutaj nie ma żadnego znaczenia), które było nawet za mocne, gdyż po zreferowaniu go na seminarium okazało się, że można podać prosty, nie budzący wątpliwości kontrprzykład.

Zatem owo twierdzenie twierdzeniem nie było. Ale w dowodzie nie sposób było znaleźć błędu. Każdy wyrzuciłby to twierdzenie i nie zawracałby sobie nim głowy. Ale nie Leszek. On zaczął podejrzewać o fałszywość po kolei każdą, nawet najoczywistszą – wydawałoby się – użytą w nim przesłankę.

Po prawie roku analiza ta przyniosła sukces.

Przesłanką, która zawiodła, było stwierdzenie

podprzestrzeń przestrzeni liniowej ma nie większy od niej wymiar.

Gdzie leży niesłuszność tego argumentu?

Okazuje się, że w nieprecyzyjności pojęcia *podprzestrzeń*.

Jest to zresztą skutek ogólnego braku dopracowania logicznego pojęć dotyczących struktur wielosortowych.

Zauważmy np., że na ogół przez podprzestrzeń przestrzeni liniowej $\langle V, \mathfrak{F}, +, \cdot \rangle$ rozumiemy $\langle V', \mathfrak{F}, +, \cdot \rangle$, gdzie $V' \subset V$, czyli zmniejszamy zbiór wektorów, podczas gdy ciało pozostawiamy bez zmian.

I wtedy wszystko jest w porządku.

Lecz można za podprzestrzeń $\langle V, \mathfrak{F}, +, \cdot \rangle$ uważać $\langle V', \mathfrak{F}', +, \cdot \rangle$, gdzie także $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ – i tak zrobili Leszek i Wolfram.

Ale wtedy użyta przesłanka jest nieprawdziwa.

Bardzo dobitnym przykładem jest tu fakt, że \mathbb{R} , jako przestrzeń liniowa nad \mathbb{R} , jest, oczywiście, wymiaru 1, a nad \mathbb{Q} – wymiaru nieskończonego \mathfrak{c} .

Drugie z powyższych stwierdzeń jest dziełem Georga Hamela i podana przez niego baza \mathbb{R} nad \mathbb{Q} nazywa się **bazą Hamela**.

Jest to zbiór liczb rzeczywistych liniowo niezależnych nad \mathbb{Q} . Posługując się pewnikiem wyboru można uzyskać ten zbiór tak, by każda liczba rzeczywista była kombinacją liniową o współczynnikach wymiernych elementów tego zbioru.

Bardzo dobitnym przykładem jest tu fakt, że \mathbb{R} , jako przestrzeń liniowa nad \mathbb{R} , jest, oczywiście, wymiaru 1, a nad \mathbb{Q} – wymiaru nieskończonego \mathfrak{c} .

Drugie z powyższych stwierdzeń jest dziełem Georga Hamela i podana przez niego baza \mathbb{R} nad \mathbb{Q} nazywa się **bazą Hamela**.

Jest to zbiór liczb rzeczywistych liniowo niezależnych nad \mathbb{Q} . Posługując się pewnikiem wyboru można uzyskać ten zbiór tak, by każda liczba rzeczywista była kombinacją liniową o współczynnikach wymiernych elementów tego zbioru.

Hamel użył jej do tego, by wskazać inne od $f(x) = ax$ rozwiązania równania funkcyjnego $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Rozwiązania te muszą być bardzo paskudne – nie tylko nieciągłe, ale też nieograniczone w żadnym przedziale, a nawet niemierzalne.

Kolejne narzędzie, którym wygodnie będzie się posłużyć, to **stożek dodatniości**.

To poręczne narzędzie do badania porządku w ciele liczbowym wylansowane przez Emila Artina, patrz Emil Artin, *Geometric algebra* (1957), Nicolas Bourbaki, *Algèbre communitative* (1964, po angielsku 1972).

Jest to formalny zabieg, polegający na utożsamieniu napisów $a > b$ i $(a - b) \in P$, gdzie P to właśnie stożek dodatniości.

Kolejne narzędzie, którym wygodnie będzie się posłużyć, to **stożek dodatniości**.

To poręczne narzędzie do badania porządku w ciele liczbowym wylansowane przez Emila Artina, patrz Emil Artin, *Geometric algebra* (1957), Nicolas Bourbaki, *Algèbre communitative* (1964, po angielsku 1972).

Jest to formalny zabieg, polegający na utożsamieniu napisów $a > b$ i $(a - b) \in P$, gdzie P to właśnie stożek dodatniości.

Zatem wskazując w konkretnym ciele jakiś zbiór P jako stożek dodatniości określamy tym samym w tym ciele związany z nim porządek.

Jak się łatwo domyślić, fantazyjnie wybrany stożek dodatniości może dawać zupełnie zdumiewające uporządkowanie elementów ciała, w szczególności kompletnie naruszające jego standardowe (zwyczajowe) związki z działaniami.

Dla \mathbb{R} , ze zwykłym porządkiem (danym przez stożek dodatniości P), weźmy pewną bazę Hamela $\{b_\alpha\}$ (w której dla konkretnych ilustracji niech

$$b_0 = 1, b_1 = \sqrt{2}, b_2 = \sqrt[4]{2}).$$

Każda liczba rzeczywista to pozaskończona suma

$$x = x_0 \cdot b_0 + \sum_{\alpha} x_{\alpha} \cdot b_{\alpha},$$

gdzie x_0 i wszystkie x_{α} są liczbami wymiernymi.

Wykonajmy w \mathbb{R} następującą operację

$$f : f(x) = x_0 - \sum_{\alpha} x_{\alpha} \cdot b_{\alpha}.$$

(można na to patrzeć jak na zmianę bazy Hamela)

i zmieńmy za jej pomocą stożek dodatniości:

$$P^* : x \in P^* \leftrightarrow f(x) \in P,$$

powodując przemieszanie elementów \mathbb{R} ;

np. $\sqrt{2} \notin P^*$, $-\sqrt{2} \in P^*$, $-\sqrt[4]{2} \in P^*$.

Zobaczmy, jak wielki zapanował bałagan.

Zobaczmy, jak wielki zapanował bałagan.

Nietrudno zauważyć, że

$$x, y \in P^* \rightarrow x + y \in P^* \quad \text{i} \quad x, y \notin P^* \rightarrow x + y \notin P^*,$$

bo dodawanie odbywa się “po współrzędnych”.

Stąd wniosek, że f jest izomorfizmem $\langle \mathbb{R}, +, P \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, +, P^* \rangle$.

Czyli bałagan nie jest zbyt wielki, choć np. zarówno $1 - 10\sqrt{2}$, jak $10 - \sqrt{2}$ są teraz liczbami dodatnimi.

Zobaczmy, jak wielki zapanował bałagan.

Nietrudno zauważyć, że

$$x, y \in P^* \rightarrow x + y \in P^* \quad \text{i} \quad x, y \notin P^* \rightarrow x + y \notin P^*,$$

bo dodawanie odbywa się “po współrzędnych”.

Stąd wniosek, że f jest izomorfizmem $\langle \mathbb{R}, +, P \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, +, P^* \rangle$.

Czyli bałagan nie jest zbyt wielki, choć np. zarówno $1 - 10\sqrt{2}$, jak $10 - \sqrt{2}$ są teraz liczbami dodatnimi.

Ale jednak $\mathfrak{R} := \langle \mathbb{R}, +, \cdot, P \rangle$ i $\mathfrak{R}^* := \langle \mathbb{R}, +, \cdot, P^* \rangle$ nie są izomorficzne,

bo np. $(-\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2} \notin P^*$, czyli $(P^*)^2 \not\subset P^*$; mówiąc po ludzku: kwadraty liczb “nowododatnich” nie muszą być “nowododatnie”

Konsekwentnie odmienne będzie pojęcie modułu:

$$|x|^\star = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \in P^\star, \\ -x, & \text{gdy } x \notin P^\star. \end{cases}$$

Okazuje się, że ma on bardzo regularne własności:

$$|x| = |y| \leftrightarrow |x|^\star = |y|^\star,$$

bo każda z tych równości ma miejsce, gdy x i y różnią się co najwyżej znakami. Mamy więc

$$||x||^\star = |x|^\star \quad \text{i} \quad ||x|^\star| = |x|.$$

Druga zmiana, to konsekwentne dostosowanie normy w \mathbb{R}^2 :

$$\|a\|^\star := |\sqrt{a_1^2 + a_2^2}|^\star$$

Zauważmy, że podobnie jak dla modułu mamy

$$\|a\| = \|b\| \leftrightarrow \|a\|^\star = \|b\|^\star \quad \text{oraz} \quad ||\|a\||^\star = \|a\|^\star \quad \text{i} \quad ||\|a\|^\star| = \|a\|.$$

A teraz wreszcie geometria (oczywiście euklidesowa).

Powszechnie(?) wiadomo, że do jej opisania wystarczają dwie relacje: relacja leżenia między (betweenness, czyli wspomniana już relacja B)

i czteroargumentowa relacja przystawania (equidistance, gdzie $D(abcd)$ oznacza, że odległość punktów a i b jest taka sama, jak odległość punktów c i d).

patrz np. Alfred Tarski, *What is elementary geometry?*

i *A decision method for elementary algebra and geometry.*

Porównamy geometrie jedno- i dwuwymiarowe odpowiednio nad \mathfrak{R} i \mathfrak{R}^* .

Okazuje się, że w przypadku geometrii jednowymiarowej nic się nie zmieniło. W jednowymiarowej geometrii nad \mathfrak{R} i nad \mathfrak{R}^* interpretujemy relacje B i D w oczywisty sposób:

$$B_1(xyz) \leftrightarrow |x - y| + |y - z| = |x - z|$$

$$D_1(xyzt) \leftrightarrow |x - y| = |z - t|$$

oraz

$$B_1^*(xyz) \leftrightarrow |x - y|^* + |y - z|^* = |x - z|^*$$

$$D_1^*(xyzt) \leftrightarrow |x - y|^* = |z - t|^*.$$

Ponieważ, jak ustaliliśmy $|a| = |b| \leftrightarrow |a|^* = |b|^*$,
a w powyższych interpretacjach nie używane jest mnożenie,
więc **geometria prostej pozostała bez zmian.**

Okazuje się, że w przypadku geometrii jednowymiarowej nic się nie zmieniło. W jednowymiarowej geometrii nad \mathfrak{R} i nad \mathfrak{R}^* interpretujemy relacje B i D w oczywisty sposób:

$$B_1(xyz) \leftrightarrow |x - y| + |y - z| = |x - z|$$

$$D_1(xyzt) \leftrightarrow |x - y| = |z - t|$$

oraz

$$B_1^*(xyz) \leftrightarrow |x - y|^* + |y - z|^* = |x - z|^*$$

$$D_1^*(xyzt) \leftrightarrow |x - y|^* = |z - t|^*.$$

Ponieważ, jak ustaliliśmy $|a| = |b| \leftrightarrow |a|^* = |b|^*$,
a w powyższych interpretacjach nie używane jest mnożenie,
więc **geometria prostej pozostała bez zmian**.

Bardziej formalnie:

Jednowymiarowe geometrie $\mathfrak{E}_1 := \langle \mathbb{R}, B_1, D_1 \rangle$ i $\mathfrak{E}_1^* := \langle \mathbb{R}^*, B_1^*, D_1^* \rangle$
są izomorficzne,

jako struktury jednakowo określone nad izomorficznymi algebrami.

Przejdźmy do przypadku dwuwymiarowego

Analogicznie do \mathfrak{E}_1 i \mathfrak{E}_1^* określamy geometrie

$\mathfrak{E}_2 := \langle \mathbb{R}^2, B_2, D_2 \rangle$ i $\mathfrak{E}_2^* := \langle (\mathbb{R}^*)^2, B_2^*, D_2^* \rangle$ przyjmując

$$B_2(xyz) \leftrightarrow \|x - y\| + \|y - z\| = \|x - z\|$$
$$\text{i } D_2(xyzt) \leftrightarrow \|x - y\| = \|z - t\|$$

oraz

$$B_2^*(xyz) \leftrightarrow \|x - y\|^* + \|y - z\|^* = \|x - z\|^*$$
$$\text{i } D_2^*(xyzt) \leftrightarrow \|x - y\|^* = \|z - t\|^*.$$

Wobec $\|a\| = \|b\| \leftrightarrow \|a\|^* = \|b\|^*$ mamy

$$D_2(xyzt) \leftrightarrow D_2^*(xyzt).$$

Jednak \mathfrak{E}_2 i \mathfrak{E}_2^* nie są izomorficzne, bo $B_2 \neq B_2^*$,

gdyż np. dla $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$ i $c = (\sqrt{2}, 0)$

mamy $B_2(abc)$, a więc $\neg B_2(cab)$ i równocześnie $B_2^*(cab)$.

To przemieszanie punktów, zmieniające pojęcie odcinka, nie zmienia jednak pojęcia prostej.

W tym celu należy sprawdzić, że relacje współliniowości, określone w oczywisty sposób dla \mathfrak{E}_2 i \mathfrak{E}_2^* przez warunki

$$L(xyz) \leftrightarrow B_2(xyz) \vee B_2(yzx) \vee B_2(zxy),$$
$$\text{i } L^*(xyz) \leftrightarrow B_2^*(xyz) \vee B_2^*(yzx) \vee B_2^*(zxy),$$

są spełniane przez te same punkty.

Sprowadza się to do sprawdzenia, że trzy punkty związane relacją B_2 , są związane – być może w innej kolejności – relacją B_2^* .

Dokładniej:

$$B_2(xyz) \rightarrow B_2^*(xyz) \vee B_2^*(yzx) \vee B_2^*(zxy),$$

$$B_2^*(xyz) \rightarrow B_2(xyz) \vee B_2(yzx) \vee B_2(zxy),$$

czego sprawdzenie jest wyłącznie żmudne.

Zatem, ponieważ $D_2 = D_2^*$ i $L_2 = L_2^*$, okazało się, że proste w “zwykłej” dwuwymiarowej geometrii i w “przemieszanej” mają identyczne własności, co można wyrazić tak:

Każde zdanie sformułowane w terminach współliniowości L i przystawania D jest prawdziwe w \mathfrak{E}_2 wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe w \mathfrak{E}_2^ .*

W \mathfrak{E}_2^* zakłócony jest jednak związek porządków na różnych prostych, wyrażony przez aksjomat Pascha – tu w wersji Schura. Sprawdźmy.

Rozważmy punkty $t = (0, 1)$, $x = (0, -\sqrt[4]{2})$, $y = (\sqrt{2}, 0)$,
 $z = (-\sqrt[4]{2}, 0)$, $u = (0, 0)$.

Ponieważ $\sqrt{2} <^* 0 <^* 1 <^* -\sqrt[4]{2}$, więc $B_2^*(xtu) \wedge B_2^*(yuz)$, a tymczasem proste xy i zt są rozłączne, zatem skoro $\forall v \neg L(xyv) \vee \neg L(ztv)$, tym bardziej $\neg(B_2^*(xvy) \wedge B_2^*(ztv))$.

Oczywiście, aby się przekonać, że \mathfrak{E}_2^* różni się od “zwyczajnej” geometrii jedynie tym, że nie jest w niej spełniony aksjomat Pascha, a “wszystko inne” jest w porządku, należałoby sprawdzić, że w niej spełnione są wszystkie pozostałe aksjomaty “zwyczajnej” geometrii.

Oczywiście, aby się przekonać, że \mathfrak{E}_2^* różni się od “zwyczajnej” geometrii jedynie tym, że nie jest w niej spełniony aksjomat Pascha, a “wszystko inne” jest w porządku, należałoby sprawdzić, że w niej spełnione są wszystkie pozostałe aksjomaty “zwyczajnej” geometrii.

Warunkiem niezbędnym, aby to wykonać jest dysponowanie aksjomatyką “zwykłej” geometrii.

W omawianej pracy taką aksjomatyką była aksjomatyka Tarskiego.

Proszę przygotować się na wstrząs. Oto ona.

- A 1** $\forall xy \ B(xyx) \rightarrow x = y$
- A 2** $\forall xyzu \ B(xyu) \wedge B(yzu) \rightarrow B(xyz)$
- A 3** $\forall xyzu \ B(xyz) \wedge B(xyu) \wedge x \neq y \rightarrow B(xzu) \vee B(xuz)$
- A 4** $\forall xy \ D(xyyx)$
- A 5** $\forall xyz \ D(xyzz) \rightarrow x = y$
- A 6** $\forall xyzuvw \ D(xyzu) \wedge D(zuvw) \rightarrow D(xyvw)$
- A 7** $\forall txyzu \ \exists v \ B(xtu) \wedge B(yuz) \rightarrow B(xvy) \wedge B(ztv)$
- A 8** $\forall txyzu \ \exists vw \ B(xut) \wedge B(yuz) \wedge x \neq y \rightarrow$
 $\rightarrow B(xyv) \wedge B(xzw) \wedge B(vtw)$
- A 9** $\forall xx'yy'zz'uu' \ D(xyx'y') \wedge D(yzy'z') \wedge D(xux'u') \wedge$
 $\wedge D(yuy'u') \wedge B(xyz) \wedge B(x'y'z') \rightarrow D(zuz'u')$
- A10** $\forall xyuv \ \exists z \ B(xyz) \wedge D(yzuv)$
- A11** $\exists xyz \ \neg B(xyz) \wedge \neg B(yzx) \wedge \neg B(zxy)$
- A12** $\forall xyzuv \ D(xuxv) \wedge D(yuyv) \wedge D(zuzv) \wedge u \neq v \rightarrow$
 $\rightarrow B(xyz) \vee B(yzx) \vee B(zxy)$

Niestety czegoś lepszego od tej aksjomatyki nie ma i raczej nigdy nie będzie.

Ale co to znaczy lepsza? Albo choćby dobra?

Nie tylko ma to być aksjomatyka spełniająca wymogi współczesnej logiki matematycznej, lecz także ma się składać ze zdań przedstawiających – wedle wskazań Kartezjusza – **prawdy jasne i oczywiste**.

Ta jasność i oczywistość ma być postrzegana przez wszystkich, w szczególności przez uczniów.

Pierwszą aksjomatykę spełniającą kryterium zgodności z logiką podał Dawid Hilbert w *Grundlagen der Geometrie* (1899), ale była ona niesłychanie rozległa i trudno było wszystkie jej sformułowania uznać za oczywiste.

Podjęmowano dalsze liczne próby zbudowania dobrej aksjomatyki geometrii euklidesowej, ale niestety znajdowane rozwiązania nie spełniały kartezjańskich kryteriów.

Niektórzy mieli bardzo atrakcyjne pomysły, jak choćby

Mario Pieri, chcący oprzeć aksjomatykę jedynie na pojęciu trójkąta równobocznego,

czy Alfred Tarski z wyprodukowaną w prezencie dla Leśniewskiego “geometrią naturalną”, w której były tylko kule i ich zawieranie.

To wszystko było ciekawe, ale do szkolnego spożycia się nie nadawało.

Podjęmowano dalsze liczne próby zbudowania dobrej aksjomatyki geometrii euklidesowej, ale niestety znajdowane rozwiązania nie spełniały kartezjańskich kryteriów.

Niektórzy mieli bardzo atrakcyjne pomysły, jak choćby

Mario Pieri, chcący oprzeć aksjomatykę jedynie na pojęciu trójkąta równobocznego,

czy Alfred Tarski z wyprodukowaną w prezencie dla Leśniewskiego “geometrią naturalną”, w której były tylko kule i ich zawieranie.

To wszystko było ciekawe, ale do szkolnego spożycia się nie nadawało.

Czyżby Immanuel Kant w *Krytyce czystego rozumu* miał rację, iż bądź przychodzimy na świat z gotową świadomością geometrii, bądź też (jako ssaki) wysysamy ją z mlekiem matki?

I tego żadną aksjomatyką wyrazić się przystępnie nie da?

Wyjaśnienie tej zagadkowej tajemnicy jest jednak całkowicie racjonalne.

Gdy spojrzymy na definicję np. przestrzeni Banacha, powinno nam rzucić się w oczy, jak wiele jest teorii poprzedzających jej konstrukcję, choćby od teorii liczb rzeczywistych poczynając. Mając tak wiele bardzo zaawansowanych “półfabrykatów” nie trudno złożyć z nich bardzo doskonały produkt. Czyż nie tak wygląda konstruowanie choćby laptopów czy stacji kosmicznych?

Wyjaśnienie tej zagadkowej tajemnicy jest jednak całkowicie racjonalne.

Gdy spojrzemy na definicję np. przestrzeni Banacha, powinno nam rzucić się w oczy, jak wiele jest teorii poprzedzających jej konstrukcję, choćby od teorii liczb rzeczywistych poczynając. Mając tak wiele bardzo zaawansowanych “półfabrykatów” nie trudno złożyć z nich bardzo doskonały produkt. Czyż nie tak wygląda konstruowanie choćby laptopów czy stacji kosmicznych?

Tymczasem – uwiedzeni *Elementami* – chcemy (chcieliśmy) opisać bardzo złożoną, bogatą teorię *ab ovo*.

A przecież już w Starożytności uczono nas, że

nie ma królewskiej drogi do geometrii.