

To nie jest normalne, panie Bachelier!

Grzegorz Szulik

LX Szkoła Matematyki Poglądowej

Wola Ducka, 24.08.2019 r.

Modelowanie rzeczywistości

Wybrane problemy modelowania:

- ograniczenie liczby zmiennych,
- problem z mierzalnością zmiennych,
- niepoprawne założenia modelu.

Natura



Finanse



Problemy świata finansów

Efektywność rynku

”Rynek efektywny” to taki, na którym aktywa są wyceniane rzetelnie na podstawie dostępnych informacji.

Problemy:

- ograniczony dostęp do informacji,
- fałszywe informacje,
- emocje uczestników giełdy,
- nierzetelna wycena.



Problemy świata finansów

Równowaga rynkowa

Każdy nieregulowany rynek dąży do równowagi.

Problemy:

- gospodarka podlega ewolucji,
- na zdrowym rynku ceny podlegają wahaniom,
- naturalnym stanem rozwoju rynku jest brak równowagi.



Problemy świata finansów

Czas w ekonomii

Rynek pamięta przeszłość, ale tylko w ograniczonym stopniu.

Problemy:

- ustalenie długości pamięci procesu,
- modelowanie punktów zwrotnych,
- niestacjonarność procesów.



Nieliniowe systemy sprzężenia zwrotnego

Rozważmy następujący hipotetyczny dyskretny model ceny akcji - na cenę kursu akcji P_t w chwili t wpływają:

- popyt zależny od wartości ceny w chwili poprzedniej ze współczynnikiem a ,
- podaż zależna od kwadratu wartości ceny w chwili poprzedniej ze stałą proporcjonalności $-a$.

Model ceny akcji

$$P_0 = P \in (0, 1)$$

$$P_t = aP_{t-1} (1 - P_{t-1})$$

$$t = 1, 2, \dots$$

Zachowanie tego systemu zależy od wartości współczynnika a . Prześledźmy zachowanie tego systemu dla kilku wybranych wartości $a \in (0, 4)$.

Nieliniowe systemy sprzężenia zwrotnego

Model ceny akcji

$$P_0 = P \in (0, 1)$$

$$P_t = aP_{t-1}(1 - P_{t-1})$$

$$t = 1, 2, \dots$$

Przykład ($a = 1$)

dla $t = 1, 2, \dots$

$$P \in (0, 1) \implies P_t < P_{t-1}$$

$$P_t \geq 0$$

wobec tego:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = 0$$

Nieliniowe systemy sprzężenia zwrotnego

Model ceny akcji

$$P_0 = P \in (0, 1)$$

$$P_t = aP_{t-1}(1 - P_{t-1})$$

$$t = 1, 2, \dots$$

Przykład ($a = 2$)

szukamy punktów stałych:

$$\tilde{P} = 2\tilde{P}(1 - \tilde{P})$$

$$\tilde{P} = 0 \vee \tilde{P} = \frac{1}{2}$$

zauważmy, że podobnie dla dowolnego $a > 1$

$$\tilde{P} = a\tilde{P}(1 - \tilde{P})$$

$$\tilde{P} = 0 \vee \tilde{P} = 1 - \frac{1}{a}$$

Nieliniowe systemy sprzężenia zwrotnego

Model ceny akcji

$$P_0 = P \in (0, 1)$$

$$P_t = aP_{t-1}(1 - P_{t-1})$$

$$t = 1, 2, \dots$$

Nieliniowe systemy sprzężenia zwrotnego

Model ceny akcji

$$P_0 = P \in (0, 1)$$

$$P_t = aP_{t-1}(1 - P_{t-1})$$

$$t = 1, 2, \dots$$

Przykład ($a = 3$)

Brak zbieżności do jednego punktu!

Zamiast tego oscylacja pomiędzy dwoma punktami:

$$\widehat{P}_1 \approx 0,659$$

$$\widehat{P}_2 \approx 0,674$$

Nieliniowe systemy sprzężenia zwrotnego

Model ceny akcji

$$P_0 = P \in (0, 1)$$

$$P_t = aP_{t-1}(1 - P_{t-1})$$

$$t = 1, 2, \dots$$

Przykład ($a = 3,5$)

Oscylacja pomiędzy czterema punktami:

$$\widehat{P}_1 \approx 0,383$$

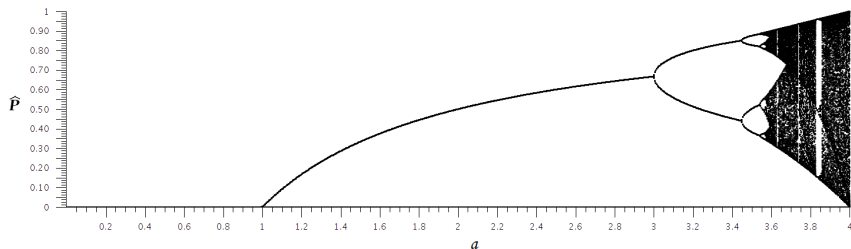
$$\widehat{P}_2 \approx 0,501$$

$$\widehat{P}_3 \approx 0,827$$

$$\widehat{P}_4 \approx 0,875$$

Nieliniowe systemy sprzężenia zwrotnego

Diagram bifurkacyjny dla równania logistycznego



Nieliniowe systemy sprzężenia zwrotnego

Model ceny akcji

$$P_0 = P \in (0, 1)$$

$$P_t = aP_{t-1}(1 - P_{t-1})$$

$$t = 1, 2, \dots$$

Wnioski

- nawet prosty system nieliniowy sprzężenia zwrotnego może prowadzić do istnienia więcej niż jednego punktu równowagi,
- dla wybranych parametrów zachowanie systemu może być chaotyczne (brak punktu równowagi),
- rzetelna wycena może być niemożliwa.

Dlaczego rynki miałyby być efektywne?

Efektywność rynku - argumentacja

- wszelka publicznie dostępna informacja jest zdyskontowana w cenach obecnych,
- dzięki wielkiej liczbie inwestorów - wycena jest rzetelna,
- zbiorowa świadomość rynku wyznacza cenę równowagi,
- zmiany cen następują tylko wtedy, gdy pojawia się nowa informacja (gra nie jest możliwa),
- zmiana ceny zależy wyłącznie od nowej informacji, wobec tego można ją traktować jako zmienną losową podlegającą błędzeniu przypadkowemu,
- gdy liczba zmian cen jest odpowiednio duża, można ich rozkład przybliżyć rozkładem normalnym.

Louis Bachelier

Louis Bachelier (1870 - 1946)

- "Théorie de la spéculation" - rozprawa doktorska z 1900 roku,
- analiza gier hazardowych zastosowana do rynku akcji, obligacji i opcji,
- stwierdza, że proces Wienera ma naturę ruchu Browna,
- wyprowadza wzór na cenę opcji, gdy cena akcji zmienia się zgodnie z procesem Wienera.



Louis Bachelier

Błędne założenia Bachelier:

- zmiana ceny może przyjąć dowolną wartość rzeczywistą (przypadki ujemnych cen uważa za zaniedbywalne),
- rozkład zmian cen jest symetryczny,
- zmiana ceny nie zależy od aktualnej wartości ceny (przytosty ceny są niezależnymi zmiennymi losowymi).



Dalszy rozwój koncepcji rynku

Analiza fundamentalna

- rynek "racjonalnych inwestorów"
- wycena głównie na podstawie wskaźników ekonomicznych

Analiza ilościowa

- rynek "koła ruletki"
- wycena na podstawie analizy statystycznej zmian ceny

Analiza techniczna

- rynek "zwierzęcych instynktów"
- wycena na podstawie obserwacji trendów i formacji

Brownian motion in the stock market, 1959

Założenia M.F.M. Osborne'a:

- 1 minimalna zmiana ceny - $\frac{1}{8}$ dolara,
- 2 dzienna liczba transakcji jest skończona i nieistotna,
- 3 cena i wartość są ze sobą związane,
- 4 oczekiwana stopa zwrotu jest logicznym kryterium wyboru,
- 5 żadna ze stron transakcji nie może mieć przewagi nad drugą,
- 6 zmiany ceny są od siebie niezależne, ponieważ ceny są dostosowywane do aktualnie dostępnych informacji,
- 7 można spodziewać się, że rozkład logarytmicznych stóp zwrotu jest normalny.

The behavior of stock-market prices, 1965

Założenia Osborne'a zostały sformalizowane przez E. Fama:

Hipoteza efektywności rynku

Rynek jest martyngałem, to znaczy żadna informacja dostępna na rynku nie może zostać wykorzystana do osiągnięcia zysku.

- Nie jest potrzebne założenie o niezależności i identyczności rozkładów.
- Hipoteza powyższa jest silniejsza od stwierdzenia, że zmiany cen akcji są od siebie niezależne.
- Jeżeli stopy zwrotu są losowe rynek jest efektywny, ale zależność w drugą stronę nie musi być prawdziwa.
- Anazlia fundamentalna i techniczna nie mogą prowadzić do osiągnięcia zysków.

Hipoteza efektywności rynku

Obecnie mówi się o trzech różnych wersjach hipotezy efektywności rynku:

Silna hipoteza efektywności rynku

Ceny dyskontują wszystkie dostępne informacje (publiczne i prywatne).

Umiarkowana hipoteza efektywności rynku

Ceny dyskontują wszystkie publicznie dostępne informacje.

Słaba hipoteza efektywności rynku

Zmiany cen są zdarzeniami niezależnymi i być może mają naturę błędzenia przypadkowego.

Wprowadzenie

Efektywność rynku

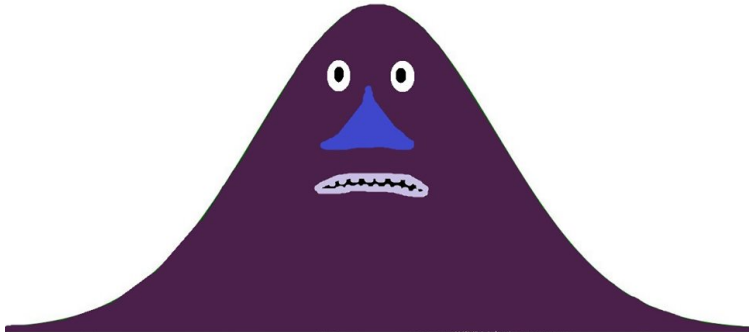
Nienormalność rozkładu stóp zwrotu

Wykładnik Hursta

Statystyka fraktalna

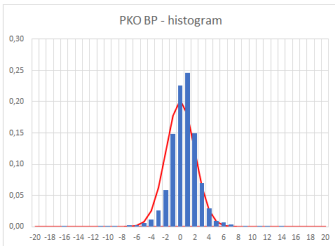
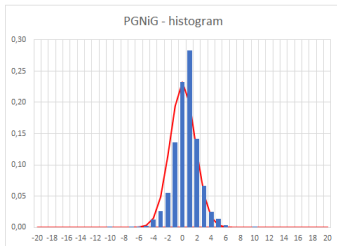
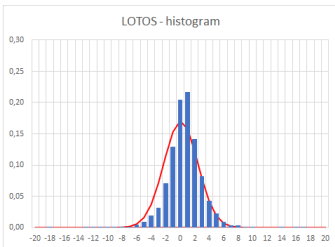
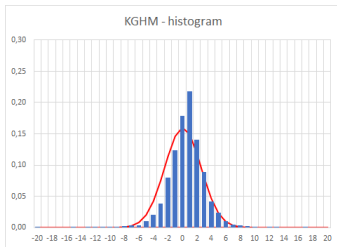
Alternatywy

Rozkład normalny?



Buka Gaussa

Rozkład normalny?

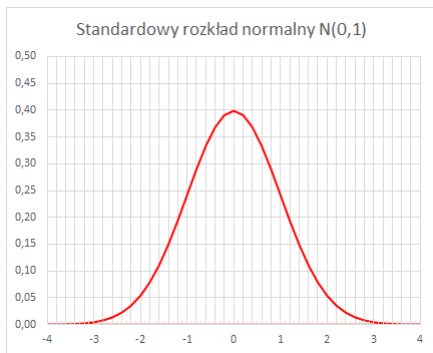


Rozkład normalny?

Próby obalenia słabej hipotezy efektywności rynku:

- Osborne, 1964 - dostrzega grube ogony, ale nie docenia znaczenia tego faktu.
- Mandelbrot, 1964 - rozkład stóp zwrotu może należeć do rodziny stabilnych rozkładów paretowskich o nieskończonej wariancji.
- Fama, 1965 - rozkłady asymetryczne, o grubych ogonach, leptokurtyczne.
- Sharpe, 1970 - obserwacje podobne do tych z pracy Famy.
- Sterge, 1989 - podobne zachowanie dla cen kontraktów terminowych.
- Turner i Weigel, 1990 - podobne zachowanie dla indeksów giełdowych.

Standardowy rozkład normalny - charakterystyki



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- wartość oczekiwana:
 $\mu = \mu_1 = 0$
- wariancja: $\sigma^2 = \mu_2 = 1$
- współczynnik asymetrii:
 $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$
- kurtoza: $\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$

gdzie dla zmiennej losowej X :

$$\mu_k = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^k$$

jest momentem centralnym
rzędu $k = 1, 2, 3, \dots$

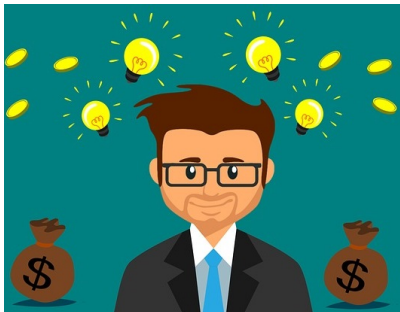
Rozkład normalny?

Parametry rozkładów logarytmicznych stóp zwrotu:

| Charakterystyka | KGHM | LOTOS | PGNiG | PKO BP |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| μ | 0,071 | 0,083 | 0,034 | 0,016 |
| σ | 2,490 | 2,337 | 1,715 | 1,967 |
| A | -0,580 | -0,208 | -0,028 | -0,349 |
| κ | 7,228 | 6,758 | 2,722 | 6,909 |

- rozkłady lewostronnie asymetryczne,
- rozkłady leptokurtyczne.

Umiarkowana hipoteza efektywności rynku



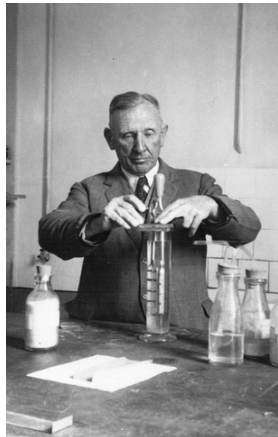
Inwestor inwestorowi nierówny:

- niektórzy podejmują decyzje od razu,
- inni czekają na potwierdzenie informacji,
- jeszcze inni czekają, aż pojawi się wyraźny trend w kursie akcji potwierdzający informację.

Harold Edwin Hurst (1880 - 1978)

Hydrolog pracujący przy projekcie zapory na Nilu (1906 - 1968):

- jaki system opróżniania zbiornika przyjąć, aby zbiornik nigdy się nie przelewał, ani stan wody nigdy nie był zbyt niski,
- do zbiornika miała wpływać woda z całego dorzecza Nilu - można przyjąć, że napływ wody ma charakter błędzenia przypadkowego.



Analiza R/S

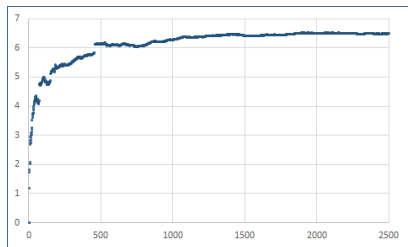
Wykładnik Hursta

Dla $n \rightarrow +\infty$:

$$\frac{R(n)}{S(n)} \approx Cn^H$$

gdzie:

- $R(n)$ - zakres n skumulowanych odchyłeń od średniej
- $S(n)$ - odchylenie standardowe n obserwacji
- $C \in \mathbb{R}$ - stała



Dla szeregu losowego zakres wahań od średniej w danym okresie rośnie z pierwiastkiem długości tego okresu ($H = 0,5$).

Analiza R/S

Dla szeregu X_k , $k = 1, 2, \dots, N$:

- wybieramy podszereg o długości $n \leq N$,
- dla wybranego podszeregu obliczamy średnią $M(n)$ oraz odchylenie standardowe $S(n)$,
- obliczamy skumulowane odchylenia dla $m = 1, 2, \dots, n$

$$X_m^n = \sum_{k=1}^m (X_k - M(n))$$

- wyznaczamy zakres tych odchyłeń:

$$R(n) = \max_m (X_m^n) - \min_m (X_m^n)$$

- wyznaczamy ilorazy $\frac{R(n)}{S(n)}$ dla różnych wartości n ,
- obliczamy wartość współczynnika H .

Analiza R/S

Wyniki Hursta

Hurst zauważył, że:

- w przypadku danych dotyczących Nilu $H \approx 0,9$,
- także dla innych rzek H jest zwykle większe od 0,5,
- dla innych zjawisk naturalnych wartości H były również większe niż 0,5.

Natura wobec tego wcale nie zachowuje się losowo - natura pamięta przeszłość i "przechowuje" informacje o swojej historii - kolejne obserwacje są zależne od poprzednich.

Wykładnik Hursta

Obliczanie wyznacznika Hursta jest dosyć kłopotliwe.

Metoda empiryczna Hursta

W 1951 roku Hurst podał wzór pozwalający oszacować wartość H na podstawie pojedynczej wartości R/S :

$$H \approx \frac{\ln \left(\frac{R(n)}{S(n)} \right)}{\ln \left(\frac{n}{2} \right)}$$

gdzie n jest liczbą obserwacji.

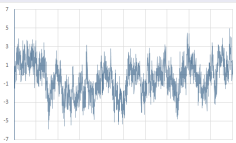
Powyższe przybliżenie zwykle daje wartości zawyżone dla $H > 0,7$, a zaniżone dla $H < 0,4$, ale dzięki swojej prostocie może być też stosowane dla małych zbiorów danych.

Wykładnik Hursta

KLASYFIKACJA SZEREGÓW

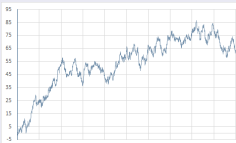
$$0 \leq H < 0,5$$

- ergodyczny
- "powracający do średniej"
- duża zmienność



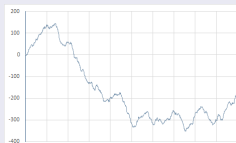
$$H = 0,5$$

- losowy
- o przyrostach niezależnych
- niekoniecznie normalne



$$0,5 < H \leq 1$$

- persystentny
- wzmacniający trend
- występuje tzw. efekt pamięci



Wykładnik Hursta



Wykładnik Hursta

Szeregi persystentne

Większość szeregów, które obserwuje się na giełdzie są persystentne:

- przyrosty nie są niezależne i nie mają rozkładu normalnego,
- występuje efekt pamięci,
- szereg jest obciążony - można interpretować H jako prawdopodobieństwo wystąpienia po sobie dwóch podobnych zdarzeń,
- szeregi te mają strukturę fraktalną (przybliżeniem wymiaru fraktalnego - odwrotność H).

Wykładnik Hursta

Czy rzeczywiście $H > 0,5$ wskazuje na występowanie efektu pamięci?

Wystarczy spróbować przemieszać elementy szeregu, żeby sprawdzić, czy rzeczywiście efekt pamięci występuje.

| Charakterystyka | KGHM | LOTOS | PGNiG | PKO BP |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| H | 0,6266 | 0,6171 | 0,5645 | 0,5996 |
| \tilde{H} | 0,4986 | 0,5011 | 0,4970 | 0,4878 |

\tilde{H} oznacza średnią wartość wykładnika Hursta dla losowo przemieszanego szeregu.

Wykładnik Hursta

Dlaczego na rynkach kapitałowych obserwujemy głównie szeregi persystentne?

- inwestorzy korzystają zarówno z analizy fundamentalnej, jak i technicznej,
- oprócz "rzetelnej wartości" biorą pod uwagę, ile za dany walor będą w stanie zapłacić pozostali inwestorzy,
- kierunek zmiany ceny zauważą mniej doświadczeni inwestorzy, którzy pójdą za nowopowstającym trendem.

Persystencja szeregu jest czymś innym niż autokorelacja - tutaj pamięć o przeszłych zdarzeniach może być bardzo długa.

Jak wobec tego modelować rynek?



Rozkłady fraktalne, B. Mandelbrot, 1964

Stabilne rozkłady paretoowskie

Rozkłady o funkcji charakterystycznej:

$$\varphi(t) = e^{i\mu t - |ct|^{\alpha}(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\Phi)}$$

gdzie:

- μ - parametr przesunięcia,
- c - parametr skali,
- $\beta \in [-1, 1]$ - miara asymetrii,
- $\alpha \in [0, 2]$ - miara "spiczastości",
- $\Phi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ dla $\alpha \neq 1$ oraz $\Phi = -\frac{2}{\pi} \ln |t|$ dla $\alpha = 1$.

Hipoteza rynku fraktalnego

Hipoteza rynku fraktalnego, B. Mandelbrot, 1964

Rozkłady logarytmicznych stóp zwrotu należą do klasy stabilnych rozkładów paretońskich o parametrze $\alpha \in [0, 2]$.

Zalety:

- kontrola nad kształtem funkcji gęstości,
- dla $\alpha \in [1, 2)$ - wariancja nieskończona,
- samodobieństwo względem czasu (niezmienniczość względem skali),
- α jest wymiarem fraktalnym przestrzeni prawdopodobieństwa szeregu czasowego, tzn. miarą pogrubienia ogonów funkcji gęstości,
- "efekt Józefa" i "efekt Noego".

Hipoteza rynku fraktalnego

Za

- stabilność wykładnika Hursta dla rozłącznych zbiorów danych o jednakowej liczebności - przykładowo dla KGHM: przybliżone wartości H dla okna 625 danych dziennych:
0,545, 0,551, 0,536, 0,549

Przeciw

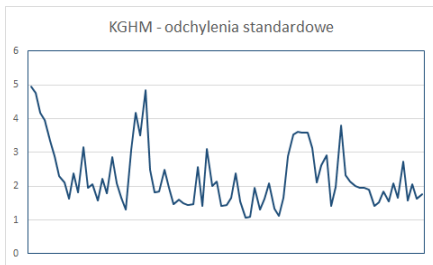
- problem ze skalowalnością wykładnika Hursta - różne wartości dla 120 danych zapisywanych z różnymi odstępami czasu - przykładowo dla KGHM:
dziennie $\leftrightarrow H \approx 0,5017$
tygodniowe $\leftrightarrow H \approx 0,6445$
miesięczne $\leftrightarrow H \approx 0,6636$

Hipoteza rynku fraktalnego



| Ch. | dzien. | tyg. | mies. |
|----------|--------|-------|--------|
| μ | 0,854 | 1,786 | 1,467 |
| σ | 4,495 | 5,970 | 11,236 |
| A | -0,547 | 0,743 | 0,043 |
| κ | 1,089 | 2,048 | 0,436 |
| H | 0,502 | 0,645 | 0,664 |

Hipoteza rynku fraktalnego



Zaskakujące okazują się wyniki analizy R/S przeprowadzonej dla szeregu odchyłeń standardowych - szereg ten jest antypersystentny z wartościami $H \approx 0,1556$, co oznacza, że rozkład w populacji generalnej może nie mieć wariancji.

Dynamika nieliniowa?

Jeżeli rzeczywiście rynek ma naturę fraktalną, to w objaśnieniu rynku może pomóc dynamika nieliniowa.

Peters - Teoria chaosu a rynki kapitałowe, 1997

Analiza kilku rynków:

- eliminacja trendu,
- rekonstrukcja przestrzeni fazowej,
- wymiar fraktalny,
- wykładnik Lapunowa.

Ale tu nadal jest więcej pytań niż odpowiedzi...

Alternatywy?

Czy może istnieć jedna koncepcja, która wyjaśni wszystkie aspekty działania rynku?

Przykładowe propozycje innych rozwiązań:

- hipoteza rynku koherentnego,
- behawioralna teoria finansów,
- teoria fal elementarnych,
- koncepcja samoorganizującej się krytyczności.

Literatura

- Bachelier L., Théorie de la spéculation, Annales scientifiques de l'É.N.S., t. 17 (1900), str. 21-86
- Fama E. F., The behavior of stock-market prices, The Journal of Business, t. 38, Nr 1 (1965), str. 34-105
- Hurst H. E., Long Term Storage of Reservoirs, Transactions of the American Society of Civil Engineers 116, 1951
- Mandelbrot B., The Variation of Certain Speculative Prices, 1964
- Osborne M. F. M., Brownian motion in the stock market, Operations Research, March-April 1959, str. 145-173
- Peters E. E., Teoria chaosu a rynki kapitałowe, WIG-Press, Warszawa 1997

DZIEKUJĘ ZA UWAGĘ!