Wola Ducka, 25 sierpnia 2019

Kwantowe pomyłki Bosego i Einsteina

Krzysztof Pawłowski

Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

LX Szkoła Matematyki Poglądowej

Plan Wykładu

Wstęp

Paradoks Gibbsa

Mechanika klasyczna I kwantowa
Mechanika statystyczna
Paradoks Gibbsa

„Pomyłka" Bosego, a nierozróżnialność cząstek

Jak Bose zliczał cząstki.
Rola Einsteina
Konsekwencje – kondensat Bosego-Einsteina

„Pomyłka" Einsteina, a nielokalność mechaniki kwantowej

Paradoks Einsteina-Podolskiego-Rosena

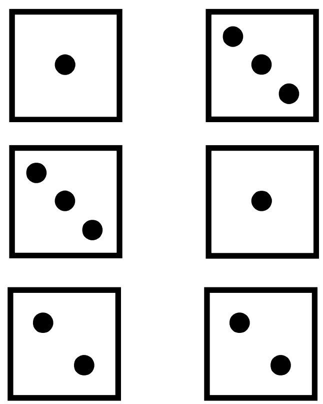
Statystyka, a nierozróżnialność

Zadanie

Rzucamy dwoma kośćmi.
Na ile sposobów można wyrzucić **w sumie** 4 oczka?

Rozumowanie 1: Trzy możliwści

1. możliwość
2. możliwość
3. możliwość

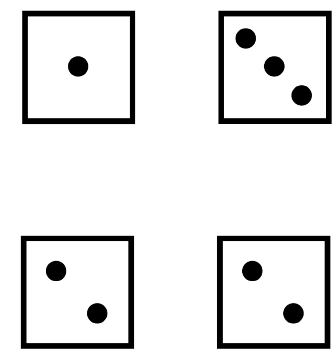


?

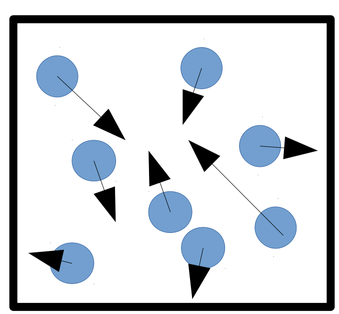
Rozumowanie 2: Dwie możliwości

. możliwość

. możliwość



Temat tego wykładu: N atomów w sześciennym pudełku o boku L..



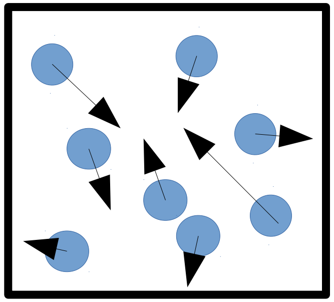
Mechaniki: klasyczna i kwantowa

Klasycznie:

Stan układu = położenia oraz prędkości wszystkich cząstek.

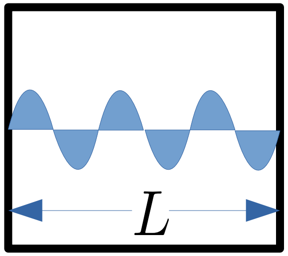
$$\boldsymbol{r}_i = (x_i,\, y_i,\, z_i) \qquad \boldsymbol{v}_i = (v_{x,i},\, v_{y,i},\, v_{z,i},)$$

$$i = 1,\, 2 \ldots N$$



Energia: $$E = \frac{1}{2} m \left(\boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2 + \ldots \boldsymbol{v}_N^2 \right)$$

Kwantowo:



$$v_x = n_x \left(\frac{\pi}{L}\right) \frac{\hbar}{m}$$

Prędkości - zdyskretyzowane

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{\pi \hbar}{mL} (n_{x,i},\, n_{y,i},\, n_{z,i})$$

$$n_{x,i},\, n_{y,i},\, n_{z,i} \in \mathbb{N}$$

Energia $$E = \frac{1}{2} m \left(\boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2 + \ldots \boldsymbol{v}_N^2 \right) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \sum_{i=1}^{N} \left(n_{x,i}^2 + n_{y,i}^2 + n_{z,i}^2 \right)$$

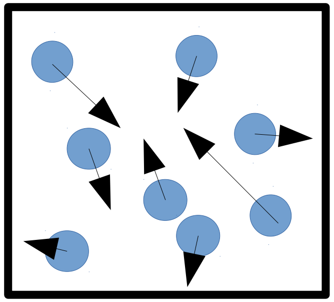
Mechanika statystyczna

Termodynamika

Ciśnienie (p),

Temperatura (T),

Energia(E), Entropia (S), ciepło właściwe etc



Model mikroskopowy

Prędkości cząstek, położenia, Energia(E), Entropia (S)

> 1850 r (Clausius, Boltzmann, Gibbs)

Prędkości, masy, objętość -> częstość i "siły" zderzeć atomów ze ściankami → ciśnienie

Prędkości, masy → energia kinetyczna → temperatura

$\Omega(N, E, L)$ – liczba sposobów na jaki można otrzymać całkowitą energię E

Mikrostan - jeden z (wielu) możliwych stanów układu o parametrach N, E, L

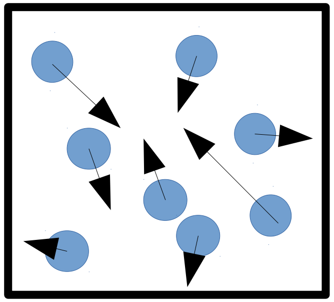
Mechanika statystyczna

Termodynamika

Ciśnienie (p),

Temperatura (T),

Energia(E), Entropia (S), ciepło właściwe etc



Model mikroskopowy

Prędkości cząstek, położenia, Energia(E), Entropia (S)

> 1850 r (Clausius, Boltzmann, Gibbs)

Prędkości, masy, objętość -> częstość i "siły" zderzeć atomów ze ściankami → ciśnienie

Prędkości, masy → energia kinetyczna → temperatura

$\Omega(N,E,L)$ Liczba sposobów na jaki można otrzymać całkowitą energię E

ENTROPIA

$$S(N,E,L) = k_B \ln \Omega(N,E,L)$$

$$\frac{\partial S(N,E,L)}{\partial E}\Big|_{N,L} = \frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial S(N,E,L)}{\partial V}\Big|_{E,N} = \frac{p}{T}$$

Wszystkie własności termodynaczmine

Gaz doskonały

Typowy problem w mechanice statystycznej:

Układ ma całkowitą energię E. Na ile sposobów Ω układ może osiągnąć taką energię?

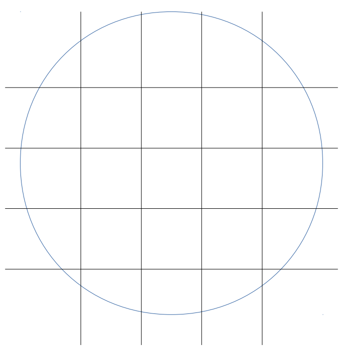
Przykład: Gaz doskonały

$$E = \frac{1}{2} m \left(\boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2 + \dots \boldsymbol{v}_N^2 \right) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \sum_{i=1}^{N} \left(n_{x,i}^2 + n_{y,i}^2 + n_{z,i}^2 \right) \qquad (1)$$

Ile rozwiązań w liczbach całkowitych **n** ma równanie (1)??

Ścisłe rozwiązywanie – bardzo trudne

$$\sum_{i=1}^{3N} n_i^2 = \frac{2mEL^2}{\hbar^2 \pi^2} =: R^2$$



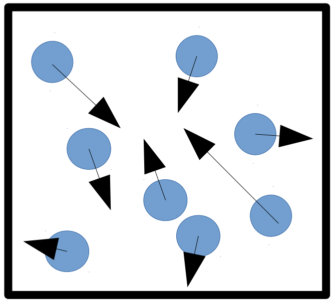
Przybliżone:

$$\Omega(R, N) \approx \frac{\pi^{3N/2} R^{3N}}{2^{3N} (3N/2)!}$$

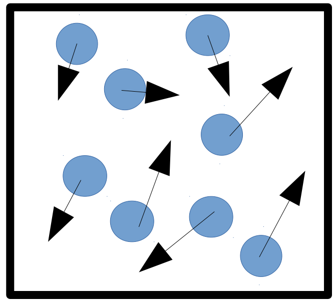
$$S(N, E, L) \approx k_B \ln \Omega(N, E, L) \propto N k_B \ln \left(a \frac{V E^{3/2}}{N} \right) + 3N k_B/2 \longrightarrow pV/T = \mathrm{const}$$

Paradoks Gibbsa

2 kopie układu

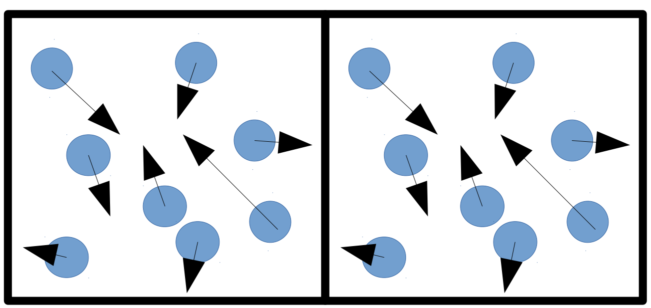


(E, V, N) → S



(E, V, N) → S

$$S(N, E, L) \propto N \ln \left(a \frac{VE^{3/2}}{N} \right) + 3N/2$$



$$S_2(2N, 2E, 2V) \propto 2N \ln \left(a \frac{V(2E)^{3/2}}{N} \right) + 3N$$

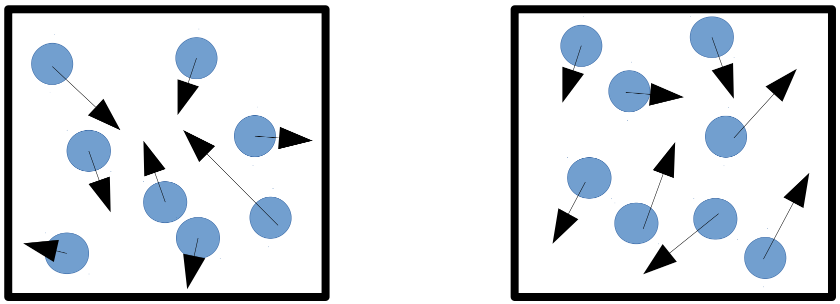
$$S_2 \neq 2S$$

Wynik niezgodny z termodnamiką

Wartość całkowitej entropii zalezy od tego, gdzie umieścimy "hipotetyczną" barierę w dużym pojemniku.

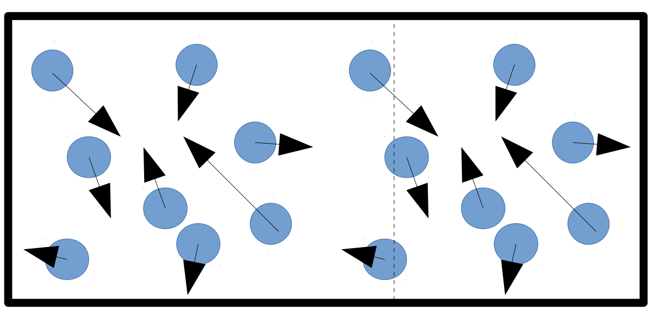
Paradoks Gibbsa

2 kopie układu



(E, V, N) → S (E, V, N) → S

$$S(N,E,L) \propto N \ln\left(a\frac{VE^{3/2}}{N}\right) + 3N/2$$

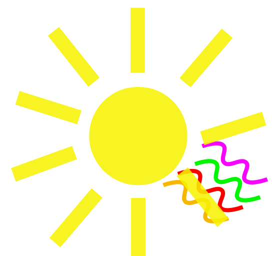


Wartość całkowitej entropii zalezy od tego, gdzie umieścimy "hipotetyczną" barierę w dużym pojemniku.

Satyendra Nath Bose: Prawo Plancka

Satyendra Nath Bose (1894-1974)

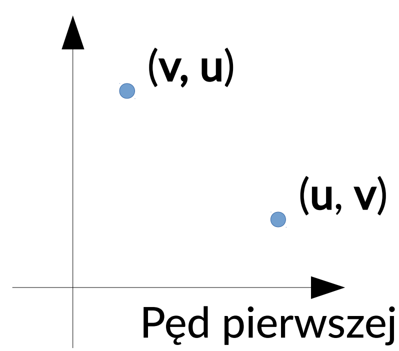
1923?
Wykład pokazujacy paradoks poddobny do paradoksu Gibbsa, w prawie Plancka.



<u>Prawo Plancka:</u>
Wzór na ilość energii emitowanej w danej częstości.

Przykład:
2 cząstki, o prędkościach
u oraz **v**

Prędkość drugiej cząstki



Pęd pierwszej czątki

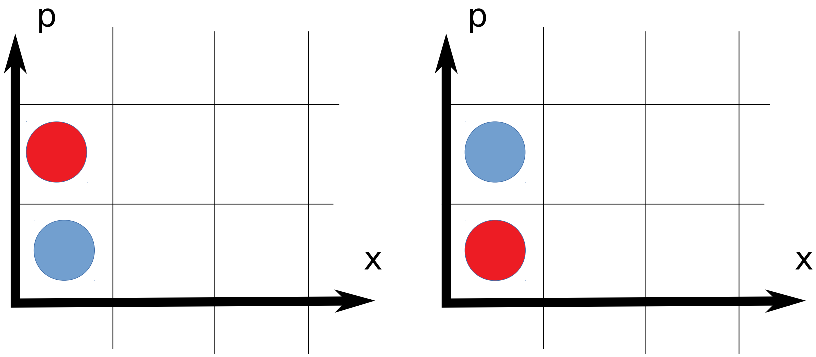
Poprzednie Rozważania:
Dwie możliwości.

Rozważania Bosego:
Jedna możliwość!

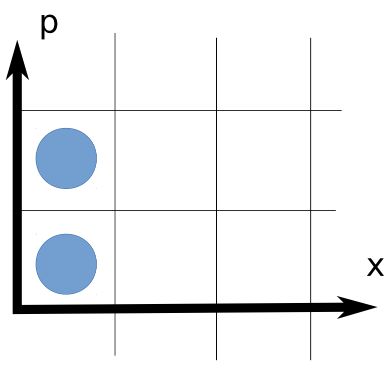
Satyendra Nath Bose: Prawo Plancka

1923-1924 Wykład w Dhaka, błąd oraz artykuł naukowy

Cząstki nierozróżnialne



Cząstki nierozróżnialne



Satyendra Nath Bose

Potraktowanie cząstek jako nierozróżnialnych – zgodność z prawem Plancka!

Artykuł o nowym wyprowadzeniu prawa Plancka

Satyendra Nath Bose: Prawo Plancka

1923-1924 Artykuł odrzucony!

1923-1924 List do A. Einsteina

Respected Sir, I have ventured to send you the accompanying article for your perusal and opinion. I am anxious to know what you think of it.(..) I do not know sufficient German to translate the paper. If you think the paper worth publication I shall be grateful if you arrange for its publication in Zeitschrift für Physik. Though a complete stranger to you, I do not feel any hesitation in making such a request. (..). I do not know whether you still remember that somebody from Calcutta asked your permission to translate your papers on Relativity in English. You acceded to the request. The book has since been published. I was the one who translated your paper on Generalised Relativity.

Satyendra Nath Bose

1924 Artykuł, po tłumaczeniu oraz rekomendacji Einsteina, przyjęty do Zeitschrift fuer Physik

Reakcje:

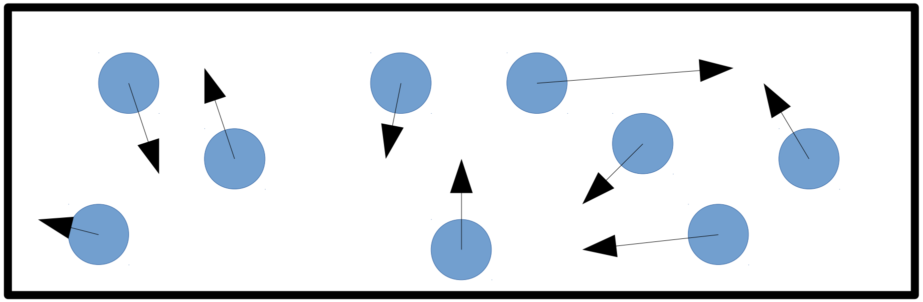
List Einsteina do Ehrenfesta (1924):

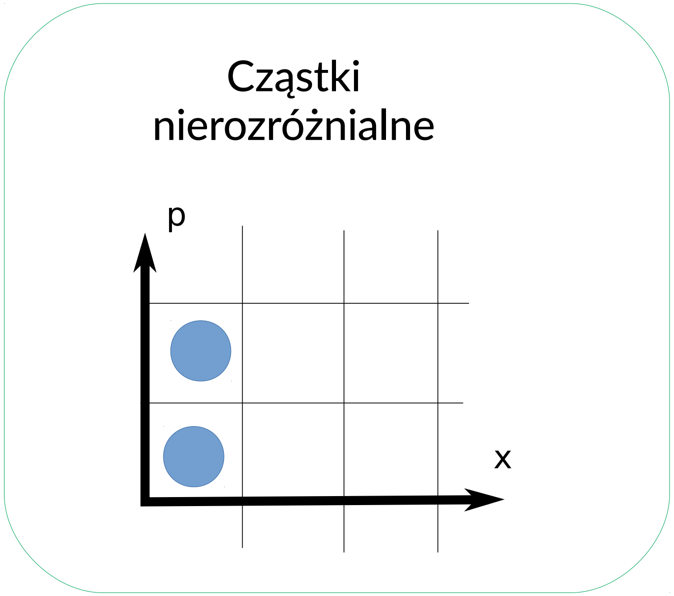
Eleganckie wyprowadzenie, ale podstawa jest niejasna.(..) Bóg wie czy jest to prawda.

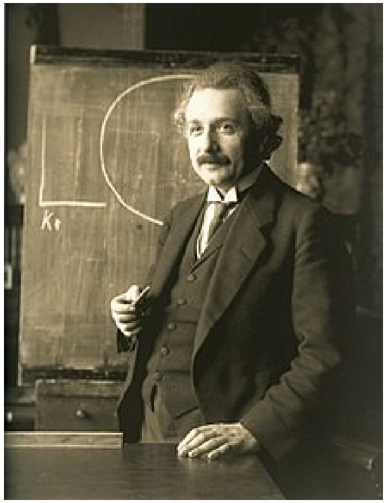
List Ehrenfesta do Ioffego: “Einstein jest z nami!” “Bose's disgusting work”

Wkład Einsteina

Gaz doskonały w równowadze







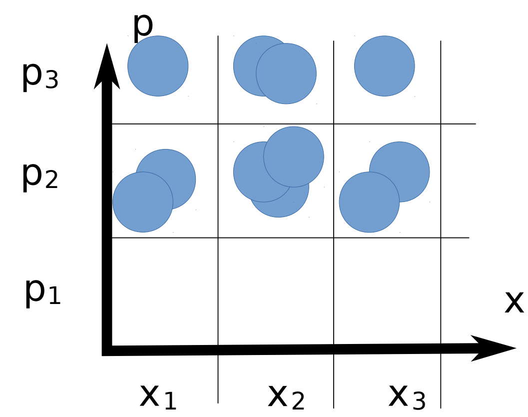
1924 / 1925 r - 3 artykuły A. Einsteina w ciągu roku.

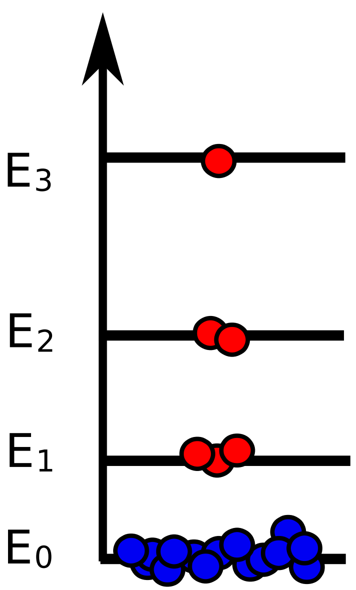
Kondensacja Bosego-Einsteina

Krytyczna gęstość

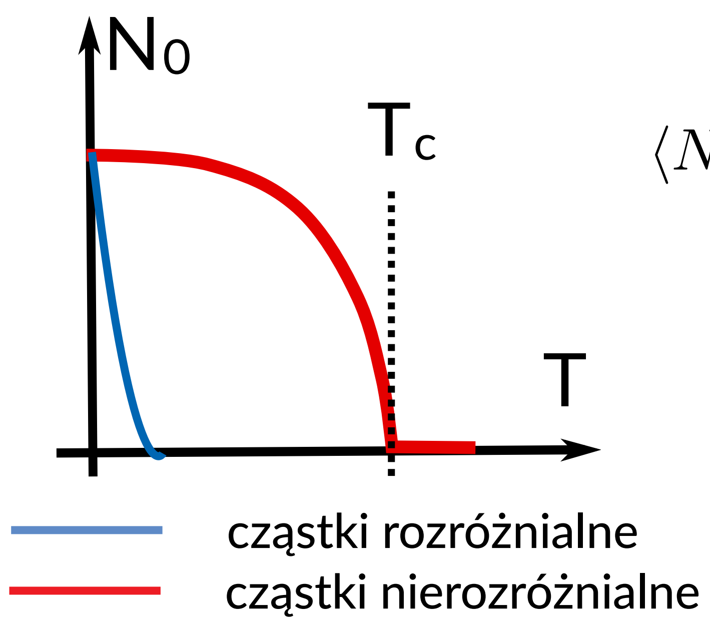
$$\frac{N_c^{\mathrm{ex}}}{V}\left(\frac{2\pi\,\hbar^2}{m\,k_B\,T}\right)^{3/2} = \zeta(3/2) \approx 2.612$$

Powyżej gęstosci krytycznej:
każdy dodatkowy atom musi być nieruchomy!





"Wysoka" Temperatura (k_B T >> E_1)



$$\langle N_0\rangle = N\left(1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right)$$

Krytyka E. Schroedingera

Wariancja liczby nieruchomych atomów

Granica zerowej temperatury:

$$\langle N_0 \rangle \to N$$

$$\Delta^2 N_0 \to N^2$$

E. Schroedinger

Gigantyczne fluktuacje:
W temperaturze 0 czasami wszystkie czątki są nieruchome, czasami żadna z nich!

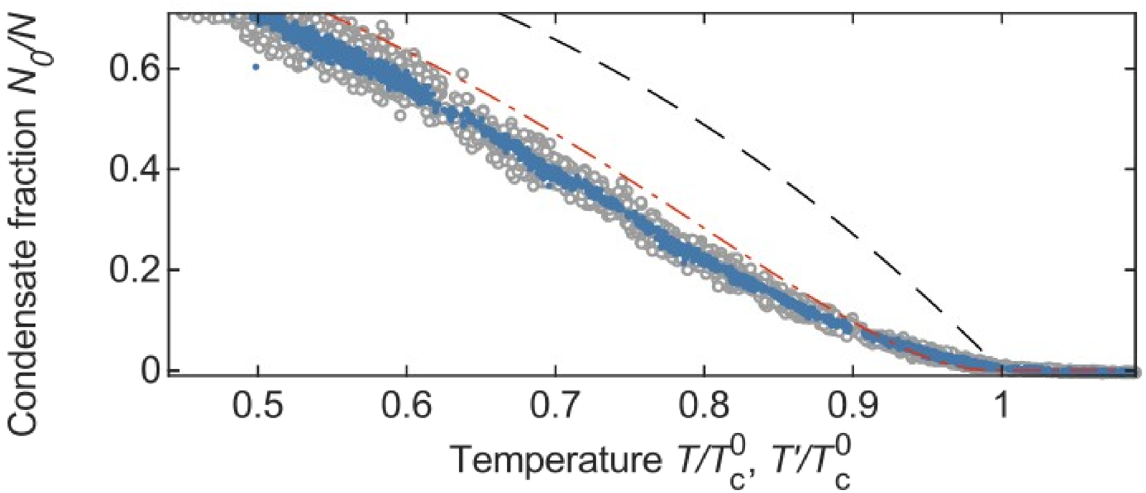
Marek Kac, Ziff, Uhlenbeck, David Politzer –

Poprawki do pracy Einsteina – wzory na fluktuacje N_0

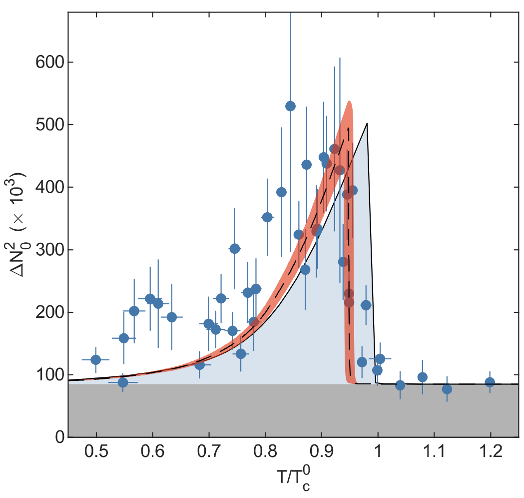
Kondensat Bosego-Einsteina

1995 Pierwsze realizacje kondensatu w doświadczeniu
2001 Nagrody Nobla W. Ketterle (MIT) , E. Cornell, C. Wieman (Boulder)

Liczba „nieruchomych” atomów w funkcji temperatury



Wariancja liczby nieruchomych atomów



Pierwszy pomiar wariancji - 2019 rok !

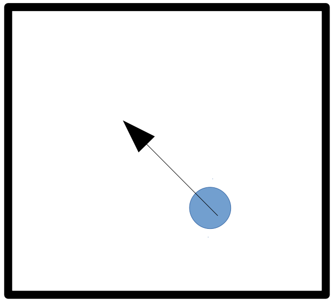
Przykładowe wyniki doświadczalne: grupa Jana Arlta, Uniwersytet w Aarhus, Dania

500 000 atomów, tempertury 10 rzędów wielkości mniejsze od temperatury pokojowej

Aksjomatyzacja mechaniki kwantowej

Struktura matematyczna przestrzen Hilberta.

Każdy wektor z przetrzeni Hilberta = stan w jakim możecie być układ fizyczny



Jedna cząstka

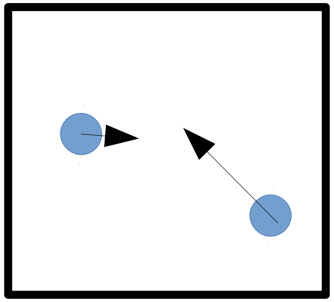
$f \in L_2(V)$

$|f(x)|^2$ - gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstkiw punkcie x

Aksjomatyzacja mechaniki kwantowej

Struktura matematyczna przestrzen Hilberta.

Każdy wektor z przetrzeni Hilberta = stan w jakim możecie być układ fizyczny



Dwie cząstki $f,\, g \in L_2(V)$

Cząstki rozróżnialne:

$$\psi(x,\, y) = f(x)\, g(y)$$

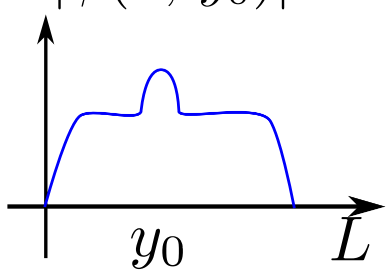
Cząstki nierozróżnialne: $|\psi(x,\, y)|^2 = |\psi(y,\, x)|^2$

Bozony

$$\psi(x,\, y) = \psi(y,\, x)$$

$$\psi(x,\, y) \propto f(x)\, g(y) + g(x) f(y)$$

$$|\psi(x,\, y_0)|^2$$



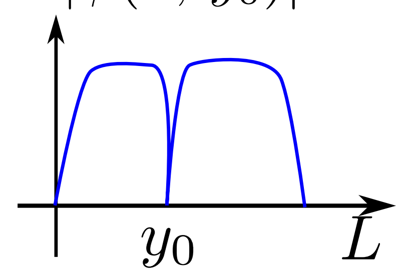
Konsewkencje: kondensat Bosego-Einsteina, kwantowa metrologia

Fermiony

$$\psi(x,\, y) = -\psi(y,\, x)$$

$$\psi(x,\, y) \propto f(x)\, g(y) - g(x) f(y)$$

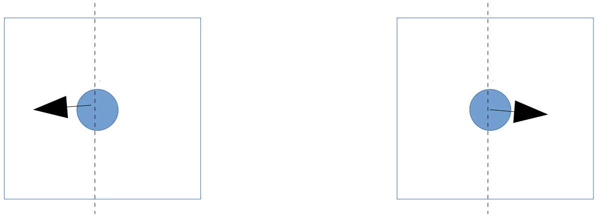
$$|\psi(x,\, y_0)|^2$$



Konsewkencje: Tabela Mendelejewa
 - rozmiar białych karłów

Einstein, a nielokalność

1935 r Einstein, Podolsky, Rosen:
"Czy mechanika kwantowa jest teorią kompletną?"



Ustalone położenia: x y

Nierówność Heisenberga: $\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$

Prędkości: losowe, szeroki rozkład $v_1 \propto P(v)$ $v_2 \propto P(v)$ ale $v_2 = -v_1$

Po pomiarze prędkości w układzie 2 prędkość → prędkość v_1 będzie już znana, wyniesie $-v_2$

Niepewności położenia i prędkości w układzie 1 zależą od pomiarów w układzie 2.

Teoria zmiennych ukrytych

Może o wynikach pomiarów decyduja jakaś cecha, współdzielona przez układy 1 I 2?

$$P_{1,2}(\alpha, \beta|A, B) = \sum_{\xi} p(\xi) P_1(\alpha|A, \xi)\, P_2(\beta|B, \xi)$$

Łączny rozkład prawdopodobieństwa
Wyników pomiaru wielkości A I B

Lokalne rozkłady prawdopodobieństwa
Wyników pomiarów A I B
odpowiednio w układach 1 I 2

Konsekwencje?
Pewne nierówności na prawdopodobieństwa łączne wyników pomiaru (1960)

Eksperyment A. Aspect, J. Dalibard (1980)
Wyniki doświadczalne a) zgodne z mechaniką kwantową, b) niezgodne z teorią zmiennych ukrytych.

Certyfikowanie kwantowości kwantowych generatorów liczb losowych, kwantowej kryptografii

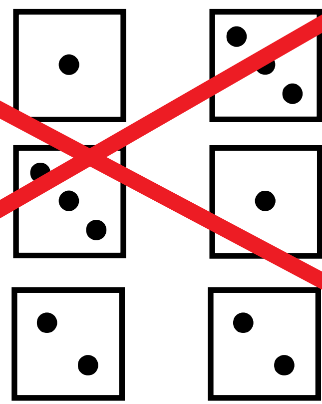
Podsumowanie

Zadanie

Energie jednej cząstki dane są liczbami naturalnymi. Mamy dwie cząstki. Dla ilu mikrostanów energia układu wyniesie **4**.

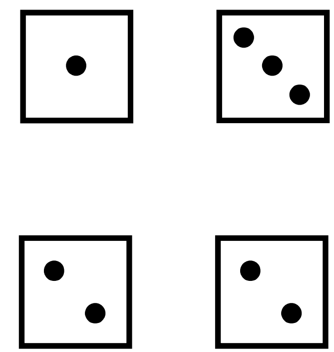
Rozumowanie 1: Trzy możliwości

1. możliwość
2. możliwość
3. możliwość



Rozumowanie 2: Dwie możliwości

1. możliwość
2. możliwość



Atomy tego samego pierwiastka są (I muszą być !!!) nierozróżnialne!

Dziękuję za uwagę