Blefy olimpijskie

Łukasz Bożyk

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Wola Ducka, 27 sierpnia 2019 r.

Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

Zadanie 1. (7/FLOMG)

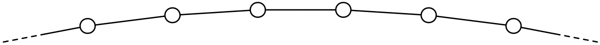
Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.

Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

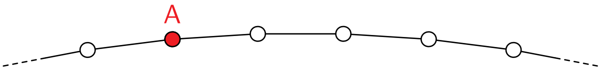
Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

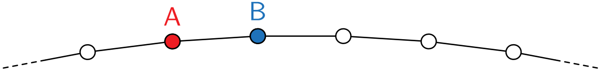
Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

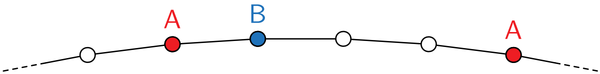
Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

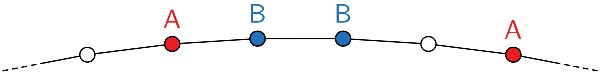
Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

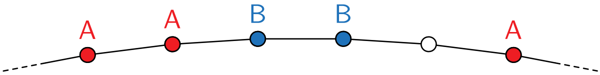
Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

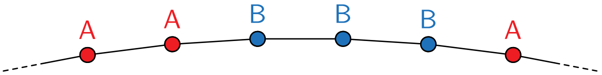
Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.



Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.

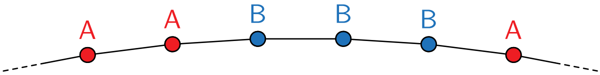


Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.

Wykaż, że Bartek zawsze może grać tak, aby uniemożliwić Ani zwycięstwo.

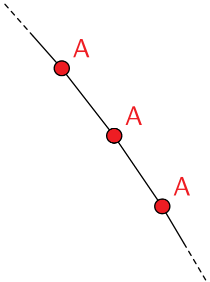


1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.

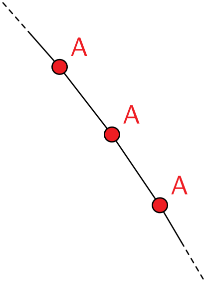
Rozwiązanie zadania 1.

1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

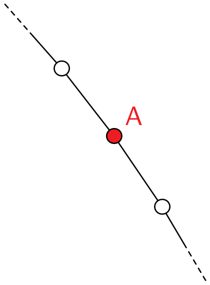
3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta.



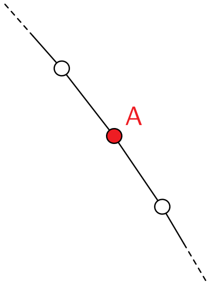
3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta.



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

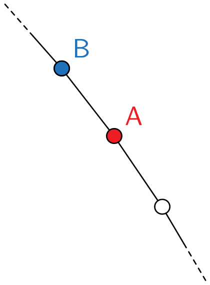


3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.



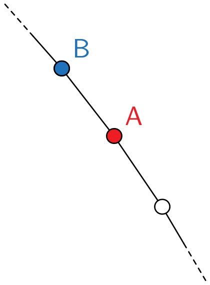
3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

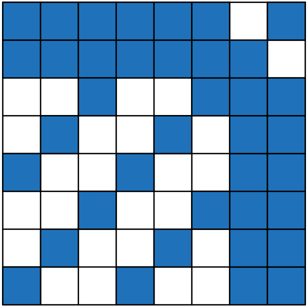
4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

5) Skoro przypuszczenie o wygranej Ani doprowadziło do sprzeczności, to opisana strategia Bartka jest nieprzegrywająca.

Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na niebiesko lub biało.

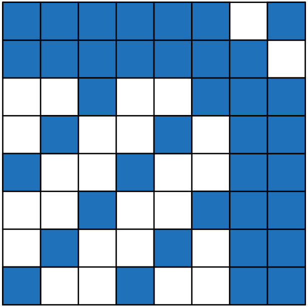
Zadanie 2. (13/FLOMG)

Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na niebiesko lub biało.



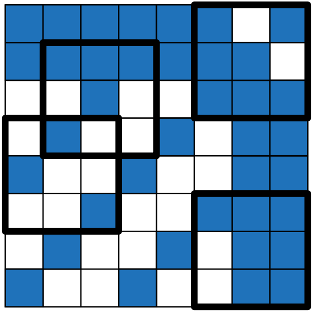
Zadanie 2. (13/FLOMG)

Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na niebiesko lub biało. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach 3×3, złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba białych pól.



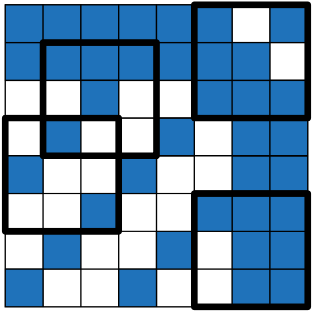
Zadanie 2. (13/FLOMG)

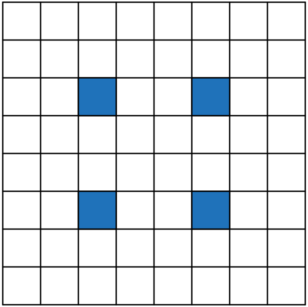
Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na niebiesko lub biało. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach 3×3, złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba białych pól.



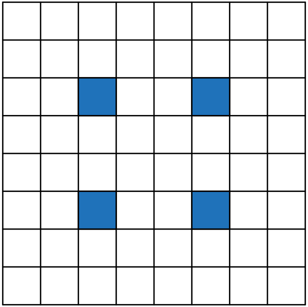
Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na niebiesko lub biało. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach 3×3, złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba białych pól.

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w całej tablicy? Odpowiedź uzasadnij.



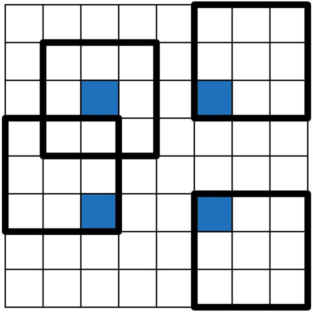


1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na biało).



1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na biało).

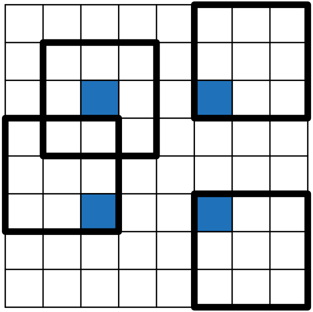
2) Wówczas każdy kwadrat 3×3 zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.



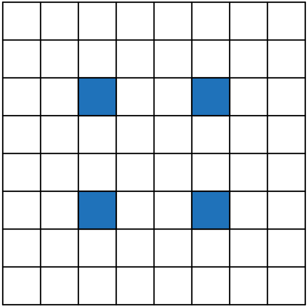
1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na biało).

2) Wówczas każdy kwadrat 3×3 zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.

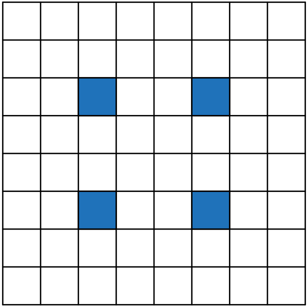
Rozwiązanie zadania 2.



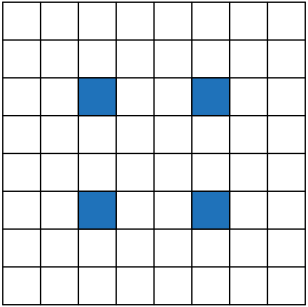
1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na biało).
2) Wówczas każdy kwadrat 3×3 zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.
3) Z warunków zadania wynika, że w każdym takim kwadracie musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest co najwyżej osiem pól białych).



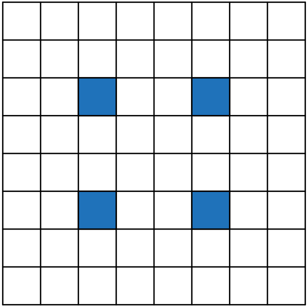
4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3.



4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach.



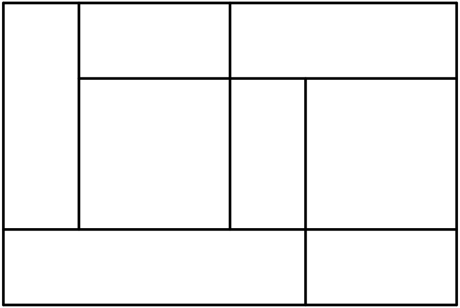
4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.



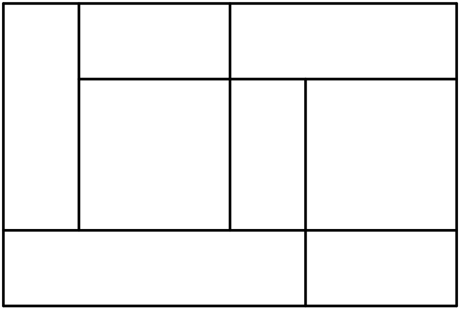
4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.
5) Rysunek pokazuje, że liczba 4 jest osiągalna, jest więc odpowiedzią na postawione w zadaniu pytanie.

Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty.

Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty.

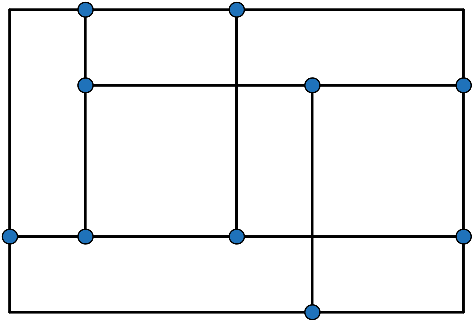


Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów.



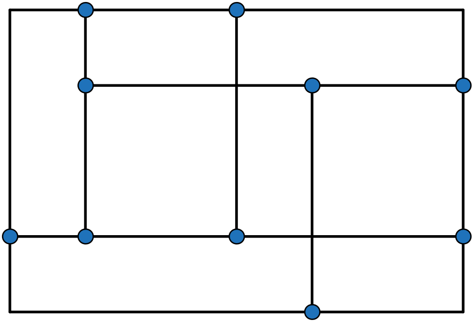
Zadanie 3. (17/FLOMG)

Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów.

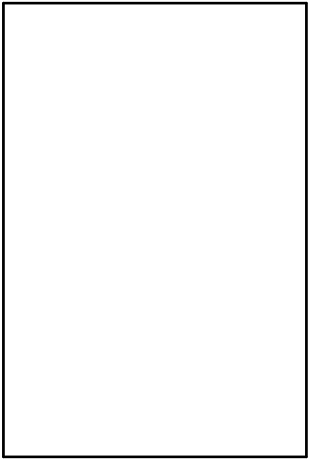


Zadanie 3. (17/FLOMG)

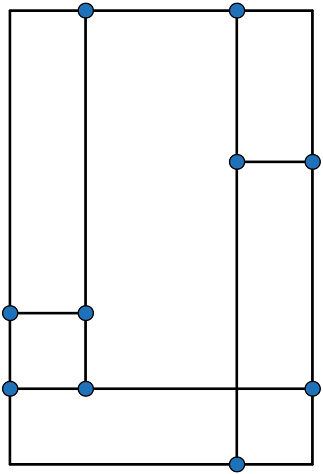
Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów. Udowodnij, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.



1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.



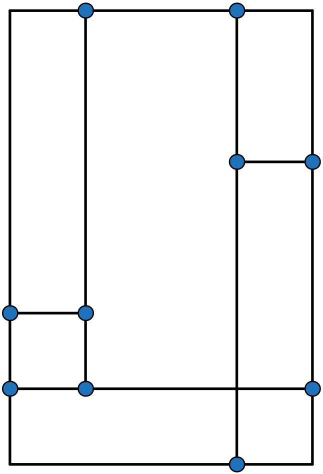
1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.
2) Początkowo, gdy prostokąt nie jest podzielony na mniejsze prostokąty, liczba wyróżnionych punktów jest parzysta (gdyż jest równa zero).



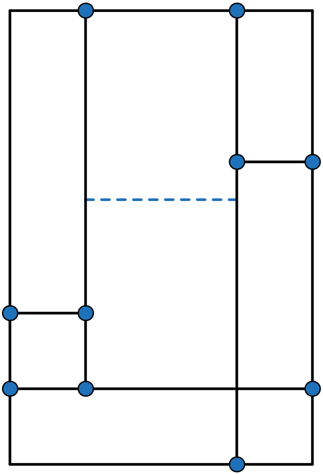
1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.

2) Początkowo, gdy prostokąt nie jest podzielony na mniejsze prostokąty, liczba wyróżnionych punktów jest parzysta (gdyż jest równa zero).

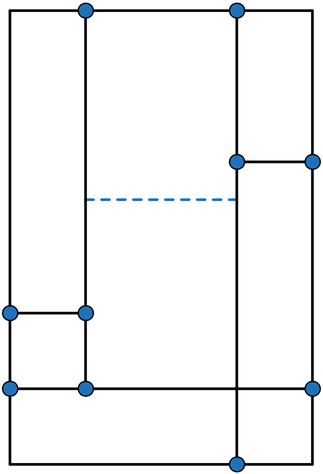
3) Załóżmy, że prostokąt jest podzielony na k małych prostokątów ($k \geqslant 1$) w taki sposób, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.



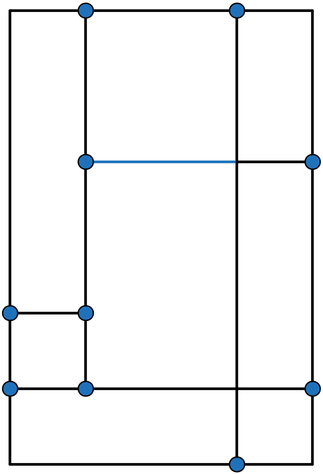
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k + 1$ prostokątów.



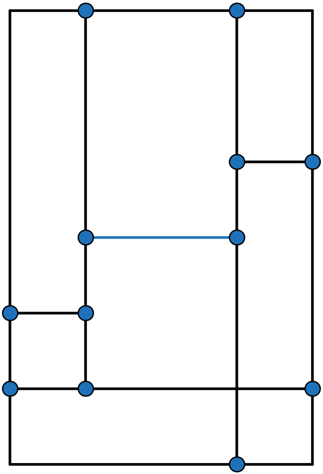
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów.



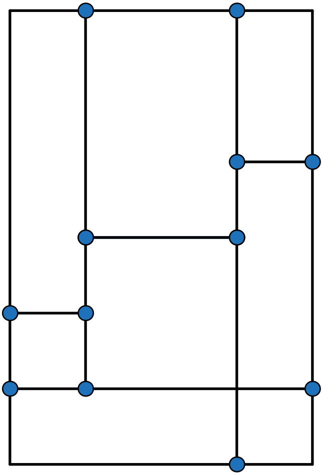
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.



4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

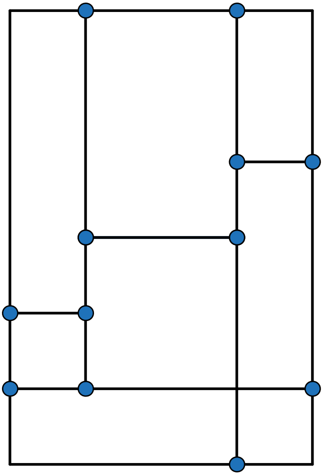


4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.



4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.



4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.

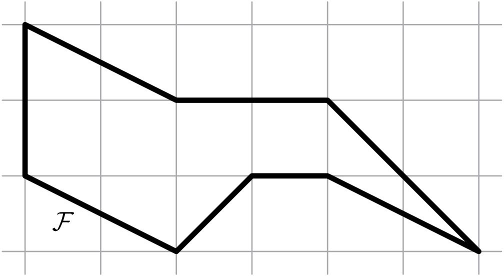
6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na n małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.

Zadanie 4. (Wzór Picka)

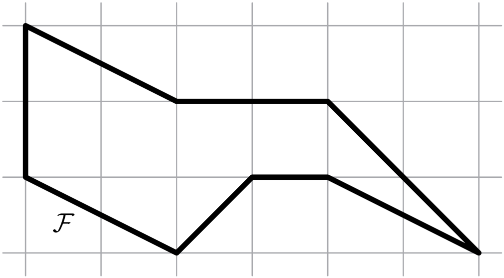
Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym.

Zadanie 4. (Wzór Picka)

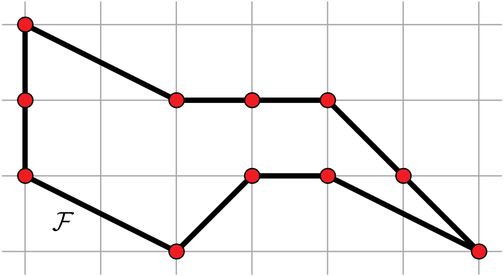
Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym.



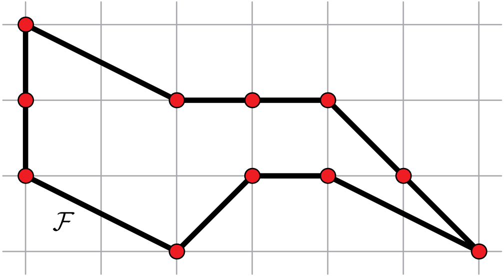
Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$



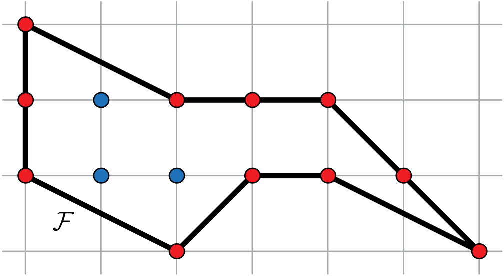
Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$



Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$, a przez I — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.



Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$, a przez I — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

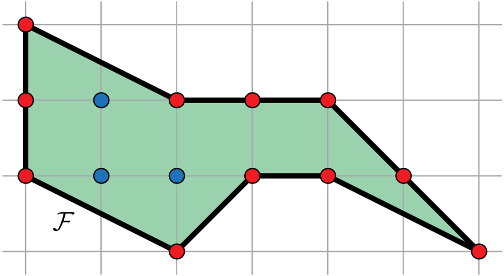


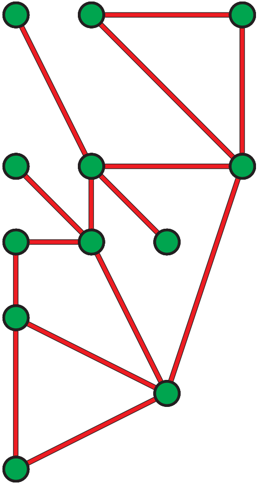
Zadanie 4. (Wzór Picka)

Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$, a przez I — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

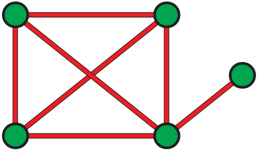
Udowodnij, że pole P wielokąta $\mathcal{F}$ wyraża się wzorem

$$P = I + B/2 - 1.$$

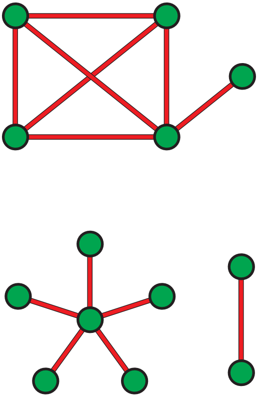




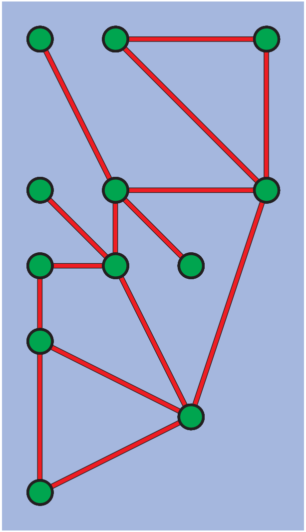
- *Graf* to (obrazowo) wierzchołki i krawędzie łączące niektóre ich pary. Zakładamy, że żaden wierzchołek nie jest połączony sam ze sobą i każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź.



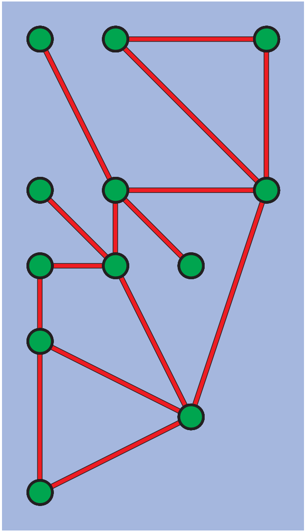
- *Graf* to (obrazowo) wierzchołki i krawędzie łączące niektóre ich pary. Zakładamy, że żaden wierzchołek nie jest połączony sam ze sobą i każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź.
- Graf *spójny* to graf „w jednym kawałku" (z każdego wierzchołka można dojść po krawędziach do każdego innego).



- *Graf* to (obrazowo) wierzchołki i krawędzie łączące niektóre ich pary. Zakładamy, że żaden wierzchołek nie jest połączony sam ze sobą i każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź.
- Graf *spójny* to graf „w jednym kawałku" (z każdego wierzchołka można dojść po krawędziach do każdego innego).
- Graf *płaski* to graf narysowany na płaszczyźnie tak, że żadne dwie jego krawędzie się nie przecinają.



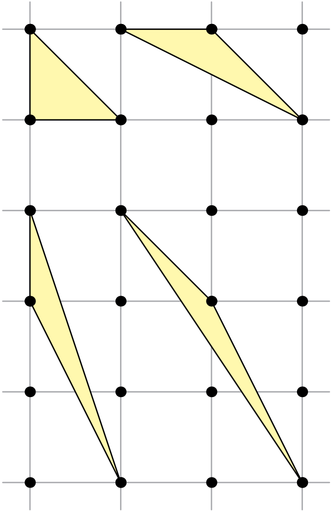
- *Ścianą* nazwiemy każdy z obszarów, na które krawędzie grafu płaskiego dzielą płaszczyznę (jeden z nich jest nieograniczony).



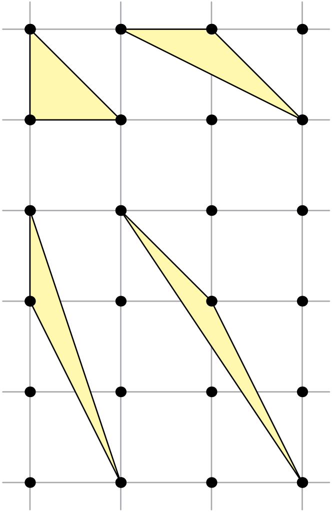
- *Ścianą* nazwiemy każdy z obszarów, na które krawędzie grafu płaskiego dzielą płaszczyznę (jeden z nich jest nieograniczony).

- **Wzór Eulera**
  Jeżeli spójny graf płaski ma W wierzchołków, K krawędzi i S ścian, to

$$W - K + S = 2.$$

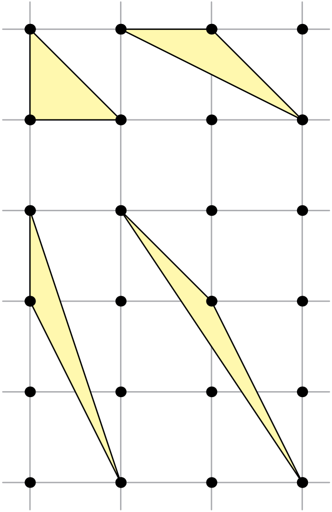


- Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych nazwiemy *małym*, jeżeli do jego wnętrza nie należą żadne punkty kratowe, a na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych niż wierzchołki.



- Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych nazwiemy *małym*, jeżeli do jego wnętrza nie należą żadne punkty kratowe, a na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych niż wierzchołki.

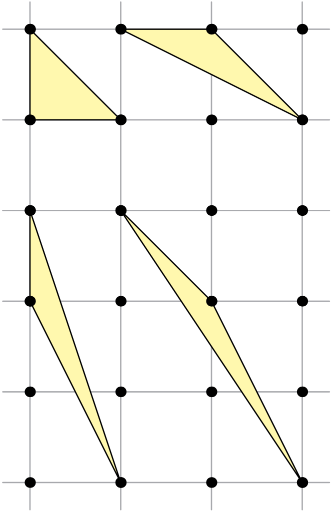
  Krótko mówiąc: trójkąt jest mały, jeżeli $I + B = 3$.



- Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych nazwiemy *małym*, jeżeli do jego wnętrza nie należą żadne punkty kratowe, a na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych niż wierzchołki.

  Krótko mówiąc: trójkąt jest mały, jeżeli $I + B = 3$.

- **Lemat (o małych trójkątach)**
  Każdy mały trójkąt ma pole $\frac{1}{2}$.



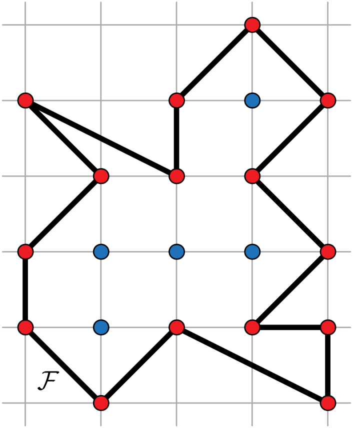
- Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych nazwiemy *małym*, jeżeli do jego wnętrza nie należą żadne punkty kratowe, a na jego brzegu nie ma innych punktów kratowych niż wierzchołki.

  Krótko mówiąc: trójkąt jest mały, jeżeli $I + B = 3$.

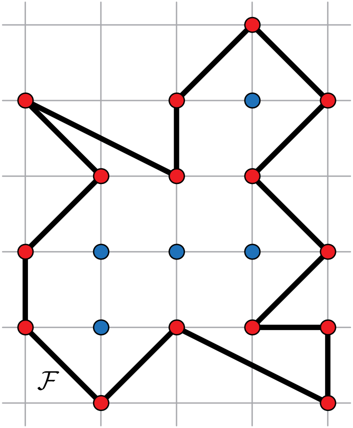
- **Lemat (o małych trójkątach)**
  Każdy mały trójkąt ma pole $\frac{1}{2}$.

Przechodzimy do dowodu wzoru Picka.

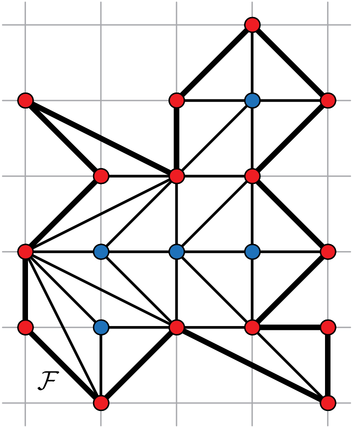
1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.



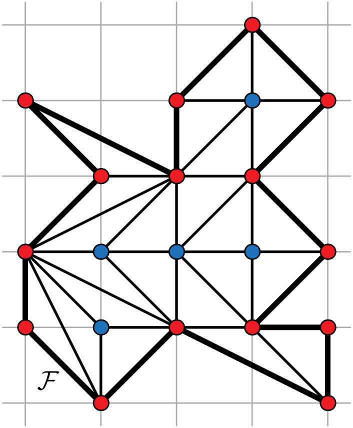
1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

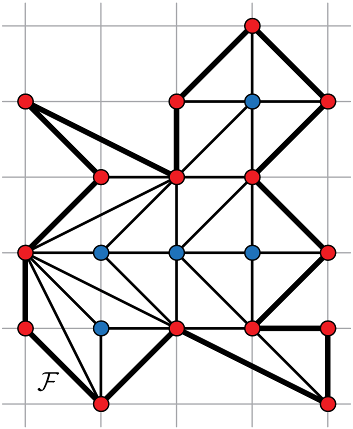
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

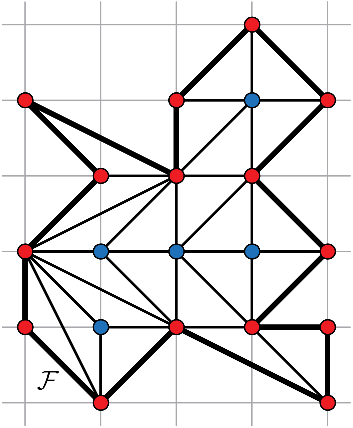
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski



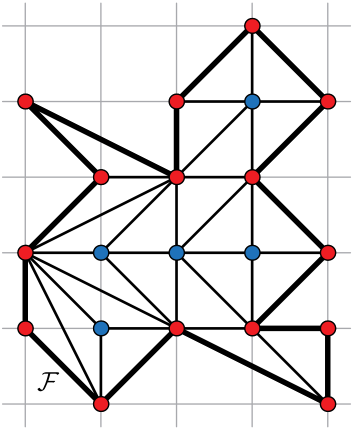
1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



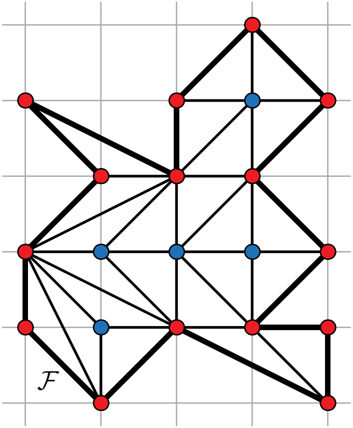
1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

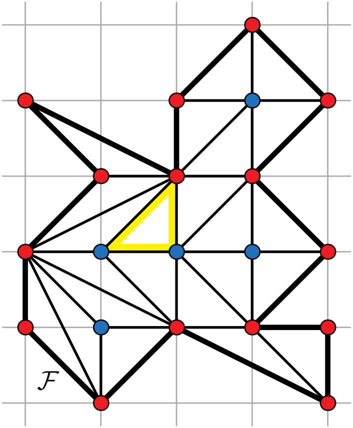
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

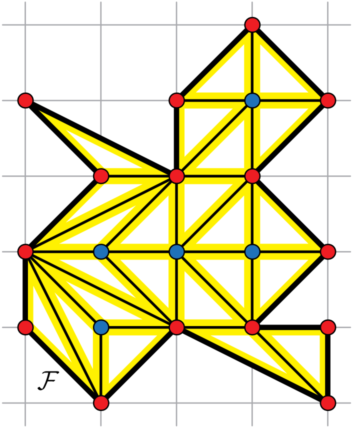
$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$

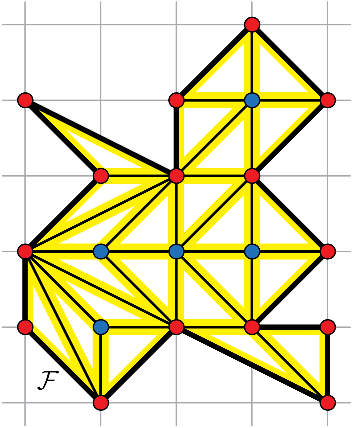
Co można powiedzieć o liczbie krawędzi tego grafu?



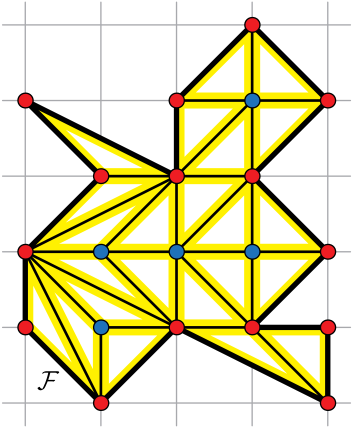
4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki.



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$

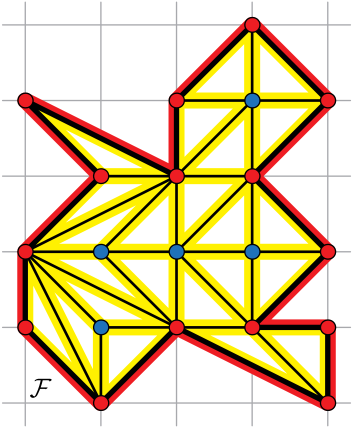


4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

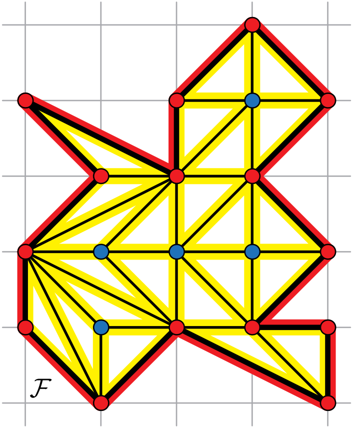
Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B.

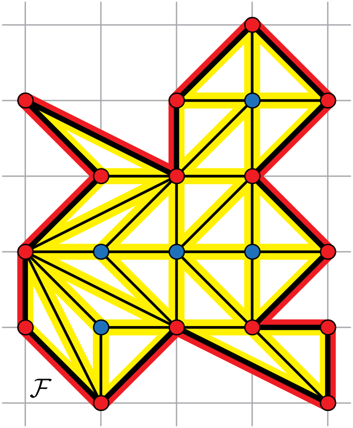
Krok 2: Liczymy boki małych trójkątów



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B. To oznacza, że

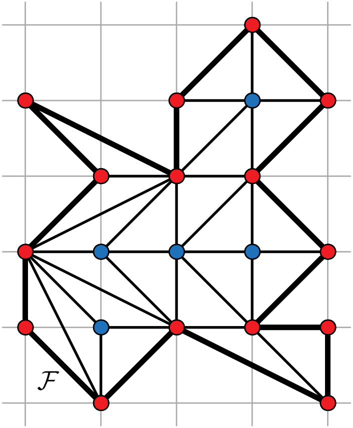
$$2K = 3T + B.$$



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

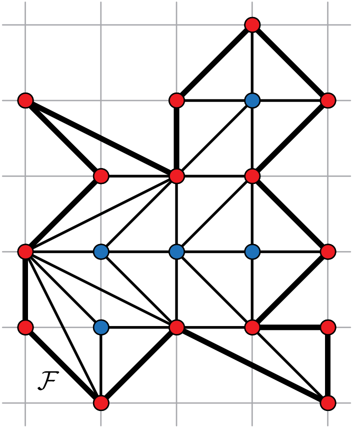
5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B. To oznacza, że

$$K = \frac{3T + B}{2}.$$



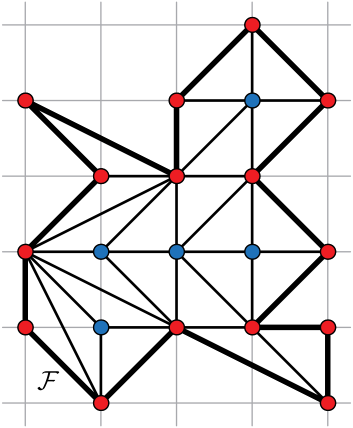
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = W - K + S.$$



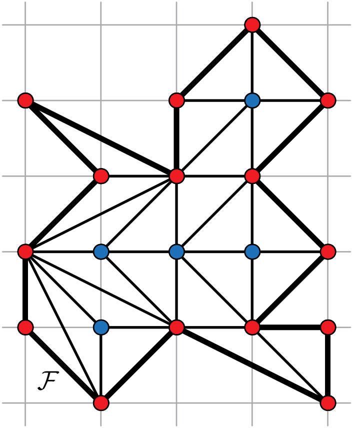
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T + 1.$$



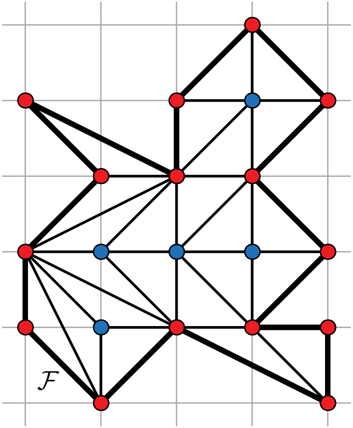
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$0 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T - 1.$$



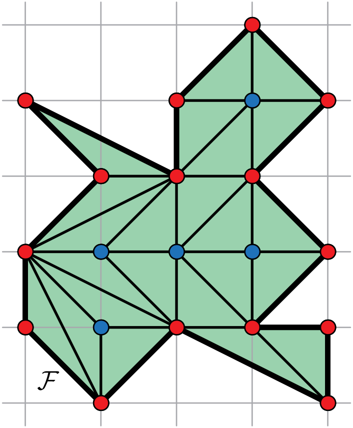
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + B - \frac{B}{2} - 1.$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

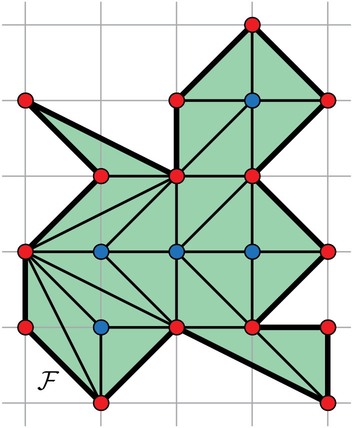
$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$.

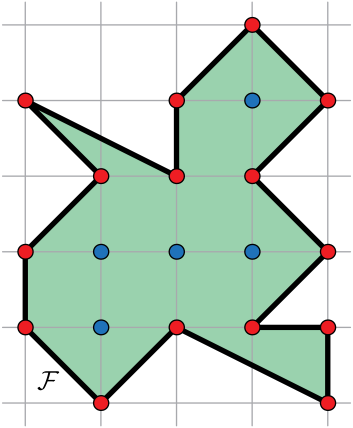


6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = \frac{T}{2}$$

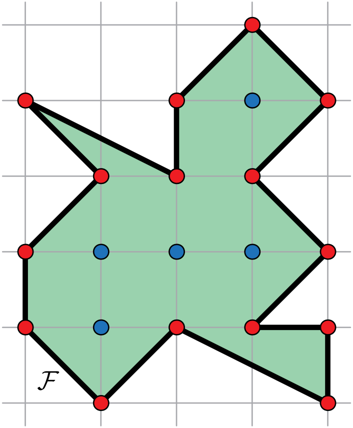


6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$

a to właśnie jest wzór Picka!

A teraz...

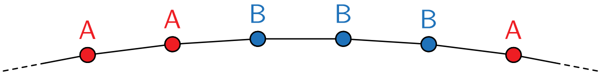
A teraz... szukamy „blefów”!

Zadanie 1. (7/FLOMG)

Na kartce narysowany jest 100-kąt foremny. Ania i Bartek grają w następującą grę: na zmianę, począwszy od Ani, kolorują po jednym wierzchołku 100-kąta — Ania na czerwono, a Bartek na niebiesko.

Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza pokoloruje trzy kolejne wierzchołki swoim kolorem; jeżeli nikomu się to nie uda — jest remis.

Wykaż, że Bartek zawsze może grać tak, aby uniemożliwić Ani zwycięstwo.



1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.

1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.
2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

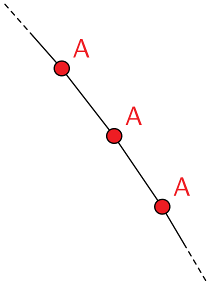
Czy jeśli oba są wolne, to któryś jest preferowany?

1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.

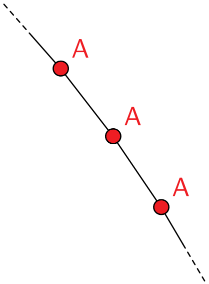
2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *obok* tego, który w danej rundzie został pokolorowany przez Anię.

Czy jeśli oba są wolne, to któryś jest preferowany? A co jeżeli już obydwa są zajęte?

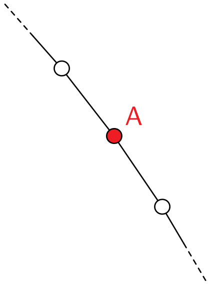
3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta.



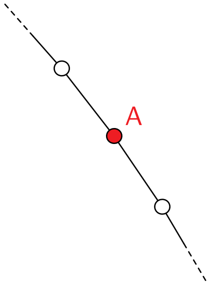
3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta.



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

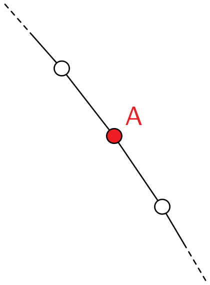


3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.



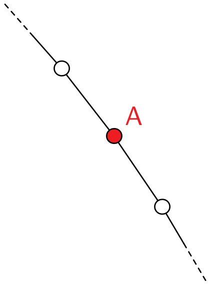
3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

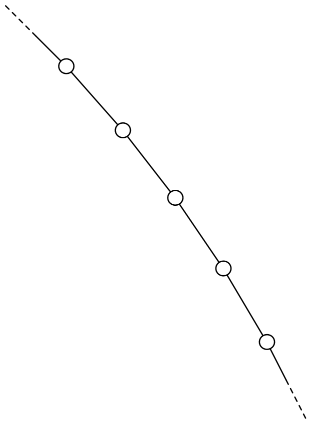
4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

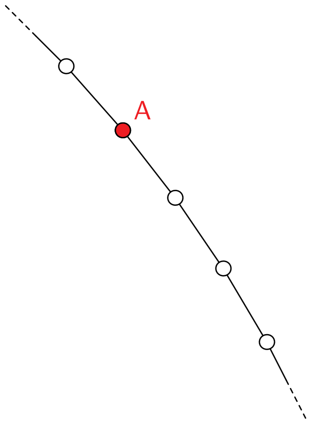
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

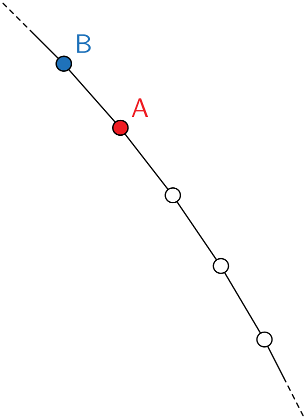
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

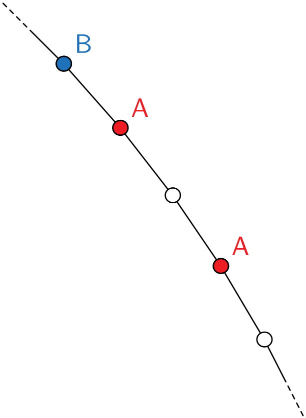
No chyba, że Ania właśnie wygrała. . .



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

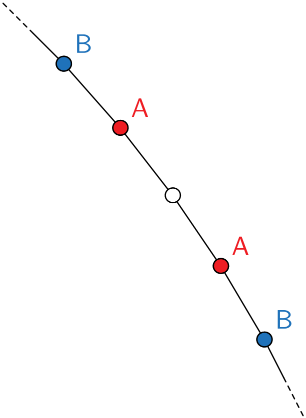
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

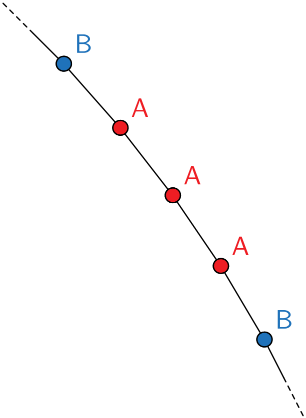
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

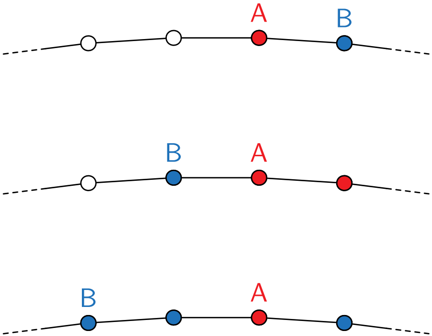
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków, uniemożliwiając Ani uzyskanie odpowiedniej trójki.

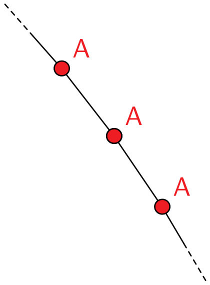
No chyba, że Ania właśnie wygrała...



1) *Rundą* nazwiemy każdą parę ruchów: ruch Ani i bezpośrednio po nim następujący ruch Bartka.

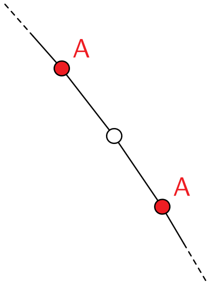
2) Wykażemy, że strategią nieprzegrywającą dla Bartka jest kolorowanie wierzchołka *późniejszego* (zegarowo) niż pokolorowany w danej rundzie przez Anię, *wcześniejszego* jeżeli późniejszy jest zajęty lub dowolnego innego, gdy obydwa są zajęte.

3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.



3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków lub Ania właśnie wygrała.



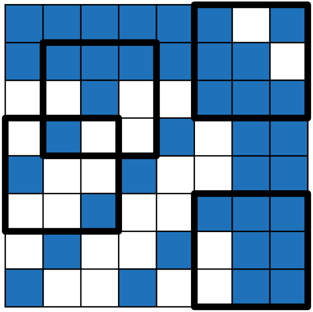
3) Przypuśćmy, że Ania wygrała, czyli pokolorowała na czerwono pewną trójkę sąsiednich wierzchołków danego 100-kąta. W pewnej rundzie pokolorowała środkowy.

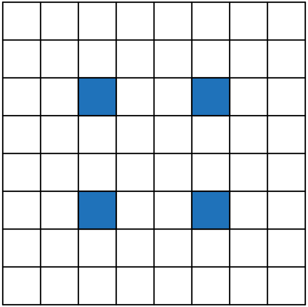
4) W tej samej rundzie Bartek pokolorował jeden z sąsiednich wierzchołków lub Ania właśnie wygrała.

5) To oznaczałoby, że środkowy wierzchołek pozostał biały po rundzie, w której Ania pokolorowała wcześniejszy z wierzchołków w swojej trójce...

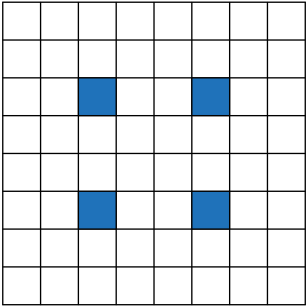
Każde pole tablicy o wymiarach 8×8 pomalowano na niebiesko lub biało. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach 3×3, złożonym z całych pól tej tablicy, znajduje się parzysta liczba białych pól.

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w całej tablicy? Odpowiedź uzasadnij.





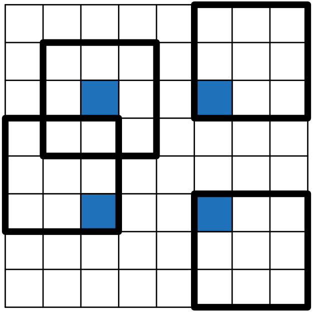
1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na biało).



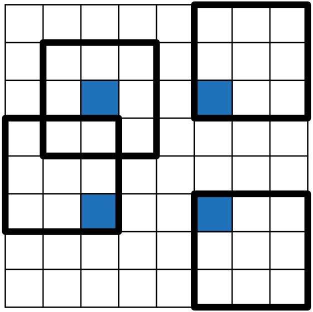
1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na biało).

2) Wówczas każdy kwadrat 3×3 zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.

Rozwiązanie zadania 2.



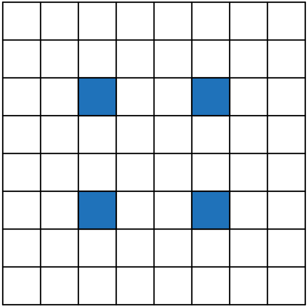
1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na biało).
2) Wówczas każdy kwadrat 3×3 zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.



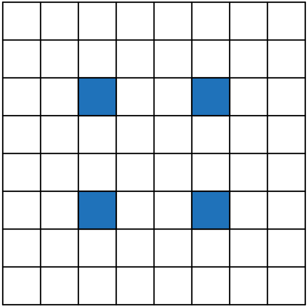
1) Na niebiesko pokolorujmy cztery pola, które pokazano na rysunku (pozostałe pola malujemy na biało).

2) Wówczas każdy kwadrat 3×3 zawiera *dokładnie* jedno niebieskie pole.

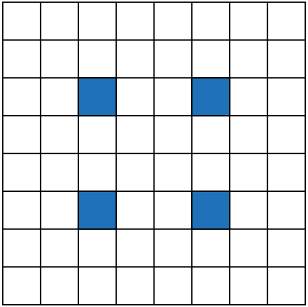
3) Z warunków zadania wynika, że w każdym takim kwadracie musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest co najwyżej osiem pól białych).



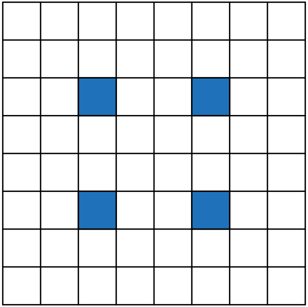
4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3.



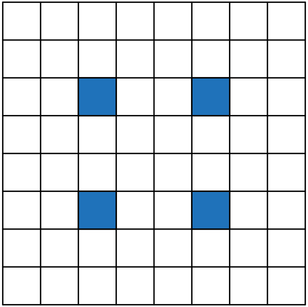
4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach.



4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.

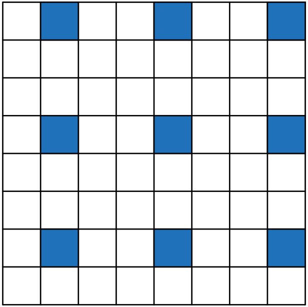


4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.



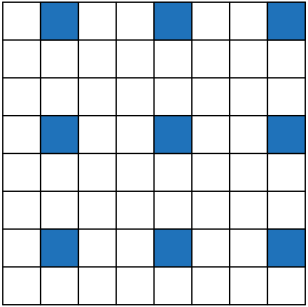
4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.

Nie wynika.



4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.

Nie wynika.



4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.

Nie wynika. Rysunku nie da się *poprawić*, ale to nie znaczy, że nie ma lepszego!

Rozwiązanie zadania 2.


Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nr 8 marzec 2013

www.omg.edu.pl

Maksymalny, ale czy największy?

W zawodach drugiego stopnia tegorocznej edycji OMG wiele kłopotów sprawiło zawodnikom zadanie 4. Przypomnijmy jego treść:

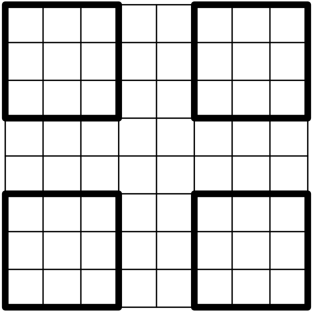
Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

Wiele rozwiązań zawierało pewne powtarzające się błędy. Oto jedno z błędnych rozumowań, które można było znaleźć w pracach uczestników.

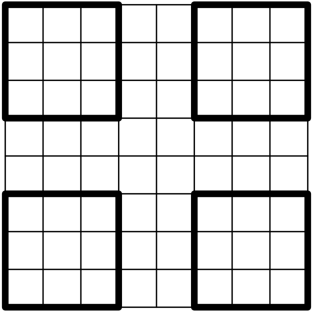
W. Guzicki
„Maksymalny, ale czy największy?”
Kwadrat nr 8 (marzec 2013)

4) Zaprezentowane na rysunku kolorowanie minimalizuje więc liczbę niebieskich pól w każdym z kwadratów 3×3. Przemalowanie dowolnego z tych pól na biało skutkuje zaistnieniem kwadratu 3×3 o samych białych polach. Wynika z tego, że najmniejsza możliwa liczba niebieskich pól w tablicy jest nie mniejsza od 4.

Nie wynika. Rysunku nie da się *poprawić*, ale to nie znaczy, że nie ma lepszego!

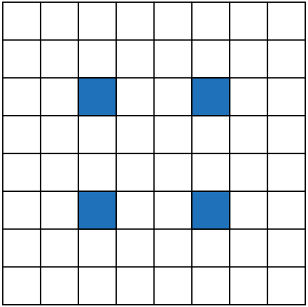


1) Z warunków zadania wynika, że w każdym z wyróżnionych kwadratów musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest co najwyżej osiem pól białych).



1) Z warunków zadania wynika, że w każdym z wyróżnionych kwadratów musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest co najwyżej osiem pól białych).

2) Wyróżnione kwadraty pokrywają *różne* pola, wobec czego w całej tablicy są co najmniej 4 pola niebieskie.

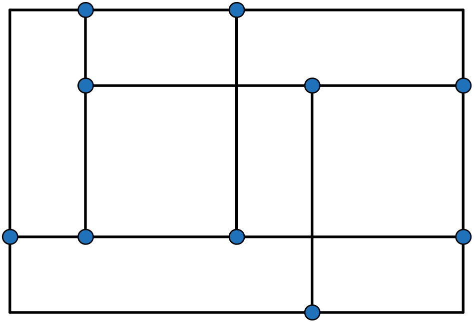


1) Z warunków zadania wynika, że w każdym z wyróżnionych kwadratów musi być *co najmniej* jedno niebieskie pole (bo w każdym jest co najwyżej osiem pól białych).

2) Wyróżnione kwadraty pokrywają *różne* pola, wobec czego w całej tablicy są co najmniej 4 pola niebieskie.

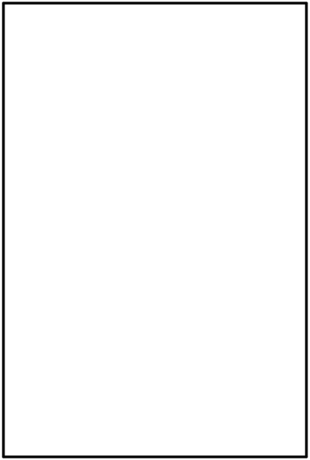
3) Rysunek pokazuje, że liczba 4 jest osiągalna, jest więc odpowiedzią na postawione w zadaniu pytanie.

Prostokąt podzielono odcinkami równoległymi do boków na *małe* prostokąty. Następnie wyróżniono każdy punkt, który jest wierzchołkiem dokładnie dwóch małych prostokątów. Udowodnij, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.



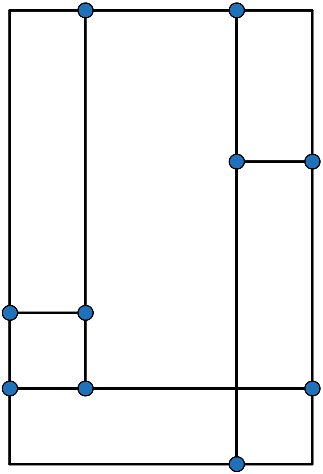
1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.

Rozwiązanie zadania 3.



1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.

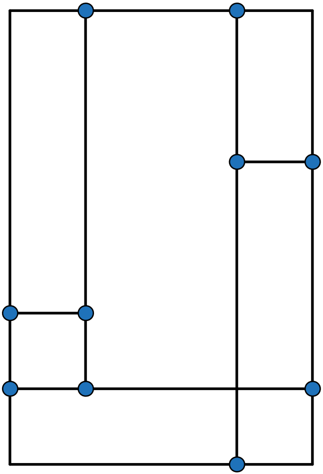
2) Początkowo, gdy prostokąt nie jest podzielony na mniejsze prostokąty, liczba wyróżnionych punktów jest parzysta (gdyż jest równa zero).



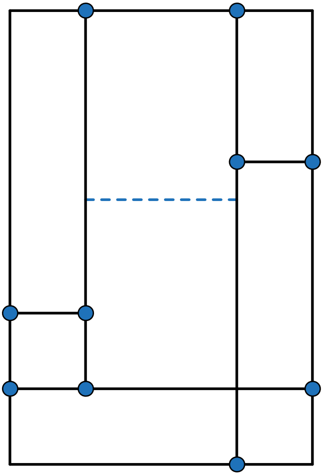
1) Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę małych prostokątów obecnych w podziale.

2) Początkowo, gdy prostokąt nie jest podzielony na mniejsze prostokąty, liczba wyróżnionych punktów jest parzysta (gdyż jest równa zero).

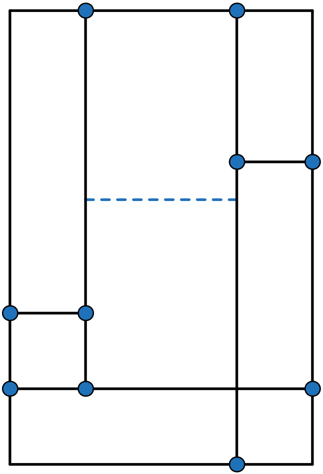
3) Załóżmy, że prostokąt jest podzielony na k małych prostokątów ($k \geqslant 1$) w taki sposób, że liczba wyróżnionych punktów jest parzysta.



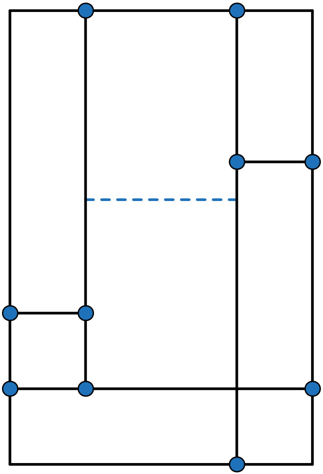
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów.



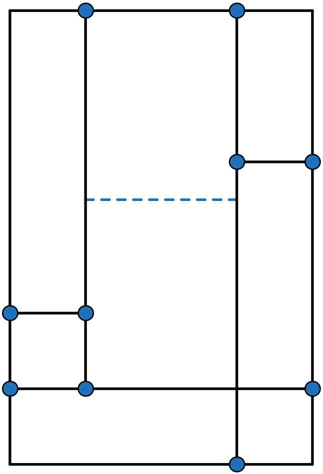
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów.



4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k + 1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

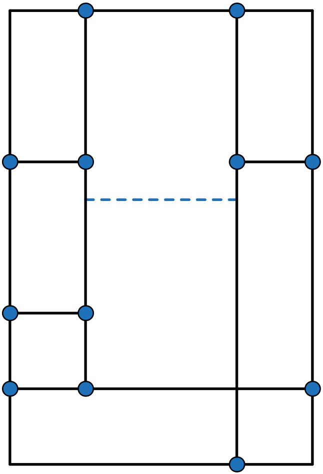


4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.



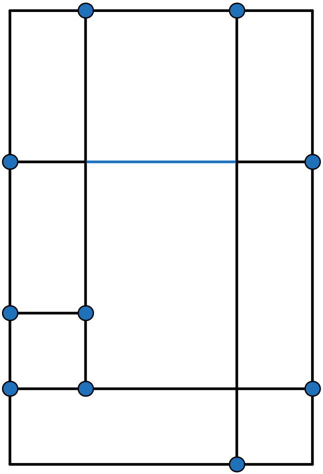
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

Może się też zmniejszyć o dwa...



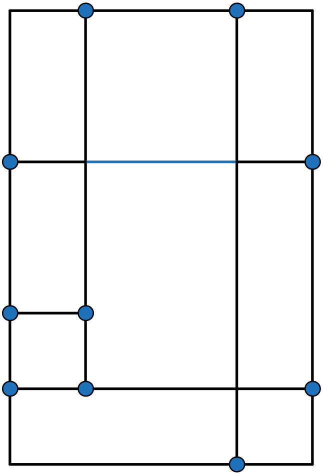
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

Może się też zmniejszyć o dwa...



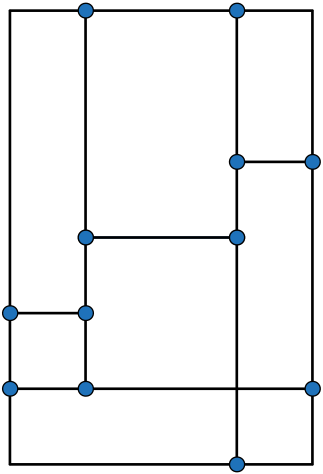
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k + 1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

Może się też zmniejszyć o dwa...



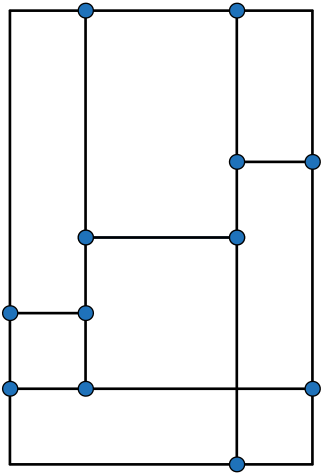
4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

Może się też zmniejszyć o dwa...
Ale to też nie zmienia parzystości.



4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

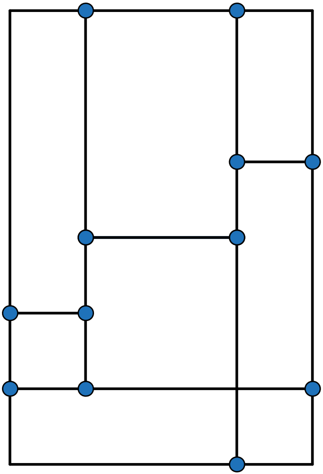
5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.



4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.

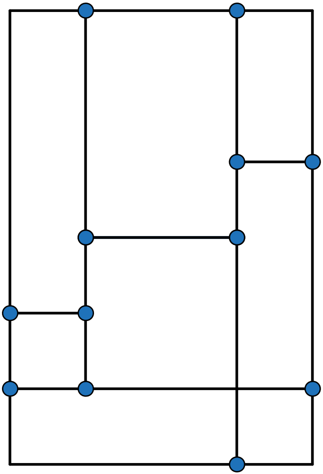
6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na n małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.



4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.

6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na n małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.

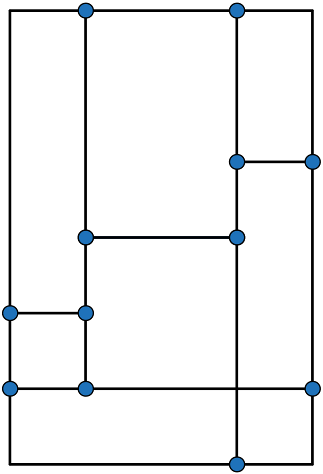


4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.

6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na n małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.

Dlaczego uzyskamy wszystkie możliwe podziały?

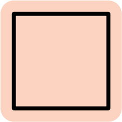


4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

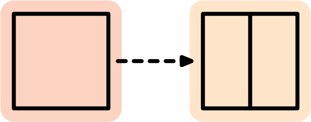
5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.

6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na n małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.

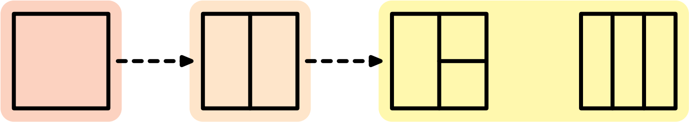
Czy uzyskamy wszystkie możliwe podziały?



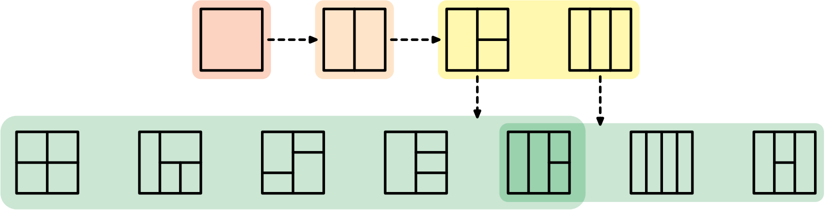
Czy uzyskamy wszystkie podziały?

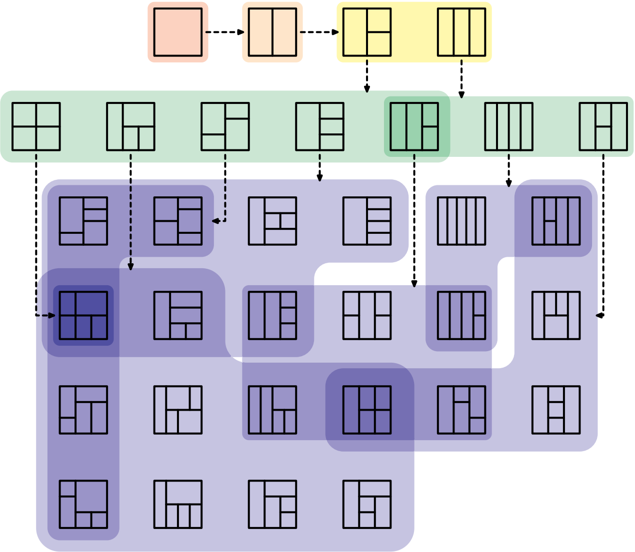


Czy uzyskamy wszystkie podziały?

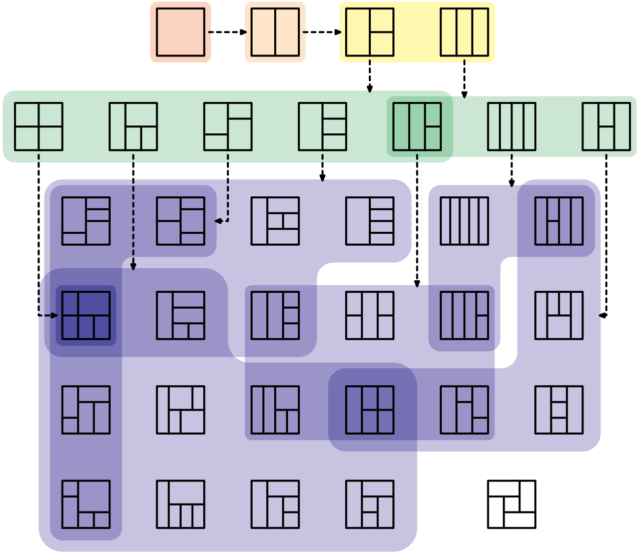


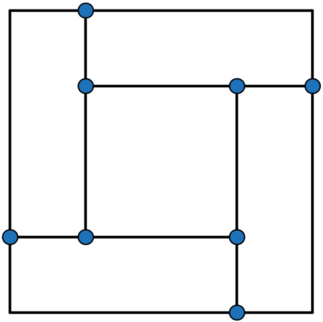
Czy uzyskamy wszystkie podziały?





Czy uzyskamy wszystkie podziały?



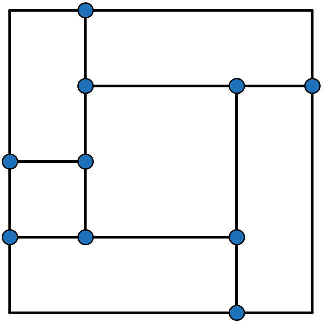


4) Dodajmy do podziału odcinek, uzyskując podział na $k+1$ prostokątów. Wówczas liczba wyróżnionych punktów nie zmieni się lub zwiększy się o dwa.

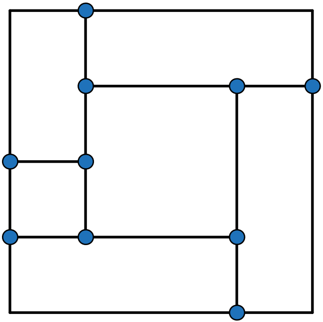
5) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie uległa zmianie, więc liczba wyróżnionych punktów w nowym podziale jest parzysta.

6) Na mocy zasady indukcji, w każdym podziale na n małych prostokątów jest parzysta liczba punktów wyróżnionych.

Czy uzyskamy wszystkie możliwe podziały? Nie.



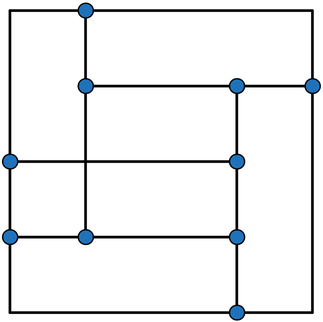
1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.



1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.

2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.

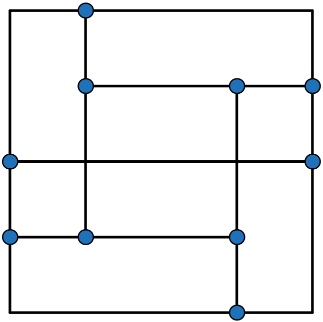
Rozwiązanie zadania 3.



1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.

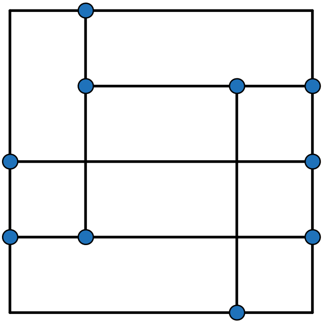
2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.

Rozwiązanie zadania 3.



1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.

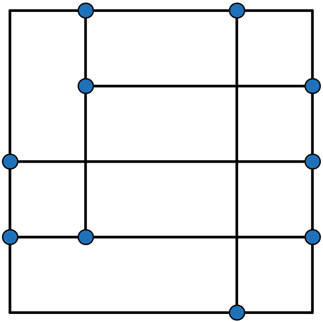
2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.



1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.

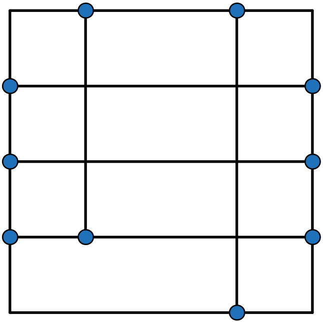
2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.

Rozwiązanie zadania 3.



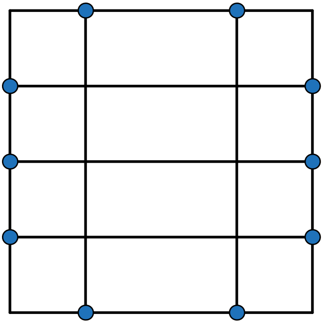
1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.

2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.



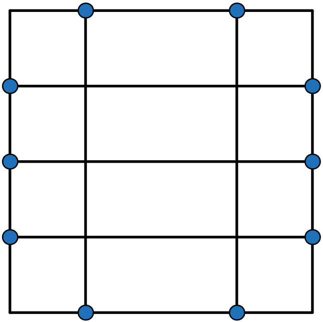
1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.

2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.



1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.

2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.



1) Parzystość liczby wyróżnionych punktów nie ulega zmianie, gdy dodajemy nowy odcinek podziału.

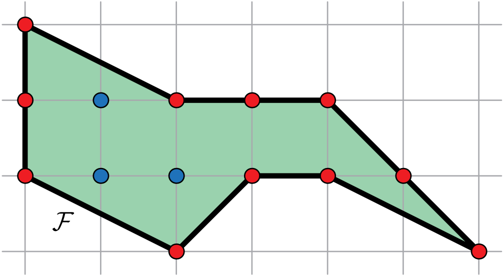
2) Weźmy dowolny podział i dodawajmy odcinki aż do otrzymania *kratki*.

3) Liczba wyróżnionych punktów jest parzysta, więc była taka także w wyjściowym podziale.

Niech $\mathcal{F}$ będzie wielokątem kratowym. Przez B oznaczmy liczbę punktów kratowych znajdujących się na obwodzie (brzegu) wielokąta $\mathcal{F}$, a przez I — liczbę punktów kratowych znajdujących się w jego wnętrzu.

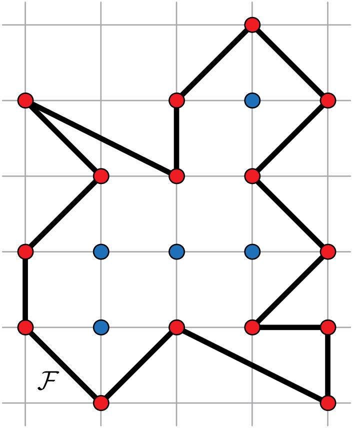
Udowodnij, że pole P wielokąta $\mathcal{F}$ wyraża się wzorem

$$P = I + B/2 - 1.$$

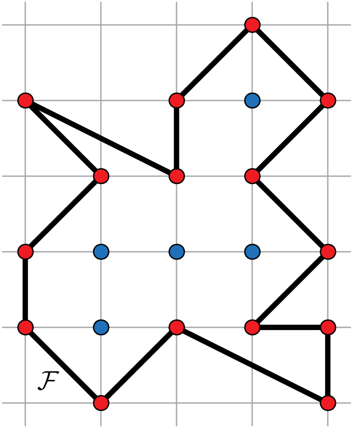


Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty

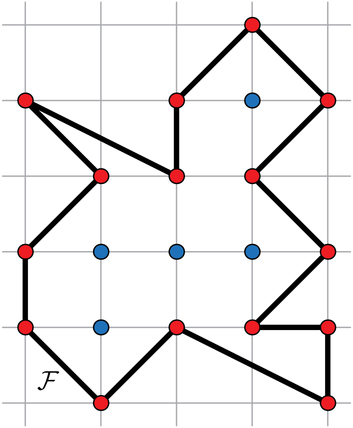
1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

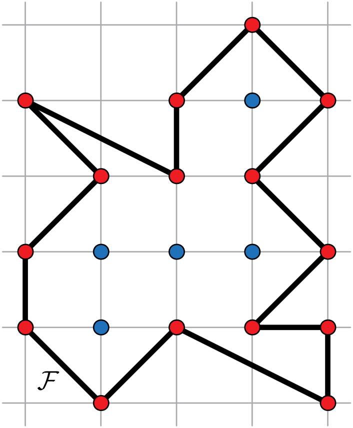


1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

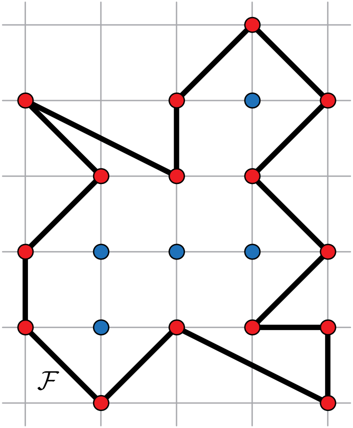
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

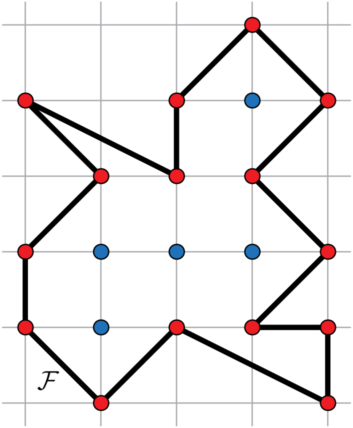
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty.

Dlaczego taki podział istnieje?



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

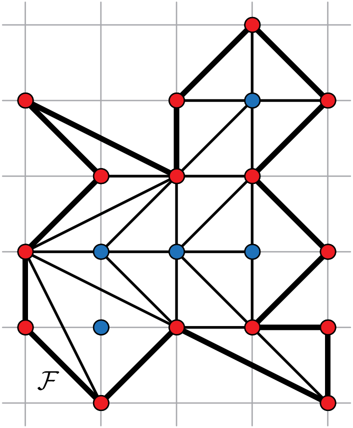
2') Spośród wszystkich podziałów $\mathcal{F}$ na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2') Spośród wszystkich podziałów $\mathcal{F}$ na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

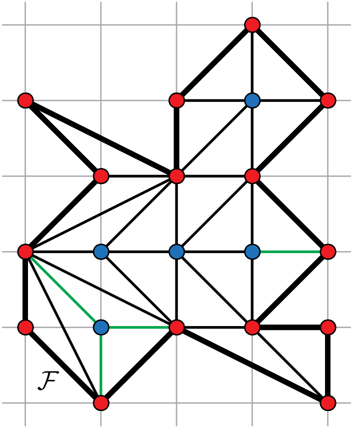
Gdyby któryś z trójkątów nie był mały, podział moglibyśmy zagęścić. . .



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2') Spośród wszystkich podziałów $\mathcal{F}$ na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

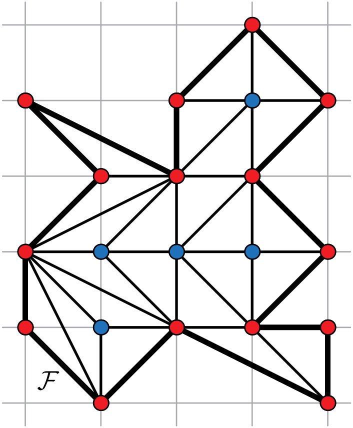
Gdyby któryś z trójkątów nie był mały, podział moglibyśmy zagęścić. . .



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2') Spośród wszystkich podziałów $\mathcal{F}$ na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

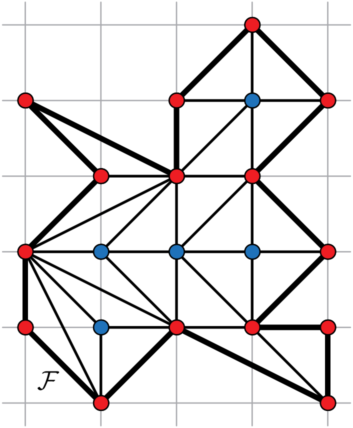
Gdyby któryś z trójkątów nie był mały, podział moglibyśmy zagęścić. . .



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

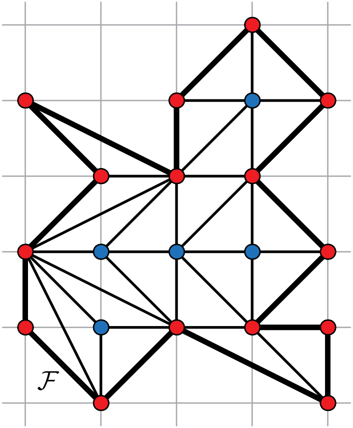
Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski

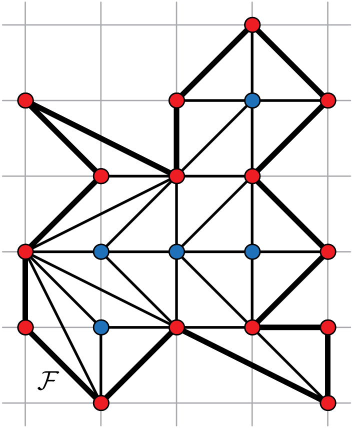


1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

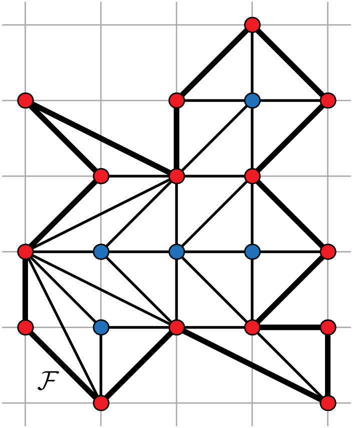
$$S = T + 1,$$



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.
3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

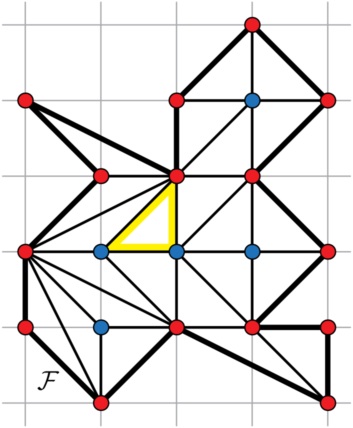
2) Podzielmy go na *małe* trójkąty. Oznaczmy ich liczbę przez T.

3) Otrzymaliśmy spójny graf płaski, w którym

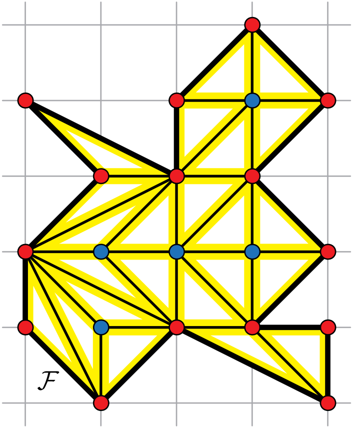
$$S = T + 1,$$

$$W = I + B.$$

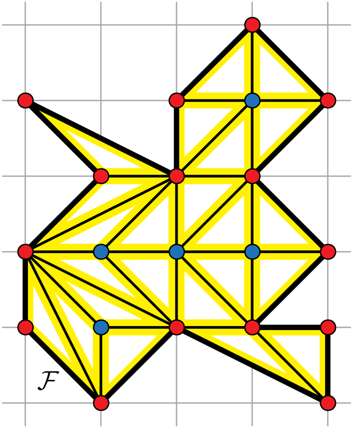
Co można powiedzieć o liczbie krawędzi tego grafu?



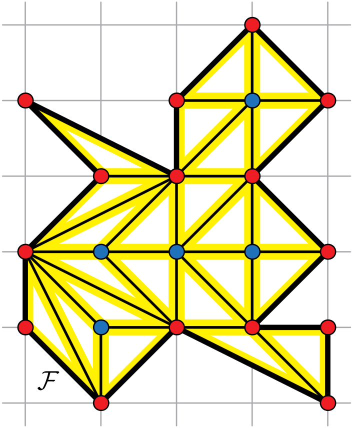
4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki.



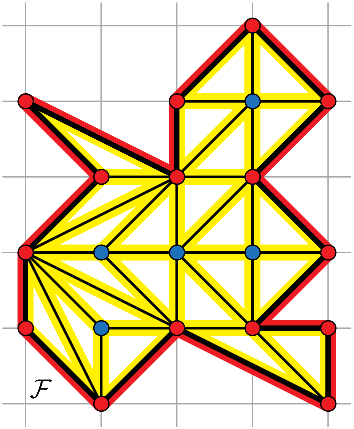
4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie

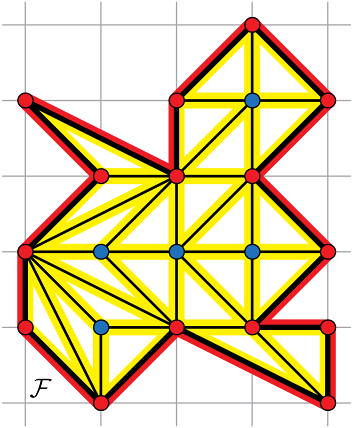


4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

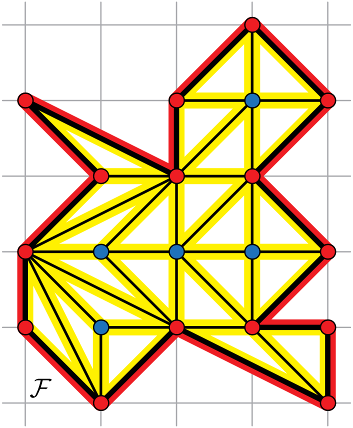
5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B.



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B. To oznacza, że

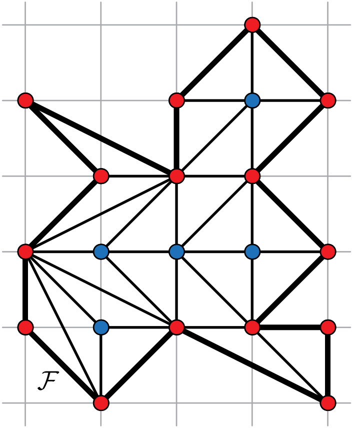
$$2K = 3T + B.$$



4) Każdy *mały* trójkąt ma 3 boki. Wobec tego łączna liczba boków wszystkich małych trójkątów to $3T$, przy czym boki leżące na obwodzie $\mathcal{F}$ policzyliśmy jednokrotnie, a wszystkie pozostałe — dwukrotnie.

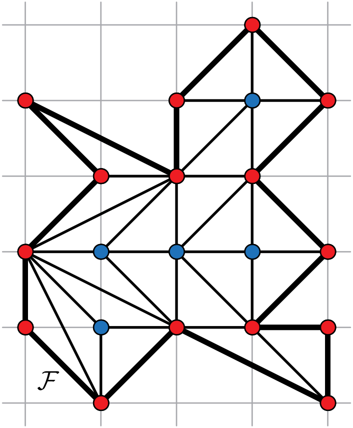
5) Wszystkich boków małych trójkątów leżących na obwodzie $\mathcal{F}$ jest B. To oznacza, że

$$K = \frac{3T + B}{2}.$$



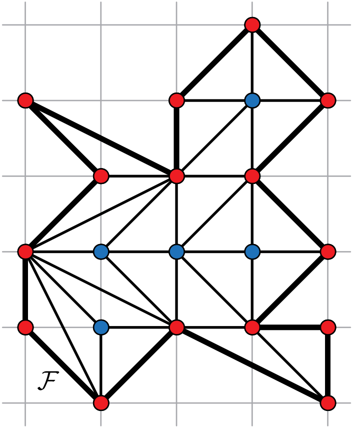
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = W - K + S.$$



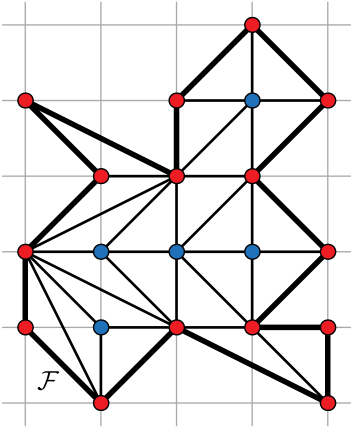
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$2 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T + 1.$$



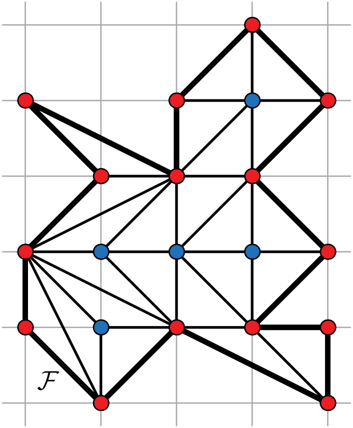
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$0 = I + B - \frac{3T + B}{2} + T - 1.$$



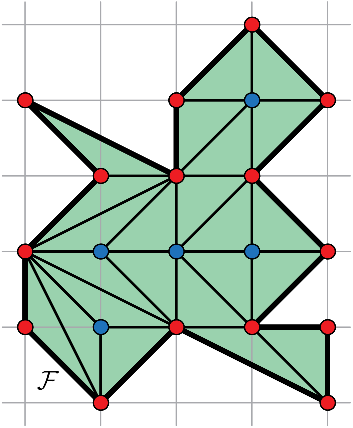
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + B - \frac{B}{2} - 1.$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

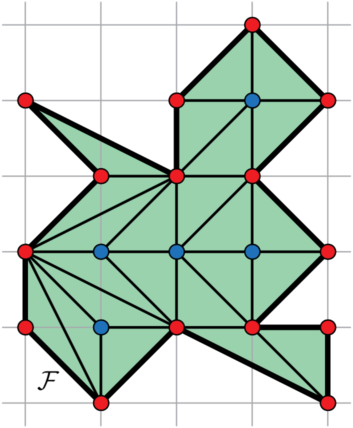
$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$



6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$.

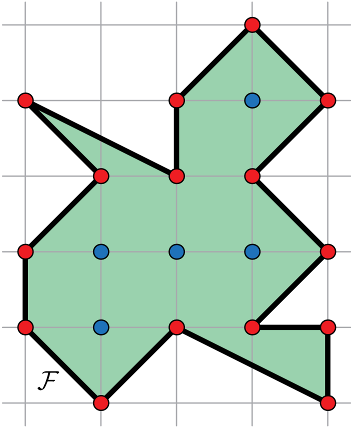


6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = \frac{T}{2}$$

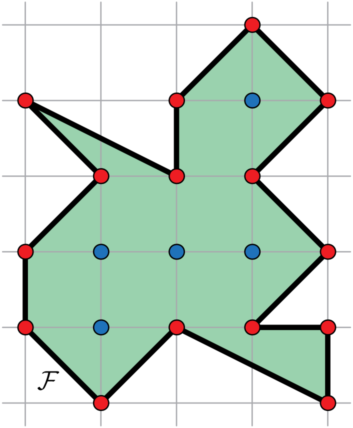


6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$



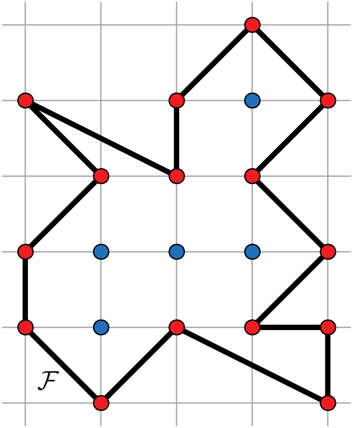
6) Otrzymane równości $S = T + 1$, $W = I + B$, $K = \frac{3T+B}{2}$ podstawiamy do wzoru Eulera:

$$\frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

7) Skoro pole każdego z *małych* trójkątów jest równe $\frac{1}{2}$, to pole P wielokąta $\mathcal{F}$ jest równe $\frac{T}{2}$. Wobec tego

$$P = I + \frac{B}{2} - 1,$$

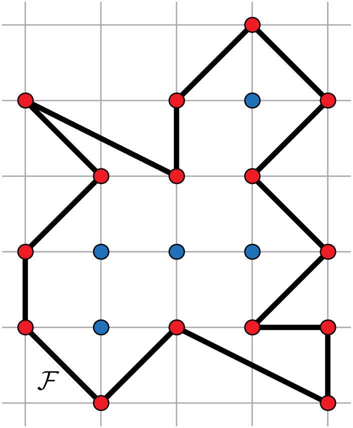
a to właśnie jest wzór Picka!



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2') Spośród wszystkich podziałów $\mathcal{F}$ na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

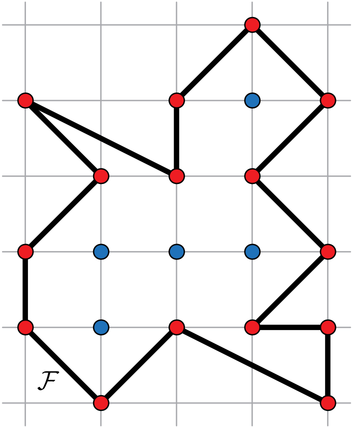
Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2') Spośród wszystkich podziałów $\mathcal{F}$ na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty

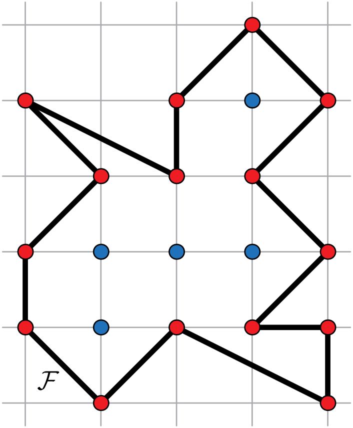


1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2') Spośród wszystkich podziałów $\mathcal{F}$ na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

Skąd wiemy, że mamy z czego wybierać?

Krok 1: Dzielimy na małe trójkąty



1) Rozważmy dowolny wielokąt kratowy $\mathcal{F}$ o parametrach B, I.

2') Spośród wszystkich podziałów $\mathcal{F}$ na trójkąty o wierzchołkach w punktach kratowych wybierzmy ten, w którym liczba trójkątów jest największa z możliwych.

Skąd wiemy, że mamy z czego wybierać?

Każdy wielokąt ma triangulację.

13 18 32 44 48 67 170

Blefy olimpijskie

Dziękuję Państwu za uwagę!