Geometria - wróg demokracji

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

27 sierpnia 2019

Motto

- Są trzy metody głosowania. Pierwsza przez aplauz. Znaczy, że wszyscy głosują. Druga metoda... Kulkami. Są kulki czarne i czerwone, które otrzymuje każdy głosujący... Yyyy... Przepraszam białe i czarne, które otrzymuje każdy głosujący... Czarna za – lub odwrotnie: czarna za... Yyyy... Czarna przeciw – biała za lub odwrotnie. Jest trzecia metoda przez podniesienie rąk. Ta metoda jest najdoskonalsza.
  – No świetnie, ale jaką metodą wybierzemy metodę głosowania?
  (z filmu „Rejs”)

Matematyczni wichrzyciele (MSN 45)

Nicolas de Caritat, markiz de Condorcet

Kenneth Arrow

Podstawowe założenia

- Rozważamy wybory parlamentarne.

Podstawowe założenia

- Rozważamy wybory parlamentarne.
- Jednomandatowe okręgi wyborcze: w każdym okręgu wyborczym „zwycięzca bierze wszystko” (kraje anglosaskie, ale też Francja, Japonia, w Polsce — wybory do Senatu)

Podstawowe założenia

- Rozważamy wybory parlamentarne.
- Jednomandatowe okręgi wyborcze: w każdym okręgu wyborczym „zwycięzca bierze wszystko” (kraje anglosaskie, ale też Francja, Japonia, w Polsce — wybory do Senatu)
- System praktycznie dwupartyjny (w mniejszym lub większym przybliżeniu - tzw. prawo Duvergera).

Podstawowe założenia

- Rozważamy wybory parlamentarne.
- Jednomandatowe okręgi wyborcze: w każdym okręgu wyborczym „zwycięzca bierze wszystko” (kraje anglosaskie, ale też Francja, Japonia, w Polsce — wybory do Senatu)
- System praktycznie dwupartyjny (w mniejszym lub większym przybliżeniu - tzw. prawo Duvergera).
- Jesteśmy w stanie oszacować przekonania polityczne wyborców w konkretnych lokalizacjach (wykonalne!).

Gerrymandering

Jednym z charakterystycznych problemów takiego systemu wyborczego jest tzw. *gerrymandering*, czyli manipulowanie granicami okręgów wyborczych w celu oddania w ręce jednej z partii niż by to wynikało z preferencji głosujących lub też naturalnego podziału na okręgi. Najczęściej polega on na:

Gerrymandering

Jednym z charakterystycznych problemów takiego systemu wyborczego jest tzw. *gerrymandering*, czyli manipulowanie granicami okręgów wyborczych w celu oddania w ręce jednej z partii niż by to wynikało z preferencji głosujących lub też naturalnego podziału na okręgi. Najczęściej polega on na:

- *pakowaniu* jak największej liczby wyborców tej samej partii do tego samego okręgu wyborczego celem „zmarnowania ich głosów”.

Gerrymandering

Jednym z charakterystycznych problemów takiego systemu wyborczego jest tzw. *gerrymandering*, czyli manipulowanie granicami okręgów wyborczych w celu oddania w ręce jednej z partii niż by to wynikało z preferencji głosujących lub też naturalnego podziału na okręgi. Najczęściej polega on na:

- *pakowaniu* jak największej liczby wyborców tej samej partii do tego samego okręgu wyborczego celem „zmarnowania ich głosów”.
- *łamaniu* naturalnych skupisk zwolenników jednej z partii i rozdzielaniu ich pomiędzy okręgi, w których większość ma druga z partii.

Gerrymandering

Jednym z charakterystycznych problemów takiego systemu wyborczego jest tzw. *gerrymandering*, czyli manipulowanie granicami okręgów wyborczych w celu oddania w ręce jednej z partii niż by to wynikało z preferencji głosujących lub też naturalnego podziału na okręgi. Najczęściej polega on na:

- *pakowaniu* jak największej liczby wyborców tej samej partii do tego samego okręgu wyborczego celem „zmarnowania ich głosów”.
- *łamaniu* naturalnych skupisk zwolenników jednej z partii i rozdzielaniu ich pomiędzy okręgi, w których większość ma druga z partii.

W rezultacie stosowania tych dwóch metod, jedna z partii wygrywa z dużą przewagą w niewielu okręgach, a druga - z małą przewagą w wielu okręgach.

Gerrymandering - przykład

O	O	X	X	O	X	X	X	X
O	X	X	O	O	X	O	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X
O	X	X	X	O	O	O	X	X
O	O	O	X	O	O	O	X	X
O	O	O	X	X	X	O	X	X
O	X	X	X	X	X	O	X	X
O	X	O	O	O	X	X	X	X
O	O	O	O	X	X	X	X	X

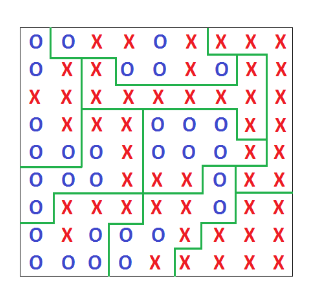
Rozważmy region, w którym mamy rozdzielić 9 mandatów w równych okręgach, a wyborcy dzielą się na 50 zwolenników partii I (czerwone krzyżyki) oraz 31 popierających partię II (niebieskie kółka).

Gerrymandering - przykład

O	O	X	X	O	X	X	X	X
O	X	X	O	O	X	O	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X
O	X	X	X	O	O	O	X	X
O	O	O	X	O	O	O	X	X
O	O	O	X	X	X	O	X	X
O	X	X	X	X	X	O	X	X
O	X	O	O	O	X	X	X	X
O	O	O	O	X	X	X	X	X

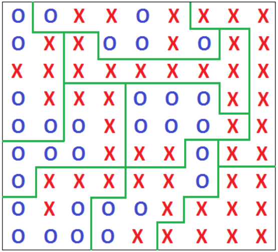
Rozważmy region, w którym mamy rozdzielić 9 mandatów w równych okręgach, a wyborcy dzielą się na 50 zwolenników partii I (czerwone krzyżyki) oraz 31 popierających partię II (niebieskie kółka). Proporcjonalnie, partia II powinna otrzymać w tym regionie 3-4 mandaty, a partia I 5-6 mandatów.

Gerrymandering - przykład

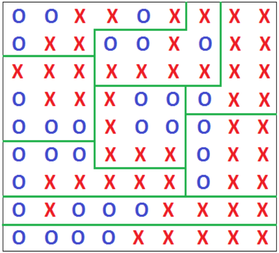


Dzięki „pakowaniu", partia II wygrywa wybory większością 6:3 mandatów.

Gerrymandering - przykład

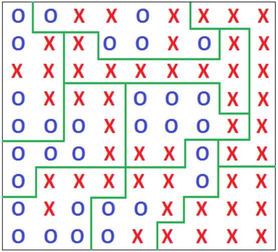


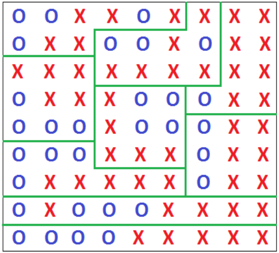
Dzięki „pakowaniu”, partia II wygrywa wybory większością 6:3 mandatów.



Dzięki „łamaniu”, partia I zdobywa wszystkie mandaty.

Gerrymandering - przykład





Dzięki „pakowaniu”, partia II wygrywa wybory większością 6:3 mandatów.

Dzięki „łamaniu”, partia I zdobywa wszystkie mandaty.

Ale czy zdarza się to w rzeczywistości?

Pierwszy gerrymandering

Pierwszy gerrymandering

W 1812 roku gubernator Massachussetts z ramienia Partii Demokratyczno-Republikańskiej, Elbridge Gerry, zatwierdził podział stanu na okręgi wyborcze o dziwnych kształtach, mające zapewnić jego stronnikom zwycięstwo w następnych wyborach.

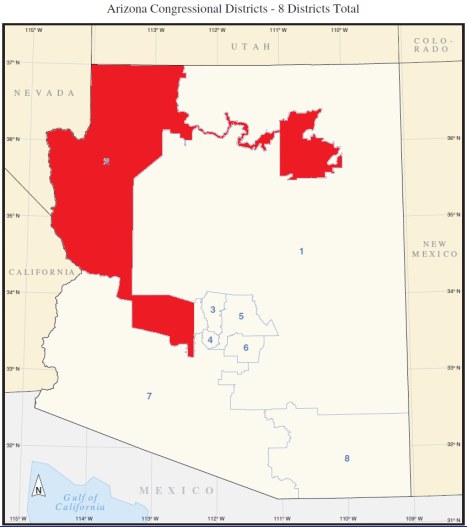
Pierwszy gerrymandering

W 1812 roku gubernator Massachussetts z ramienia Partii Demokratyczno-Republikańskiej, Elbridge Gerry, zatwierdził podział stanu na okręgi wyborcze o dziwnych kształtach, mające zapewnić jego stronnikom zwycięstwo w następnych wyborach. W odpowiedzi, *Boston Gazette* porównała jeden z okręgów do mitycznego potwora - salamandry - tworząc nazwę gerry-mander. W konsekwencji, odtąd taki proceder określany jest jako gerrymandering.

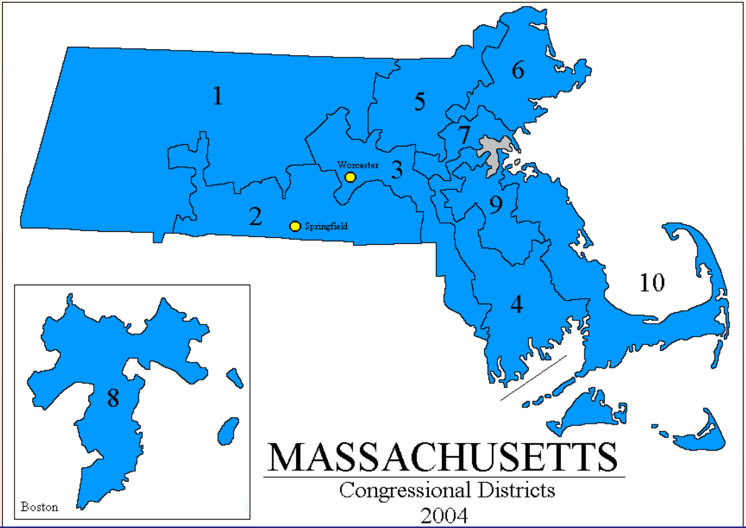
Pierwszy gerrymandering

W 1812 roku gubernator Massachussetts z ramienia Partii Demokratyczno-Republikańskiej, Elbridge Gerry, zatwierdził podział stanu na okręgi wyborcze o dziwnych kształtach, mające zapewnić jego stronnikom zwycięstwo w następnych wyborach. W odpowiedzi, *Boston Gazette* porównała jeden z okręgów do mitycznego potwora - salamandry - tworząc nazwę gerry-mander. W konsekwencji, odtąd taki proceder określany jest jako gerrymandering.
Przykłady z kolejnych slajdów pochodzą z różnych wyborów w USA z XXI wieku, gdyż tam ten problem jest najlepiej zbadany, ale podobne sytuacje są częste w większości państw korzystających z takiego systemu wyborczego (mapy ze strony rangevoting.org).

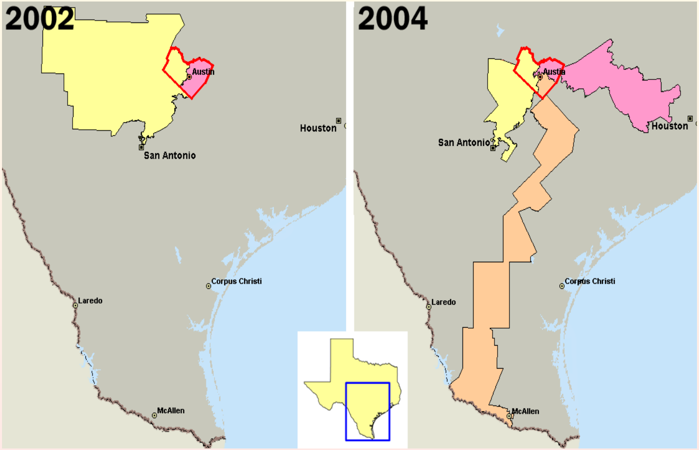
Arizona


Arizona Congressional Districts - 8 Districts Total
UTAH
COLO-RADO
NEVADA
CALIFORNIA
NEW MEXICO
MEXICO
Gulf of California
N
1
2
3
4
5
6
7
8

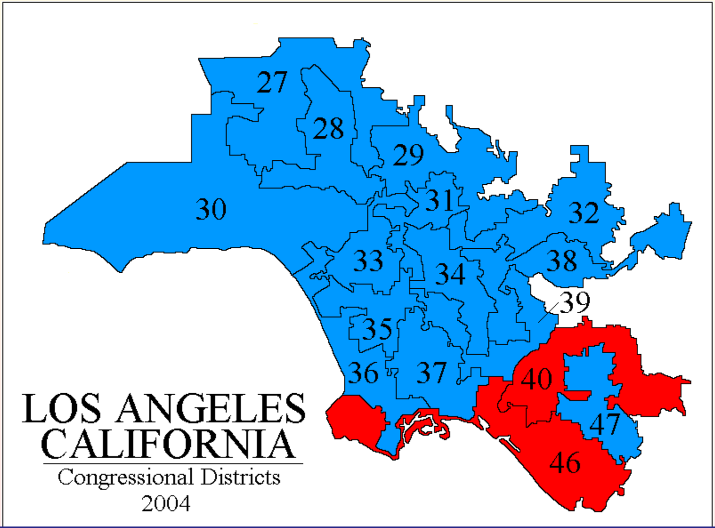
Massachussetts



Teksas

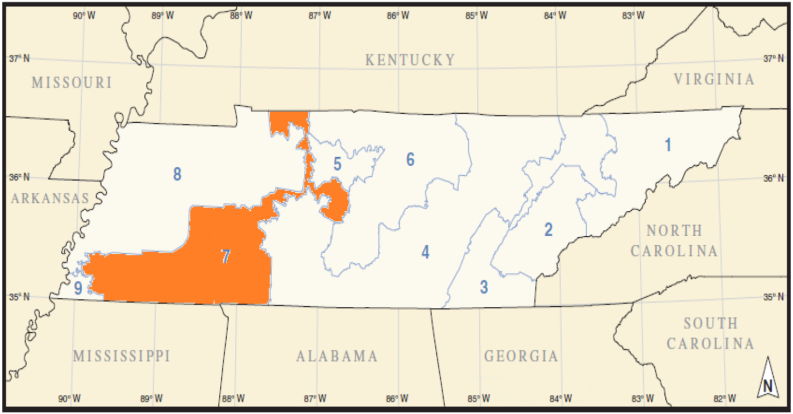

2002
Austin
Houston
San Antonio
Corpus Christi
Laredo
McAllen
2004
Austin
Houston
San Antonio
Corpus Christi
Laredo
McAllen

Kalifornia


27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
46
47
LOS ANGELES
CALIFORNIA
Congressional Districts
2004

Tennessee

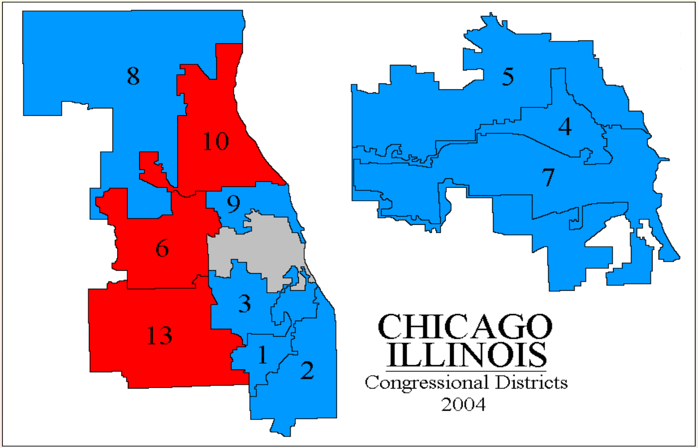
Tennessee Congressional Districts - 9 Districts Total



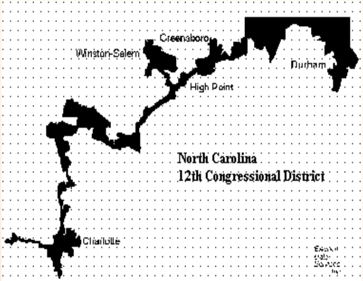
108th Congress of the United States

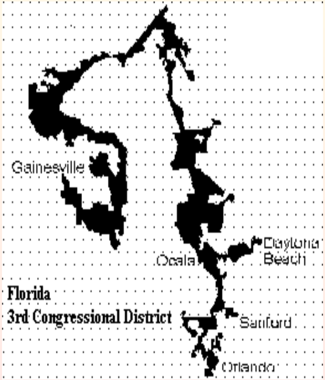
USCENSUSBUREAU

Chicago, Illinois

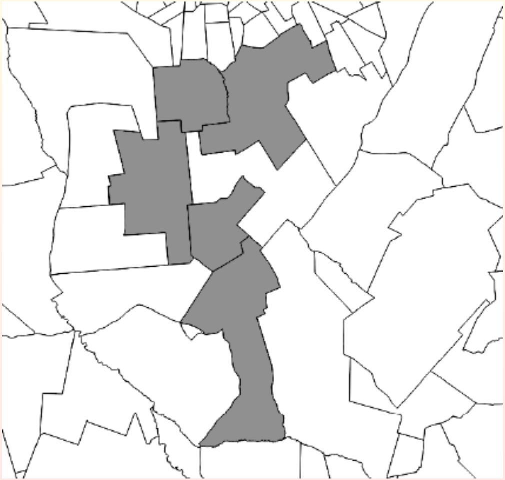


Karolina Północna i Floryda





Obwód 18, Grodzisk Mazowiecki



Konsekwencje gerrymanderingu

- Skrajny brak przełożenia preferencji obywateli na wynik wyborów.

Konsekwencje gerrymanderingu

- Skrajny brak przełożenia preferencji obywateli na wynik wyborów.
- Poczucie zmarnowanego głosu i w rezultacie zniechęcenie do polityki.

Konsekwencje gerrymanderingu

- Skrajny brak przełożenia preferencji obywateli na wynik wyborów.
- Poczucie zmarnowanego głosu i w rezultacie zniechęcenie do polityki.
- Rozmycie odpowiedzialności wybieranych wobec wyborców („Politycy wybierają wyborców”).

Konsekwencje gerrymanderingu

- Skrajny brak przełożenia preferencji obywateli na wynik wyborów.
- Poczucie zmarnowanego głosu i w rezultacie zniechęcenie do polityki.
- Rozmycie odpowiedzialności wybieranych wobec wyborców („Politycy wybierają wyborców”).
- Zabetonowanie sceny politycznej (L. Gutierrez, przedstawiciel okręgu 4 w Chicago 1993-2019, w Tennessee nikt nie „stracił stołka” w latach 1980-2005).

Konsekwencje gerrymanderingu

- Skrajny brak przełożenia preferencji obywateli na wynik wyborów.
- Poczucie zmarnowanego głosu i w rezultacie zniechęcenie do polityki.
- Rozmycie odpowiedzialności wybieranych wobec wyborców („Politycy wybierają wyborców”).
- Zabetonowanie sceny politycznej (L. Gutierrez, przedstawiciel okręgu 4 w Chicago 1993-2019, w Tennessee nikt nie „stracił stołka” w latach 1980-2005).
- Efekt „perpetuum mobile” - wybrani dzięki gerrymanderingowi często mają wpływ na decyzje o podziale na okręgi w kolejnych kadencjach.

O gerrymanderingu

Gerrymanderingiem zajmowały (i zajmują) się najszacowniejsze instytucje i największe autorytety:

- Sądy stanowe i Sąd Najwyższy USA.

O gerrymanderingu

Gerrymanderingiem zajmowały (i zajmują) się najszacowniejsze instytucje i największe autorytety:

- Sądy stanowe i Sąd Najwyższy USA.
- Metric Geometry and Gerrymandering Group w Bostonie.

O gerrymanderingu

Gerrymanderingiem zajmowały (i zajmują) się najszacowniejsze instytucje i największe autorytety:

- Sądy stanowe i Sąd Najwyższy USA.
- Metric Geometry and Gerrymandering Group w Bostonie.
- Δ^4_{18} „Jak wykryć salamandrę” (Anna Łeń, Marcin Michorzewski), Δ^6_{19} „Salamandry buszują w JOWach” (Andrzej Dąbrowski).

Wykrywanie gerrymanderingu

- *Gerrymandering jest jak pornografia...*

Wykrywanie gerrymanderingu

- *Gerrymandering jest jak pornografia...*
- ...ale istnieją matematyczne miary zaburzenia zarówno kształtu okręgów jak i rezultatu głosowania.

Wykrywanie gerrymanderingu

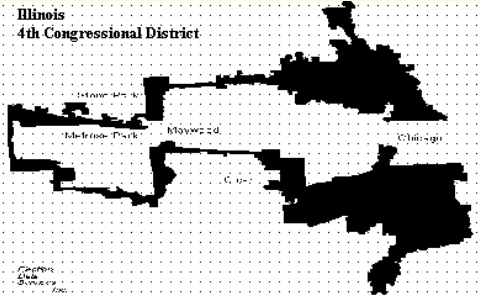
- *Gerrymandering jest jak pornografia...*
- ...ale istnieją matematyczne miary zaburzenia zarówno kształtu okręgów jak i rezultatu głosowania.
- Można również udowodnić manipulację metodami statystycznymi...

Wykrywanie gerrymanderingu

- *Gerrymandering jest jak pornografia...*
- ...ale istnieją matematyczne miary zaburzenia zarówno kształtu okręgów jak i rezultatu głosowania.
- Można również udowodnić manipulację metodami statystycznymi...
- ...i te matematyczne metody coraz częściej są akceptowane w sądach, prowadząc do poprawiania najbardziej patologicznych sytuacji (Wisconsin, Pensylwania, Arizona, Karolina Północna).

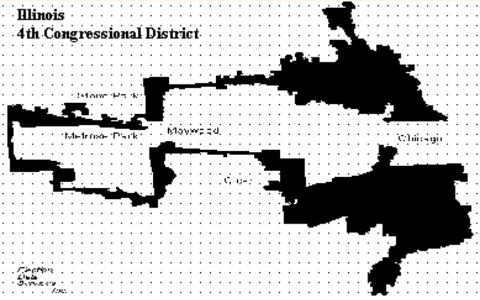
Problemy z wykrywaniem gerrymanderingu

- Czasami gerrymandering jest legalny i używany „w dobrych intencjach” (tzw. *majority-minority districts*).



Problemy z wykrywaniem gerrymanderingu

- Czasami gerrymandering jest legalny i używany „w dobrych intencjach” (tzw. *majority-minority districts*).



- Jednak nawet wtedy skutki bywają odwrotne do zamierzonych (Cameron, Epstein, O’Halloran, 1996).

Problemy z wykrywaniem gerrymanderingu

- Czasami gerrymandering jest legalny i używany „w dobrych intencjach” (tzw. *majority-minority districts*).

Problemy z wykrywaniem gerrymanderingu

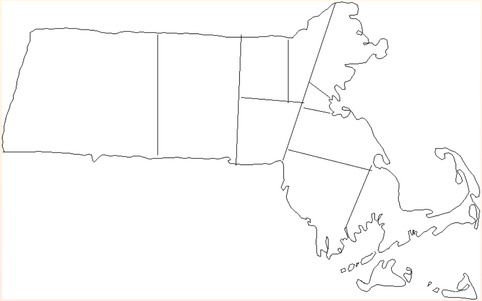
- Czasami gerrymandering jest legalny i używany „w dobrych intencjach” (tzw. *majority-minority districts*).
- Zarówno stochastyczne, jak i deterministyczne metody muszą być przedstawione tak, by nawet prawnicy mogli je zrozumieć...

Problemy z wykrywaniem gerrymanderingu

- Czasami gerrymandering jest legalny i używany „w dobrych intencjach” (tzw. *majority-minority districts*).
- Zarówno stochastyczne, jak i deterministyczne metody muszą być przedstawione tak, by nawet prawnicy mogli je zrozumieć...
- ...a także trzeba przedstawić alternatywne rozwiązanie, gwarantujące lepsze efekty.

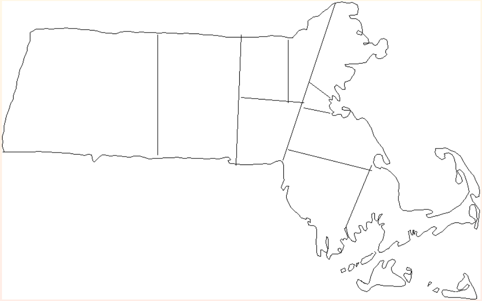
Próby rozwiązania systemowego

- Algorytmy deterministyczne np. Shortest Splitline Algorithm.



Próby rozwiązania systemowego

- Algorytmy deterministyczne np. Shortest Splitline Algorithm.



- Niepraktyczne ze względów geograficzno-kulturowych, ale z możliwościami poprawy.

Próby rozwiązania systemowego

- Algorytmy deterministyczne np. Shortest Splitline Algorithm.

Próby rozwiązania systemowego

- Algorytmy deterministyczne np. Shortest Splitline Algorithm.
- Algorytmy stochastyczne (niezbyt lubiane przez prawników).

Próby rozwiązania systemowego

- Algorytmy deterministyczne np. Shortest Splitline Algorithm.
- Algorytmy stochastyczne (niezbyt lubiane przez prawników).
- Algorytm teoriogrowy oparty na protokołach podziału tortu (Dingli Yu, Pegden, Procaccia 2017).

Proste reguły prawne...

Prawne rozstrzygnięcia wskazują, że aby uniknąć patologicznych efektów tworzenia okręgów wyborczych, wystarczy kierować się trzema prostymi regułami:

Proste reguły prawne...

Prawne rozstrzygnięcia wskazują, że aby uniknąć patologicznych efektów tworzenia okręgów wyborczych, wystarczy kierować się trzema prostymi regułami:

- (Równość) Okręgi wyborcze powinny składać się z mniej więcej tej samej liczby głosujących (decyzje Sądu Najwyższego USA z lat 1960-tych np. *Avery vs Midland County*, *Gray vs Sanders*).

Proste reguły prawne...

Prawne rozstrzygnięcia wskazują, że aby uniknąć patologicznych efektów tworzenia okręgów wyborczych, wystarczy kierować się trzema prostymi regułami:

- (Równość) Okręgi wyborcze powinny składać się z mniej więcej tej samej liczby głosujących (decyzje Sądu Najwyższego USA z lat 1960-tych np. *Avery vs Midland County*, *Gray vs Sanders*).
- (Kształt) Każdy z okręgów wyborczych powinien mieć wystarczająco „normalny” kształt (*Cooper vs Harris*, 2017).

Proste reguły prawne...

Prawne rozstrzygnięcia wskazują, że aby uniknąć patologicznych efektów tworzenia okręgów wyborczych, wystarczy kierować się trzema prostymi regułami:

- (Równość) Okręgi wyborcze powinny składać się z mniej więcej tej samej liczby głosujących (decyzje Sądu Najwyższego USA z lat 1960-tych np. *Avery vs Midland County*, *Gray vs Sanders*).
- (Kształt) Każdy z okręgów wyborczych powinien mieć wystarczająco „normalny” kształt (*Cooper vs Harris*, 2017).
- (Sprawiedliwość) Mandaty powinny być rozdzielone w przybliżeniu proporcjonalnie do liczby głosów na każdą z partii, w szczególności liczba „zmarnowanych” głosów z obu stron powinna być podobna (*Gill vs Whitford*, 2017).

Proste reguły prawne...

Prawne rozstrzygnięcia wskazują, że aby uniknąć patologicznych efektów tworzenia okręgów wyborczych, wystarczy kierować się trzema prostymi regułami:

- (Równość) Okręgi wyborcze powinny składać się z mniej więcej tej samej liczby głosujących (decyzje Sądu Najwyższego USA z lat 1960-tych np. *Avery vs Midland County*, *Gray vs Sanders*).
- (Kształt) Każdy z okręgów wyborczych powinien mieć wystarczająco „normalny” kształt (*Cooper vs Harris*, 2017).
- (Sprawiedliwość) Mandaty powinny być rozdzielone w przybliżeniu proporcjonalnie do liczby głosów na każdą z partii, w szczególności liczba „zmarnowanych” głosów z obu stron powinna być podobna (*Gill vs Whitford*, 2017).

Ale czy na pewno te reguły się da spełnić?

Matematyzacja problemu: definicja

Dla uproszczenia i bez utraty ogólności, rozważamy kraj w kształcie kwadratu $S = [0,1]^2$.

Matematyzacja problemu: definicja

Dla uproszczenia i bez utraty ogólności, rozważamy kraj w kształcie kwadratu $S = [0,1]^2$. Załóżmy, że znamy preferencje głosujących i zawarte w tym kwadracie zbiory A i B - położenia głosujących na partie I i II.

Matematyzacja problemu: definicja

Dla uproszczenia i bez utraty ogólności, rozważamy kraj w kształcie kwadratu $S = [0,1]^2$. Załóżmy, że znamy preferencje głosujących i zawarte w tym kwadracie zbiory A i B - położenia głosujących na partie I i II. Celem jest podział S na k okręgów wyborczych.

Matematyzacja problemu: definicja

Dla uproszczenia i bez utraty ogólności, rozważamy kraj w kształcie kwadratu $S = [0, 1]^2$. Załóżmy, że znamy preferencje głosujących i zawarte w tym kwadracie zbiory A i B - położenia głosujących na partie I i II. Celem jest podział S na k okręgów wyborczych.

System podziału

Systemem podziału (*districting system*) nazywamy funkcję f która każdej trójce $(A, B, k) \in (2^S)^2 \times \mathbb{N}_+$ przypisuje k-elementowy podział zbioru S tj. rodzinę rozłącznych zbiorów $\{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ takich, że $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k = S$.

Tak naprawdę wystarcza rozważać k z pewnego zakresu zadanego przez ordynację wyborczą.

Matematyzacja problemu: uzasadnienie założeń

Wbrew pozorom, założenia z poprzedniego slajdu są realistyczne:

Matematyzacja problemu: uzasadnienie założeń

Wbrew pozorom, założenia z poprzedniego slajdu są realistyczne:

- Każdy kraj można wpisać w kwadrat i podział tego kwadratu na okręgi automatycznie wygeneruje podział kraju.

Matematyzacja problemu: uzasadnienie założeń

Wbrew pozorom, założenia z poprzedniego slajdu są realistyczne:

- Każdy kraj można wpisać w kwadrat i podział tego kwadratu na okręgi automatycznie wygeneruje podział kraju.
- Preferencje głosujących i ich lokalizacja mogą być (i są!) szacowane na podstawie spisów powszechnych oraz poprzednich wyników głosowań.

Matematyzacja problemu: uzasadnienie założeń

Wbrew pozorom, założenia z poprzedniego slajdu są realistyczne:

- Każdy kraj można wpisać w kwadrat i podział tego kwadratu na okręgi automatycznie wygeneruje podział kraju.
- Preferencje głosujących i ich lokalizacja mogą być (i są!) szacowane na podstawie spisów powszechnych oraz poprzednich wyników głosowań.

Jak zmatematyzować założenia, które powinny spełniać wartości funkcji systemu podziału, czyli podziały wyborcze?

Matematyzacja problemu: równość okręgów

Założenie o tym, że liczba głosujących w każdym okręgu powinna być mniej więcej taka sama możemy zapisać następująco:

Kryterium równości

Istnieje $\delta \in [0, 1)$ takie, że:

$$(1-\delta)\left\lfloor \frac{|A \cup B|}{k} \right\rfloor \leq |(A \cup B) \cap D_i| \leq (1+\delta)\left\lceil \frac{|A \cup B|}{k} \right\rceil$$

dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Matematyzacja problemu: równość okręgów

Założenie o tym, że liczba głosujących w każdym okręgu powinna być mniej więcej taka sama możemy zapisać następująco:

Kryterium równości

Istnieje $\delta \in [0, 1)$ takie, że:

$$(1-\delta)\left\lfloor \frac{|A \cup B|}{k} \right\rfloor \leq |(A \cup B) \cap D_i| \leq (1+\delta)\left\lceil \frac{|A \cup B|}{k} \right\rceil$$

dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

W praktyce chcemy, żeby δ było odpowiednio małe.

Matematyzacja problemu: wskaźnik Polsby'ego-Poppera

Miara „normalności kształtu" okręgu wyborczego to:

Wskaźnik Polsby'ego-Poppera

Wskaźnikiem Polsby'ego-Poppera (PP) dla okręgu wyborczego D_i nazywamy

$$C_i = \frac{4\pi|D_i|}{|\partial D_i|^2},$$

gdzie $|\partial D_i|$ oznacza obwód obszaru D_i, a $|D_i|$ - jego pole.
Z kolei wskaźnikiem PP dla całego podziału wyborczego nazywamy:

$$C = \min_{i \in \{1,2,\dots,k\}} C_i.$$

Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - własności i uwagi

$$C_i = \frac{4\pi|D_i|}{|\partial D_i|^2}$$

Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - własności i uwagi

$$C_i = \frac{4\pi|D_i|}{|\partial D_i|^2}$$

- C_i można interpretować jako stosunek pola powierzchni okręgu wyborczego do pola powierzchni koła o obwodzie równym jego obwodowi. Zawsze $C_i \leq 1$, przy czym równość zachodzi tylko dla okręgu wyborczego w kształcie koła (nierówność izoperymetryczna).

Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - własności i uwagi

$$C_i = \frac{4\pi |D_i|}{|\partial D_i|^2}$$

- C_i można interpretować jako stosunek pola powierzchni okręgu wyborczego do pola powierzchni koła o obwodzie równym jego obwodowi. Zawsze $C_i \leq 1$, przy czym równość zachodzi tylko dla okręgu wyborczego w kształcie koła (nierówność izoperymetryczna).
- Określenie obwodu okręgu wyborczego może być nieprecyzyjne i zależeć od skali mapy (efekt fraktalny).

Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - własności i uwagi

$$C_i = \frac{4\pi|D_i|}{|\partial D_i|^2}$$

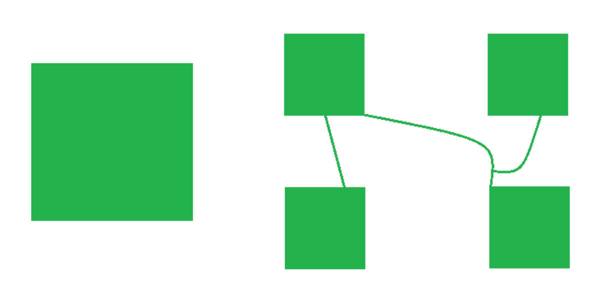
- C_i można interpretować jako stosunek pola powierzchni okręgu wyborczego do pola powierzchni koła o obwodzie równym jego obwodowi. Zawsze $C_i \leq 1$, przy czym równość zachodzi tylko dla okręgu wyborczego w kształcie koła (nierówność izoperymetryczna).
- Określenie obwodu okręgu wyborczego może być nieprecyzyjne i zależeć od skali mapy (efekt fraktalny).
- Dążymy do tego, by wskaźnik PP był możliwie duży dla podziałów wyborczych naszego systemu podziałów i to będzie dla nas definiować „niedziwność” podziału.

Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - własności i uwagi

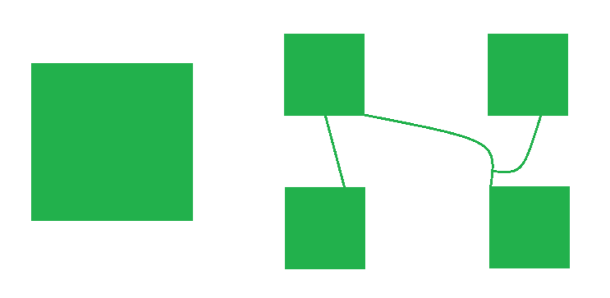
$$C_i = \frac{4\pi|D_i|}{|\partial D_i|^2}$$

- C_i można interpretować jako stosunek pola powierzchni okręgu wyborczego do pola powierzchni koła o obwodzie równym jego obwodowi. Zawsze $C_i \leq 1$, przy czym równość zachodzi tylko dla okręgu wyborczego w kształcie koła (nierówność izoperymetryczna).
- Określenie obwodu okręgu wyborczego może być nieprecyzyjne i zależeć od skali mapy (efekt fraktalny).
- Dążymy do tego, by wskaźnik PP był możliwie duży dla podziałów wyborczych naszego systemu podziałów i to będzie dla nas definiować „niedziwność” podziału.
- Inne założenia „niedziwności” (np. spójność) - później.

Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - przykład

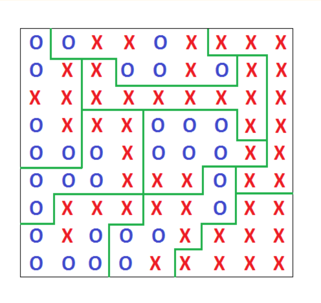


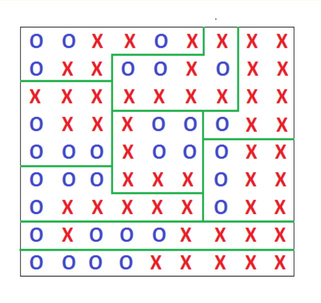
Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - przykład



„Naturalny” kształt okręgu wyborczego po lewej ma wskaźnik PP równy $\frac{\pi}{4}$. Wskaźnik PP „zmanipulowanego” okręgu po prawej (cztery obszary połączone niewielkim łącznikiem) jest istotnie mniejszy niż $\frac{\pi}{16}$.

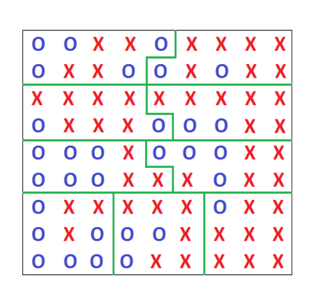
Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - przykłady





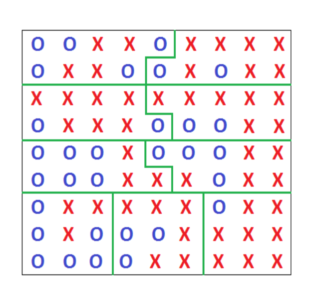
W obydwu wypadkach wskaźnik PP podziału wynosi $0,09\pi \approx 0,28$.

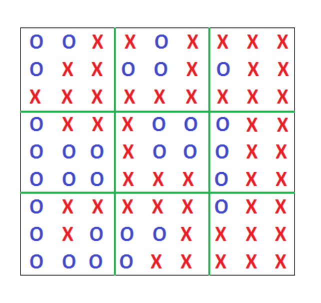
Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - przykłady



Podział o proporcjonalnym wyniku z $C = \frac{9}{49}\pi \approx 0,58$.

Wskaźnik Polsby'ego-Poppera - przykłady





Podział o proporcjonalnym wyniku z $C = \frac{9}{49}\pi \approx 0,58$.

Ale mniej proporcjonalny wynik otrzymujemy przy lepszym wskaźniku PP: $\frac{\pi}{4} \approx 0,79$.

Matematyzacja problemu: luka efektywności

Jak zmierzyć efekty podziału?

Matematyzacja problemu: luka efektywności

Jak zmierzyć efekty podziału?

- Luka efektywności to względna różnica głosów zmarnowanych, padających na obie partie.

Matematyzacja problemu: luka efektywności

Jak zmierzyć efekty podziału?

- Luka efektywności to względna różnica głosów zmarnowanych, padających na obie partie.
- Głosy zmarnowane: głosy na osobę, która nie zdobywa mandatu oraz głosy na zwycięzcę powyżej progu 50%.

Matematyzacja problemu: luka efektywności

Jak zmierzyć efekty podziału?

- Luka efektywności to względna różnica głosów zmarnowanych, padających na obie partie.
- Głosy zmarnowane: głosy na osobę, która nie zdobywa mandatu oraz głosy na zwycięzcę powyżej progu 50%.
- Zawsze około połowa głosów jest zmarnowana, ale różny jest ich podział pomiędzy kandydatów różnych partii. Oznaczamy przez $w_{A,i}$ i $w_{B,i}$ głosy zmarnowane, które padły odpowiednio na partię I i II.

Matematyzacja problemu: luka efektywności

Luka efektywności została zdefiniowana przez Stephanopolousa i Mc Ghee (2015):

Luka efektywności

$$EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B) = \frac{1}{|A \cup B|} \sum_{i=1}^{k} (w_{A,i} - w_{B,i})$$

Matematyzacja problemu: luka efektywności

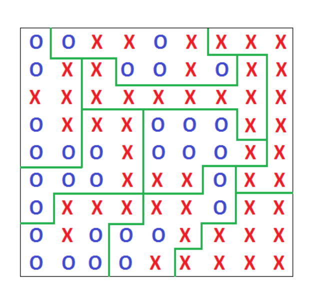
Luka efektywności została zdefiniowana przez Stephanopolousa i Mc Ghee (2015):

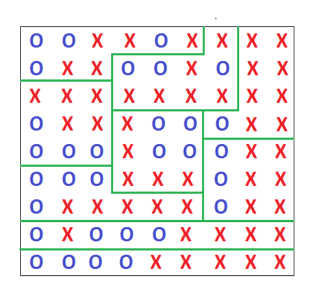
Luka efektywności

$$EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B) = \frac{1}{|A \cup B|} \sum_{i=1}^{k} (w_{A,i} - w_{B,i})$$

EG zawsze zawiera się w przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Wartości w pobliżu zera wskazują na w miarę sprawiedliwy podział wyborczy, wartości dodatnie oznaczają, że podział sprzyja partii II, a wartości ujemne - że partii I.

Luka efektywności: przykład

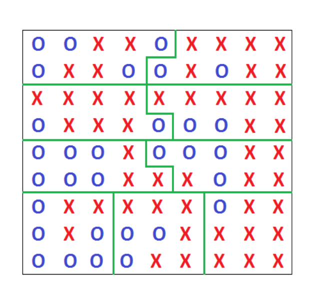




$$EG = \frac{35-1}{81} \approx 0,42.$$

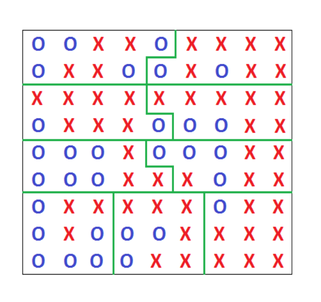
$$EG = \frac{5-31}{81} \approx -0,32.$$

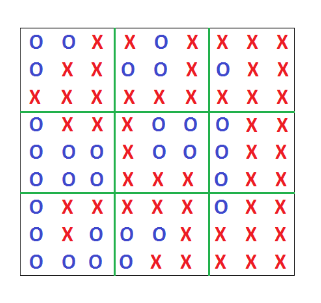
Luka efektywności: przykład



Podział o proporcjonalnym wyniku z $EG = \frac{20-16}{81} \approx 0,05$.

Luka efektywności: przykład





Podział o proporcjonalnym wyniku z $EG = \frac{20-16}{81} \approx 0,05$.

$$EG = \frac{15-21}{81} \approx -0,07.$$

Luka efektywności: problem

Stephanopoulos i McGhee sugerowali, że $|EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B)|$ nie powinien przekraczać $0,08$ bez istotnego uzasadnienia.

Luka efektywności: problem

Stephanopoulos i McGhee sugerowali, że $|EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B)|$ nie powinien przekraczać $0,08$ bez istotnego uzasadnienia. Jednakże, ścisłe ograniczenie na $|EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B)|$ nie sprawdza się ono przy dużej dysproporcji poparcia obu partii.

Luka efektywności: problem

Stephanopoulos i McGhee sugerowali, że $|EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B)|$ nie powinien przekraczać $0,08$ bez istotnego uzasadnienia. Jednakże, ścisłe ograniczenie na $|EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B)|$ nie sprawdza się ono przy dużej dysproporcji poparcia obu partii. Łagodniejsze wymaganie: dla każdego $\beta > 0$ chcemy, żeby istniało $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ (formalnie zależne of β) takie, że jeśli tylko $||A| - |B|| < \beta|A \cup B|$ to:

$$|EG(D_1, \ldots, D_k)| < \frac{1}{2} - \alpha.$$

Luka efektywności: problem

Stephanopoulos i McGhee sugerowali, że $|EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B)|$ nie powinien przekraczać $0,08$ bez istotnego uzasadnienia. Jednakże, ścisłe ograniczenie na $|EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B)|$ nie sprawdza się ono przy dużej dysproporcji poparcia obu partii. Łagodniejsze wymaganie: dla każdego $\beta > 0$ chcemy, żeby istniało $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ (formalnie zależne of β) takie, że jeśli tylko $||A| - |B|| < \beta|A \cup B|$ to:

$$|EG(D_1, \ldots, D_k)| < \frac{1}{2} - \alpha.$$

Dla zadanego β korzystne jest możliwie duże α.

Matematyzacja problemu: podsumowanie

Podsumowując, by dopasować funkcję systemu podziału do minimalnych wymagań prawnych, wszystkie podziały przez nią generowane (tj. dla dowolnych A, B, k) powinny spełniać następujące warunki:

Matematyzacja problemu: podsumowanie

Podsumowując, by dopasować funkcję systemu podziału do minimalnych wymagań prawnych, wszystkie podziały przez nią generowane (tj. dla dowolnych A, B, k) powinny spełniać następujące warunki:

- (1) Istnieje $\delta \in [0, 1)$ takie, że: $(1-\delta)\left\lfloor \frac{|A \cup B|}{k} \right\rfloor \leq |(A \cup B) \cap D_i| \leq (1+\delta)\left\lceil \frac{|A \cup B|}{k} \right\rceil$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (sugerowane $\delta \leq 0,2$).

Matematyzacja problemu: podsumowanie

Podsumowując, by dopasować funkcję systemu podziału do minimalnych wymagań prawnych, wszystkie podziały przez nią generowane (tj. dla dowolnych A, B, k) powinny spełniać następujące warunki:

- (1) Istnieje $\delta \in [0, 1)$ takie, że: $(1-\delta)\left\lfloor \frac{|A \cup B|}{k} \right\rfloor \leq |(A \cup B) \cap D_i| \leq (1+\delta)\left\lceil \frac{|A \cup B|}{k} \right\rceil$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k)$ (sugerowane $\delta \leq 0,2$).
- (2) Istnieje γ takie, że dla każdego podziału wyborczego $(D_1, \dots, D_k)$, jego wskaźnik Polsby'ego-Poppera $C(D_1, \dots, D_k) \geq \gamma$ (sugerowane $\gamma \geq 0,2$).

Matematyzacja problemu: podsumowanie

Podsumowując, by dopasować funkcję systemu podziału do minimalnych wymagań prawnych, wszystkie podziały przez nią generowane (tj. dla dowolnych A, B, k) powinny spełniać następujące warunki:

- (1) Istnieje $\delta \in [0,1)$ takie, że: $(1-\delta)\left\lfloor \frac{|A \cup B|}{k} \right\rfloor \leq |(A \cup B) \cap D_i| \leq (1+\delta)\left\lceil \frac{|A \cup B|}{k} \right\rceil$ dla każdego $i \in \{1,2,\ldots,k)$ (sugerowane $\delta \leq 0,2$).
- (2) Istnieje γ takie, że dla każdego podziału wyborczego $(D_1,\ldots,D_k)$, jego wskaźnik Polsby'ego-Poppera $C(D_1,\ldots,D_k) \geq \gamma$ (sugerowane $\gamma \geq 0,2$).
- (3) Istnieją $\alpha \in (0,\frac{1}{2}), \beta > 0$, takie, że $||A| - |B|| < \beta|A \cup B| \Rightarrow |EG(D_1,\ldots,D_k)| < \frac{1}{2} - \alpha$. (sugerowane np. $a \geq 0,42$ dla $\beta \leq \frac{1}{3}$).

Matematyzacja problemu: cel

„Minimalistyczny” cel, który będzie punktem wyjściowym tworzenia „sprawiedliwych” sytemów podziału wyborczego:

Cel

Przy zadanym maksymalnym i minimalnym k (zwykle wynika z ordynacji wyborczej), wystarczy ustalić maksymalną wartość δ, minimalną wartość γ oraz ograniczenie na minimalne α w zależności od β, by dla dowolnych zbiorów A i B warunki (1), (2) i (3) były spełnione...

Matematyzacja problemu: cel

„Minimalistyczny” cel, który będzie punktem wyjściowym tworzenia „sprawiedliwych” sytemów podziału wyborczego:

Cel

Przy zadanym maksymalnym i minimalnym k (zwykle wynika z ordynacji wyborczej), wystarczy ustalić maksymalną wartość δ, minimalną wartość γ oraz ograniczenie na minimalne α w zależności od β, by dla dowolnych zbiorów A i B warunki (1), (2) i (3) były spełnione...

... potem można narzucić dodatkowe wymagania.

Gdyby nie ta matematyka...

Niestety, okazuje się, że nawet te minimalne założenia, nałożone na systemy podziału wyborczego, są niemożliwe do spełnienia. W 2017 roku, Boris Alexeev i Dustin Mixon udowodnili następujące twierdzenie:

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0, 1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^k$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

Gdyby nie ta matematyka...

Niestety, okazuje się, że nawet te minimalne założenia, nałożone na systemy podziału wyborczego, są niemożliwe do spełnienia. W 2017 roku, Boris Alexeev i Dustin Mixon udowodnili następujące twierdzenie:

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^k$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

Idea dowodu

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0, 1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^{k}$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

Idea dowodu

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^{k}$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

W celu wykazania twierdzenia, rozważana będzie „jednorodna mieszanina” wyborców, o minimalnej przewadze głosów A nad B (warunek na β).

Idea dowodu

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^k$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

W celu wykazania twierdzenia, rozważana będzie „jednorodna mieszanina” wyborców, o minimalnej przewadze głosów A nad B (warunek na β). W takiej sytuacji, każdy okrąg wyborczy o „typowym” (w sensie warunku (2)) kształcie będzie gwarantował zwycięstwo kandydata partii I, co będzie skutkowało luką efektywności dowolnie bliską $\frac{1}{2}$.

Szkic dowodu

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^{k}$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

Szkic dowodu

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^k$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

Dzielimy S na n^2 równych *kwadracików* o boku $\frac{1}{n}$ (n dobieramy odpowiednio duże).

Szkic dowodu

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^{k}$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

Dzielimy S na n^2 równych *kwadracików* o boku $\frac{1}{n}$ (n dobieramy odpowiednio duże). Położenie wyborców jest dane jako krata taka, że w każdym kwadraciku jest l^2 wyborców.

Szkic dowodu

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^k$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

Dzielimy S na n^2 równych *kwadracików* o boku $\frac{1}{n}$ (n dobieramy odpowiednio duże). Położenie wyborców jest dane jako krata taka, że w każdym kwadraciku jest l^2 wyborców. Zbiory A i B konstruujemy tak, by każdy kwadracik zawierał a wyborców w zbiorze A i b wyborców w zbiorze B ($a + b = l^2$).

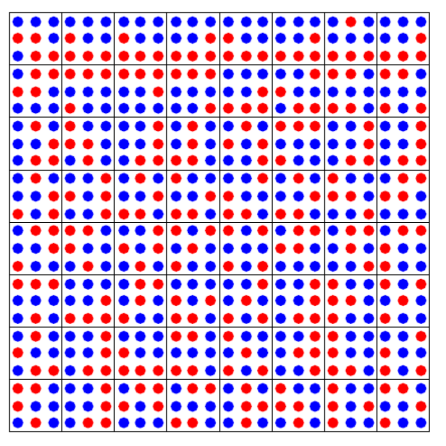
Szkic dowodu

Twierdzenie o niemożliwości

Dla każdych zadanych liczb $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ (z odpowiednich zakresów liczb) istnieją $A, B \in [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^{k}$ co najmniej jeden z warunków: równości obszarów (1), normalności kształtu (2) lub sprawiedliwości w rozdziale zmarnowanych głosów (3) nie jest spełniony.

Dzielimy S na n^2 równych *kwadracików* o boku $\frac{1}{n}$ (n dobieramy odpowiednio duże). Położenie wyborców jest dane jako krata taka, że w każdym kwadraciku jest l^2 wyborców. Zbiory A i B konstruujemy tak, by każdy kwadracik zawierał a wyborców w zbiorze A i b wyborców w zbiorze B ($a + b = l^2$). Oczywiście, $a > b$ (dokładną relację ustalimy później).

Szkic dowodu



Przykład dla $n = 8$, $l = 3$, $a = 5$, $b = 4$.

Szkic dowodu

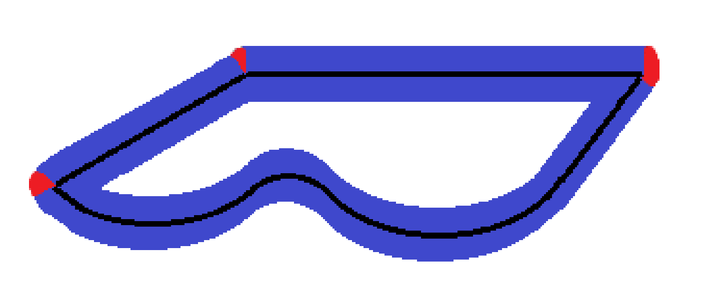
Rozważmy dowolny podział wyborczy $(D_1, \ldots, D_k)$, spełniając warunki równości i normalności kształtu.

Szkic dowodu

Rozważmy dowolny podział wyborczy $(D_1, \ldots, D_k)$, spełniając warunki równości i normalności kształtu. Ustalamy i i zauważamy, że każdy *kwadracik* przez który przechodzi ∂D_i zawarty jest w $\frac{\sqrt{2}}{n}$-otoczce ∂D_i,

Szkic dowodu

Rozważmy dowolny podział wyborczy $(D_1, \ldots, D_k)$, spełniając warunki równości i normalności kształtu. Ustalamy i i zauważamy, że każdy *kwadracik* przez który przechodzi ∂D_i zawarty jest w $\frac{\sqrt{2}}{n}$-otoczce ∂D_i, której pole powierzchni to nie więcej niż $\frac{\sqrt{2}}{n}|\partial D_i| + \frac{2\pi}{n^2}$.



Szkic dowodu

Zatem pole *kwadracików* zawierających ∂D_i jest nie większe niż $\frac{\sqrt{2}}{n}|\partial D_i| + \frac{2\pi}{n^2}$,

Szkic dowodu

Zatem pole *kwadracików* zawierających ∂D_i jest nie większe niż $\frac{\sqrt{2}}{n}|\partial D_i| + \frac{2\pi}{n^2}$, stąd jest ich nie więcej niż $d = n\sqrt{2}|\partial D_i| + 2\pi$.

Szkic dowodu

Zatem pole *kwadracików* zawierających ∂D_i jest nie większe niż $\frac{\sqrt{2}}{n}|\partial D_i| + \frac{2\pi}{n^2}$, stąd jest ich nie więcej niż $d = n\sqrt{2}|\partial D_i| + 2\pi$. D_i zawiera co najwyżej $n^2|D_i|$, a co najmniej $n^2|D_i| - d$ *kwadracików*.

Szkic dowodu

Zatem pole *kwadracików* zawierających ∂D_i jest nie większe niż $\frac{\sqrt{2}}{n}|\partial D_i| + \frac{2\pi}{n^2}$, stąd jest ich nie więcej niż $d = n\sqrt{2}|\partial D_i| + 2\pi$. D_i zawiera co najwyżej $n^2|D_i|$, a co najmniej $n^2|D_i| - d$ *kwadracików*. Stąd liczba głosów na partię I w tym okręgu spełnia zależność:

$$|A \cap D_i| \geq$$

Szkic dowodu

Zatem pole *kwadracików* zawierających ∂D_i jest nie większe niż $\frac{\sqrt{2}}{n}|\partial D_i| + \frac{2\pi}{n^2}$, stąd jest ich nie więcej niż $d = n\sqrt{2}|\partial D_i| + 2\pi$. D_i zawiera co najwyżej $n^2|D_i|$, a co najmniej $n^2|D_i| - d$ *kwadracików*. Stąd liczba głosów na partię I w tym okręgu spełnia zależność:

$$|A \cap D_i| \geq a(n^2|D_i| - d);$$

, a liczba głosów na partię II:

$$|B \cap D_i| \leq$$

Szkic dowodu

Zatem pole *kwadracików* zawierających ∂D_i jest nie większe niż $\frac{\sqrt{2}}{n}|\partial D_i| + \frac{2\pi}{n^2}$, stąd jest ich nie więcej niż $d = n\sqrt{2}|\partial D_i| + 2\pi$. D_i zawiera co najwyżej $n^2|D_i|$, a co najmniej $n^2|D_i| - d$ *kwadracików*. Stąd liczba głosów na partię I w tym okręgu spełnia zależność:

$$|A \cap D_i| \geq a(n^2|D_i| - d);$$

, a liczba głosów na partię II:

$$|B \cap D_i| \leq b(n^2|D_i| + d).$$

Szkic dowodu

Z warunków (1) i (2) wynika, że dla odpowiednio dużego n można dobrać a i b takie, że $c = 1 - \frac{b}{a}$ jest dowolnie bliskie 0 i jednocześnie dla każdego i $b(n^2|D_i| + d) \leq a(n^2|D_i| - d)$.

Szkic dowodu

Z warunków (1) i (2) wynika, że dla odpowiednio dużego n można dobrać a i b takie, że $c = 1 - \frac{b}{a}$ jest dowolnie bliskie 0 i jednocześnie dla każdego i $b(n^2|D_i| + d) \leq a(n^2|D_i| - d)$. Stąd wynika, że dla każdego i $|B \cap D_i| \leq |A \cap D_i|$, czyli w każdym okręgu wygrywa partia I.

Szkic dowodu

Z warunków (1) i (2) wynika, że dla odpowiednio dużego n można dobrać a i b takie, że $c = 1 - \frac{b}{a}$ jest dowolnie bliskie 0 i jednocześnie dla każdego i $b(n^2|D_i| + d) \leq a(n^2|D_i| - d)$. Stąd wynika, że dla każdego i $|B \cap D_i| \leq |A \cap D_i|$, czyli w każdym okręgu wygrywa partia I.
Wtedy $bn^2 = (1-c)an^2$ głosów na partię II jest zmarnowanych, podczas gdy wyborcy partii I marnują jedynie $an^2 - bn^2 = can^2$ głosów.

Szkic dowodu

Z warunków (1) i (2) wynika, że dla odpowiednio dużego n można dobrać a i b takie, że $c = 1 - \frac{b}{a}$ jest dowolnie bliskie 0 i jednocześnie dla każdego i $b(n^2|D_i| + d) \leq a(n^2|D_i| - d)$. Stąd wynika, że dla każdego i $|B \cap D_i| \leq |A \cap D_i|$, czyli w każdym okręgu wygrywa partia I.
Wtedy $bn^2 = (1 - c)an^2$ głosów na partię II jest zmarnowanych, podczas gdy wyborcy partii I marnują jedynie $an^2 - bn^2 = can^2$ głosów.

Szkic dowodu

Zmarnowanych jest $(1-c)an^2$ głosów na partię II i $an^2 - bn^2 = can^2$ głosów na partię II.

Szkic dowodu

Zmarnowanych jest $(1-c)an^2$ głosów na partię II i $an^2 - bn^2 = can^2$ głosów na partię II. Stąd:

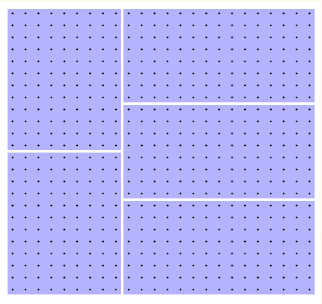
$$\frac{|A|-|B|}{|A \cup B|} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{c}{2-c} = \beta$$

może być dowolnie małe, a

$$|EG| = \left|\frac{2c-1}{2-c}\right| = \frac{1}{2} - \alpha$$

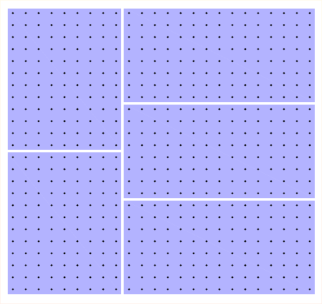
jest dowolnie bliskie $\frac{1}{2}$, co jest sprzeczne z (3).

Ilustracja twierdzenia

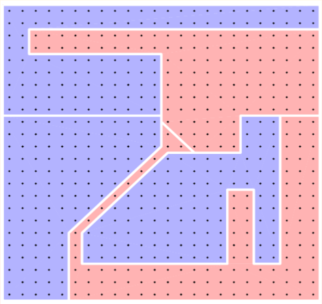


Podział zgodny z *shortest splitline algorithm* prowadzi do minimalizacji δ i dużego $\gamma > 0,7$, ale $|EG| > 0,38$.

Ilustracja twierdzenia



Podział zgodny z *shortest splitline algorithm* prowadzi do minimalizacji δ i dużego $\gamma > 0,7$, ale $|EG| > 0,38$.



$\delta < 0,04$ i $|EG| < 0,02$, ale $C(D_1, \ldots, D_k) \approx 0,12$.

Wnioski z twierdzenia o niemożliwości

Wnioski z twierdzenia o niemożliwości

- Każdy system tworzenia okręgów wyborczych ma jakieś wady (nie oznacza to, że jeden nie może być lepszy od innego).

Wnioski z twierdzenia o niemożliwości

- Każdy system tworzenia okręgów wyborczych ma jakieś wady (nie oznacza to, że jeden nie może być lepszy od innego).
- W rzeczywistych sytuacjach, warunki (1), (2), (3) nadal mogą być używane do badania okręgów wyborczych w praktyce (ale z zachowaniem ostrożności). W szczególności, nie każdy rozkład głosujących prowadzi do konfliktu między tymi warunkami.

Wnioski z twierdzenia o niemożliwości

- Każdy system tworzenia okręgów wyborczych ma jakieś wady (nie oznacza to, że jeden nie może być lepszy od innego).
- W rzeczywistych sytuacjach, warunki (1), (2), (3) nadal mogą być używane do badania okręgów wyborczych w praktyce (ale z zachowaniem ostrożności). W szczególności, nie każdy rozkład głosujących prowadzi do konfliktu między tymi warunkami.
- Najczęściej, im bardziej niejednorodny jest rozkład preferencji politycznych w populacji, tym łatwiej wyznaczyć granice okręgów wyborczych zgodne z warunkami (1), (2), (3) (acz sama obecność „klastrów" preferencji nie rozwiązuje problemu).

Wnioski z twierdzenia o niemożliwości

- Każdy system tworzenia okręgów wyborczych ma jakieś wady (nie oznacza to, że jeden nie może być lepszy od innego).
- W rzeczywistych sytuacjach, warunki (1), (2), (3) nadal mogą być używane do badania okręgów wyborczych w praktyce (ale z zachowaniem ostrożności). W szczególności, nie każdy rozkład głosujących prowadzi do konfliktu między tymi warunkami.
- Najczęściej, im bardziej niejednorodny jest rozkład preferencji politycznych w populacji, tym łatwiej wyznaczyć granice okręgów wyborczych zgodne z warunkami (1), (2), (3) (acz sama obecność „klastrów” preferencji nie rozwiązuje problemu).
- Jednorodność preferencji nie jest, jak na razie, szczegółowo zbadana. Jednak istnieją sugestie, że sytuacje sprzyjające paradoksowi się zdarzają (Massachussetts).

Źródła

- https://rangevoting.org/GerryExamples.html
- B. Alexeev, D. G. Mixon (2018). *An Impossibility Theorem for Gerrymandering*, The American Mathematical Monthly, 125:10, 878-884,
- M. Bernstein, M. Duchin (2017). *A Formula Goes to Court: Partisan Gerrymandering and the Efficiency Gap*. Notices of the American Mathematical Society. 64. 10.1090/noti1573.
- C. Cameron, D. Epstein and S. O'Halloran (1996). *Do Majority-Minority Districts Maximize Substantive Black Representation in Congress?*, The American Political Science Review Vol. 90, No. 4 , 794-812.
- M. Pierzgalski (2015). *Gerrymandering, czyli manipulowanie strukturą okręgów wyborczych*. Studia Socjologiczne 3 (218)

Do poczytania

- https://www.math.cmu.edu/∼wes/gerrymandering.html
- W. Pegden,A. D. Procaccia, D. Yu (2017). A partisan districting protocol with provably nonpartisan outcomes, https://arxiv.org/abs/1710.08781
- G.Owen, B.Grofman (1988). *Optimal partisan gerrymandering*. Political geography quarterly. Vol.7 No.1, 5-22.
- N. Stephanopoulos, E. McGhee,Partisan gerrymandering and the efficiency gap, TheUnniversity of Chicago Law Review (2015), 831-900.

Dziękuję za uwagę.