~~Jak Fermat nawet Wielkim Matematykom rzucał kłody pod nogi~~

Adam Gregosiewicz

LX Szkoła Matematyki Poglądowej, 24 sierpnia 2019 r.

Dlaczego WIELCY i mali popełniają błędy?

Adam Gregosiewicz

LX Szkoła Matematyki Poglądowej, 24 sierpnia 2019 r.

H. Cartan

H. Cartan, J. P. Serre

H. Cartan, J. P. Serre (zdj.: P. Halmos)

J. P. Serre

J. P. Serre, *How to Write Mathematics Badly*

“Very often mistakes in proofs are in the nonwritten part.”

J. P. Serre, *How to Write Mathematics Badly*

Intuicja!

Część I

Błędy WIELKICH

Wielkie Twierdzenie Fermata

$$x^n + y^n = z^n$$

Wielkie Twierdzenie Fermata

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Wielkie Twierdzenie Fermata

$$x^3 + y^3 = z^3$$

L. Euler

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3$$

- x, y, z parami względnie pierwsze, x, y nieparzyste, z parzyste.

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3$$

- x, y, z parami względnie pierwsze, x, y nieparzyste, z parzyste.
- $2p := x + y$, $2q := x - y$.

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3$$

- x, y, z parami względnie pierwsze, x, y nieparzyste, z parzyste.
- $2p := x + y$, $2q := x - y$.
- p i q są dodatnie, względnie pierwsze oraz różnej parzystości.

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3$$

- x, y, z parami względnie pierwsze, x, y nieparzyste, z parzyste.
- $2p := x + y$, $2q := x - y$.
- p i q są dodatnie, względnie pierwsze oraz różnej parzystości.
- $$= z^3.$$

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3$$

- x, y, z parami względnie pierwsze, x, y nieparzyste, z parzyste.
- $2p := x + y$, $2q := x - y$.
- p i q są dodatnie, względnie pierwsze oraz różnej parzystości.
- $$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = z^3.$$

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3$$

- x, y, z parami względnie pierwsze, x, y nieparzyste, z parzyste.
- $2p := x + y$, $2q := x - y$.
- p i q są dodatnie, względnie pierwsze oraz różnej parzystości.
- $$2p(p^2 + 3q^2) = z^3.$$

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p \qquad \text{lub} \qquad 3 \mid p$$

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p$$

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p$$

- $2p$ i $p^2 + 3q^2$ są względnie pierwsze, więc obie są sześcianami.

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p$$

- $2p$ i $p^2 + 3q^2$ są względnie pierwsze, więc obie są sześcianami.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem $\Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2$, $q = 3a^2b - 3b^3$.

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p$$

- $2p$ i $p^2 + 3q^2$ są względnie pierwsze, więc obie są sześcianami.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem $\Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2$, $q = 3a^2b - 3b^3$.
- $2p = 2a(a - 3b)(a + 3b)$ jest sześcianem.

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p$$

- $2p$ i $p^2 + 3q^2$ są względnie pierwsze, więc obie są sześcianami.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem $\Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2$, $q = 3a^2b - 3b^3$.
- $2p = 2a(a - 3b)(a + 3b)$ jest sześcianem.
- a i b są względnie pierwsze, więc $2a$, $a - 3b$ i $a + 3b$ są parami względnie pierwsze, a zatem są sześcianami.

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p$$

- $2p$ i $p^2 + 3q^2$ są względnie pierwsze, więc obie są sześcianami.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem $\Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2$, $q = 3a^2b - 3b^3$.
- $2p = 2a(a - 3b)(a + 3b)$ jest sześcianem.
- a i b są względnie pierwsze, więc $2a$, $a - 3b$ i $a + 3b$ są parami względnie pierwsze, a zatem są sześcianami.
- $$(a - 3b) + (a + 3b) = 2a.$$

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p$$

- $2p$ i $p^2 + 3q^2$ są względnie pierwsze, więc obie są sześcianami.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem $\Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2$, $q = 3a^2b - 3b^3$.
- $2p = 2a(a - 3b)(a + 3b)$ jest sześcianem.
- a i b są względnie pierwsze, więc $2a$, $a - 3b$ i $a + 3b$ są parami względnie pierwsze, a zatem są sześcianami.
- $$(a - 3b) + (a + 3b) = 2a.$$
- Dostajemy nowe rozwiązanie „z mniejszym z”.

Euler, 1770 r.

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2p(p^2 + 3q^2) \text{ jest sześcianem}$$

$$3 \nmid p$$

- $2p$ i $p^2 + 3q^2$ są względnie pierwsze, więc obie są sześcianami.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem $\Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2$, $q = 3a^2b - 3b^3$.
- $2p = 2a(a - 3b)(a + 3b)$ jest sześcianem.
- a i b są względnie pierwsze, więc $2a$, $a - 3b$ i $a + 3b$ są parami względnie pierwsze, a zatem są sześcianami.
- $$(a - 3b) + (a + 3b) = 2a.$$
- Dostajemy nowe rozwiązanie „z mniejszym z”.

Euler, 1770 r.

$$p^2 + 3q^2 \text{ jest sześcianem} \Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2,\ q = 3a^2b - 3b^3$$

Euler, 1770 r.

$$p^2 + 3q^2 \text{ jest sześcianem} \Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2,\ q = 3a^2b - 3b^3$$

- Rozważamy liczby postaci $a + i\sqrt{3}b$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$).

Euler, 1770 r.

$$p^2 + 3q^2 \text{ jest sześcianem} \Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2,\ q = 3a^2b - 3b^3$$

- Rozważamy liczby postaci $a + i\sqrt{3}b$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$).
- $p^2 + 3q^2 = (p + i\sqrt{3}q)(p - i\sqrt{3}q)$.

Euler, 1770 r.

$$p^2 + 3q^2 \text{ jest sześcianem} \Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2,\ q = 3a^2b - 3b^3$$

- Rozważamy liczby postaci $a + i\sqrt{3}b$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$).
- $p^2 + 3q^2 = (p + i\sqrt{3}q)(p - i\sqrt{3}q)$.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem, a elementy $p + i\sqrt{3}q$ i $p - i\sqrt{3}q$ są nierozkładalne, więc są sześcianami.

Euler, 1770 r.

$$p^2 + 3q^2 \text{ jest sześcianem} \Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2,\ q = 3a^2b - 3b^3$$

- Rozważamy liczby postaci $a + i\sqrt{3}b$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$).
- $p^2 + 3q^2 = (p + i\sqrt{3}q)(p - i\sqrt{3}q)$.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem, a elementy $p + i\sqrt{3}q$ i $p - i\sqrt{3}q$ są nierozkładalne, więc są sześcianami.
- $p + i\sqrt{3}q = (a + i\sqrt{3}b)^3 = a^3 - 9ab^2 + i\sqrt{3}(3a^2b - 3b^3)$.

Euler, 1770 r.

$p^2 + 3q^2$ jest sześcianem $\Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2$, $q = 3a^2b - 3b^3$

- Rozważamy liczby postaci $a + i\sqrt{3}b$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}[i\sqrt{3}])$.
- $p^2 + 3q^2 = (p + i\sqrt{3}q)(p - i\sqrt{3}q)$.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem, a elementy $p + i\sqrt{3}q$ i $p - i\sqrt{3}q$ są nierozkładalne, więc są sześcianami.
- $p + i\sqrt{3}q = (a + i\sqrt{3}b)^3 = a^3 - 9ab^2 + i\sqrt{3}(3a^2b - 3b^3)$.

Euler, 1770 r.

$$p^2 + 3q^2 \text{ jest sześcianem} \Longrightarrow p = a^3 - 9ab^2,\ q = 3a^2b - 3b^3$$

- Rozważamy liczby postaci $a + i\sqrt{3}b$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$).
- $p^2 + 3q^2 = (p + i\sqrt{3}q)(p - i\sqrt{3}q)$.
- $p^2 + 3q^2$ jest sześcianem, a elementy $p + i\sqrt{3}q$ i $p - i\sqrt{3}q$ są nierozkładalne, więc są sześcianami.
- $p + i\sqrt{3}q = (a + i\sqrt{3}b)^3 = a^3 - 9ab^2 + i\sqrt{3}(3a^2b - 3b^3)$.

Euler, 1770 r.

W $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ nie ma jednoznaczności rozkładu!

Euler, 1770 r.

W $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ nie ma jednoznaczności rozkładu!

Ale jest w $\mathbb{Z}[(1+i\sqrt{3})/2]$...

Euler, 1770 r., Lemé, 1847 r.

W $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ nie ma jednoznaczności rozkładu!

Ale jest w $\mathbb{Z}[(1+i\sqrt{3})/2]$...

I ogólnie w $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$.

Euler, 1770 r., Lemé, 1847 r.

W $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ nie ma jednoznaczności rozkładu!

Ale jest w $\mathbb{Z}[(1+i\sqrt{3})/2]$...

I ogólnie w $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$. Dla $n \leq 22$.

Lebesgue, 1905 r.

H. Lebesgue

Funkcja analityczna i różnowartościowa
ma analityczną funkcję odwrotną.

Lebesgue, 1905 r.

H. Lebesgue

Funkcja analityczna i różnowartościowa
ma analityczną funkcję odwrotną.

Rzut zbioru borelowskiego w $\mathbb{R}^2$ na dowolną prostą jest zbiorem borelowskim.

Sur les fonctions représentables analytiquement;

PAR M. H. LEBESGUE.

VII. — Relations entre différentes familles de fonctions.

Fonctions définies analytiquement. — On sait que, un ensemble E de points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant donné, on appelle *projection de cet ensemble sur la variété* $x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_n = 0$ l'ensemble e de tous les systèmes de valeurs associées $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$. Je vais démontrer que, *si* E *est mesurable* B, *sa projection l'est aussi.*

Cela est évident si E est un intervalle, car alors e en est un aussi. Or tout ensemble mesurable B se déduit d'intervalles par l'application

répétée des opérations I et II′, lesquelles se conservent en projection [1]; la proposition est établie.

---

[1] Cela ne serait pas vrai pour l'opération II.

Lebesgue, 1905 r.

Funkcja analityczna i różnowartościowa
ma analityczną funkcję odwrotną.

Rzut zbioru borelowskiego w $\mathbb{R}^2$ na dowolną prostą jest zbiorem borelowskim.

Lebesgue, 1905 r.

Funkcja analityczna i różnowartościowa
ma analityczną funkcję odwrotną.

Rzut zbioru borelowskiego w $\mathbb{R}^2$ na dowolną prostą jest zbiorem borelowskim.

- Rzut zbioru otwartego jest otwarty.

Lebesgue, 1905 r.

Funkcja analityczna i różnowartościowa
ma analityczną funkcję odwrotną.

Rzut zbioru borelowskiego w $\mathbb{R}^2$ na dowolną prostą jest zbiorem borelowskim.

- Rzut zbioru otwartego jest otwarty.
- Rodzina zbiorów borelowskich jest najmniejszą rodziną zawierającą zbiory otwarte, która jest zamknięta ze względu na operacje przeliczalnej sumy i zstępującego iloczynu.

Lebesgue, 1905 r.

Rzut nie jest przemienny z iloczynem zstępującym!

Lebesgue, 1905 r.

Rzut nie jest przemienny z iloczynem zstępującym!


N. Luzin, M. Suslin

Lagrange, Ampère, Cauchy, Riemann, XVIII-XIX w.

Każdą funkcję można zapisać w postaci szeregu potęgowego

Lagrange, Ampère, Cauchy, Riemann, XVIII-XIX w.

Każdą funkcję można zapisać w postaci szeregu potęgowego

. . . bo każda funkcja dana jest „wzorem”.

Lagrange, Ampère, Cauchy, Riemann, XVIII-XIX w.

Każdą funkcję można zapisać w postaci szeregu potęgowego

... bo każda funkcja dana jest „wzorem”.

Każda funkcja ciągła jest różniczkowalna

Lagrange, Ampère, Cauchy, Riemann, XVIII-XIX w.

Każdą funkcję można zapisać w postaci szeregu potęgowego
. . . bo każda funkcja dana jest „wzorem”.

Każda funkcja ciągła jest różniczkowalna
. . . bo każda funkcja ciągła jest kawałkami monotoniczna.

Lagrange, Ampère, Cauchy, Riemann, XVIII-XIX w.

Każdą funkcję można zapisać w postaci szeregu potęgowego
...bo każda funkcja dana jest „wzorem”.

Każda funkcja ciągła jest różniczkowalna
...bo każda funkcja ciągła jest kawałkami monotoniczna.

Granica funkcji ciągłych jest ciągła

Lagrange, Ampère, Cauchy, Riemann, XVIII-XIX w.

Każdą funkcję można zapisać w postaci szeregu potęgowego
...bo każda funkcja dana jest „wzorem”.

Każda funkcja ciągła jest różniczkowalna
...bo każda funkcja ciągła jest kawałkami monotoniczna.

Granica funkcji ciągłych jest ciągła
...bo granica punktowa jest granicą jednostajną.

Lagrange, Ampère, Cauchy, Riemann, XVIII-XIX w.

Każdą funkcję można zapisać w postaci szeregu potęgowego
...bo każda funkcja dana jest „wzorem".

Każda funkcja ciągła jest różniczkowalna
...bo każda funkcja ciągła jest kawałkami monotoniczna.

Granica funkcji ciągłych jest ciągła
...bo granica punktowa jest granicą jednostajną.

Zasada Dirichleta

Lagrange, Ampère, Cauchy, Riemann, XVIII-XIX w.

Każdą funkcję można zapisać w postaci szeregu potęgowego
...bo każda funkcja dana jest „wzorem".

Każda funkcja ciągła jest różniczkowalna
...bo każda funkcja ciągła jest kawałkami monotoniczna.

Granica funkcji ciągłych jest ciągła
...bo granica punktowa jest granicą jednostajną.

Zasada Dirichleta
...bo każdy funkcjonał osiąga swoje minimum.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

Niech $K, L \subset \mathbb{R}^2$ będą wypukłe, zwarte i symetryczne względem 0.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

Niech $K, L \subset \mathbb{R}^2$ będą wypukłe, zwarte i symetryczne względem 0.

Załóżmy, że

$$\mathrm{Vol}_1(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_1(L \cap H)$$

dla dowolnej prostej H przechodzącej przez 0.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

Niech $K, L \subset \mathbb{R}^2$ będą wypukłe, zwarte i symetryczne względem 0.

Załóżmy, że

$$\mathrm{Vol}_1(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_1(L \cap H)$$

dla dowolnej prostej H przechodzącej przez 0.

$$\mathrm{Vol}_2\, K \leq \mathrm{Vol}_2\, L?$$

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

Niech $K, L \subset \mathbb{R}^n$ będą wypukłe, zwarte i symetryczne względem 0.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

Niech $K, L \subset \mathbb{R}^n$ będą wypukłe, zwarte i symetryczne względem 0.

Załóżmy, że

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H)$$

dla dowolnej $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny H przechodzącej przez 0.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

Niech $K, L \subset \mathbb{R}^n$ będą wypukłe, zwarte i symetryczne względem 0.

Załóżmy, że

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H)$$

dla dowolnej $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyzny H przechodzącej przez 0.

$$\mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \geq 12$, Larman, Rogers, 1975 r.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \le \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \le \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \ge 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \ge 10$, Ball, 1988 r.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \geq 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 10$, Ball, 1988 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 5$, Giannopoulos, Bourgain, Papadimitrakis, Gardner, ok. 1990 r.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \geq 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 10$, Ball, 1988 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 5$, Giannopoulos, Bourgain, Papadimitrakis, Gardner, ok. 1990 r.
- Dowód dla $n = 3$, Gardner, 1994 r.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \geq 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 10$, Ball, 1988 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 5$, Giannopoulos, Bourgain, Papadimitrakis, Gardner, ok. 1990 r.
- Dowód dla $n = 3$, Gardner, 1994 r.
- Kontrprzykład dla $n = 4$, Zhang, 1994 r., Ann. of Math.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \le \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Vol}_n K \le \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \ge 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \ge 10$, Ball, 1988 r.
- Kontrprzykład dla $n \ge 5$, Giannopoulos, Bourgain, Papadimitrakis, Gardner, ok. 1990 r.
- Dowód dla $n = 3$, Gardner, 1994 r.
- Kontrprzykład dla $n = 4$, Zhang, 1994 r., Ann. of Math.
- Kontrprzykład kontrprzykładu dla $n = 4$, Koldobsky, 1997 r.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \geq 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 10$, Ball, 1988 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 5$, Giannopoulos, Bourgain, Papadimitrakis, Gardner, ok. 1990 r.
- Dowód dla $n = 3$, Gardner, 1994 r.
- Kontrprzykład dla $n = 4$, Zhang, 1994 r., Ann. of Math.
- Kontrprzykład kontrprzykładu dla $n = 4$, Koldobsky, 1997 r.
- Dowód dla $n = 4$,

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \geq 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 10$, Ball, 1988 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 5$, Giannopoulos, Bourgain, Papadimitrakis, Gardner, ok. 1990 r.
- Dowód dla $n = 3$, Gardner, 1994 r.
- Kontrprzykład dla $n = 4$, Zhang, 1994 r., Ann. of Math.
- Kontrprzykład kontrprzykładu dla $n = 4$, Koldobsky, 1997 r.
- Dowód dla $n = 4$, Zhang, 1999 r.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \geq 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 10$, Ball, 1988 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 5$, Giannopoulos, Bourgain, Papadimitrakis, Gardner, ok. 1990 r.
- Dowód dla $n = 3$, Gardner, 1994 r.
- Kontrprzykład dla $n = 4$, Zhang, 1994 r., Ann. of Math.
- Kontrprzykład kontrprzykładu dla $n = 4$, Koldobsky, 1997 r.
- Dowód dla $n = 4$, Zhang, 1999 r., Ann. of Math.

Problem Busemanna-Petty'ego, 1956 r.

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap H) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap H) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Vol}_n K \leq \mathrm{Vol}_n L?$$

- Oczywiste dla $n = 2$.
- Kontrprzykład dla $n \geq 12$, Larman, Rogers, 1975 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 10$, Ball, 1988 r.
- Kontrprzykład dla $n \geq 5$, Giannopoulos, Bourgain, Papadimitrakis, Gardner, ok. 1990 r.
- Dowód dla $n = 3$, Gardner, 1994 r.
- Kontrprzykład dla $n = 4$, Zhang, 1994 r., Ann. of Math.
- Kontrprzykład kontrprzykładu dla $n = 4$, Koldobsky, 1997 r.
- Dowód dla $n = 4$, Zhang, 1999 r., Ann. of Math.

Część II

Błędy małych…

Ślad

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Ślad

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(ACB) = \dots$$

Ślad

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) \neq \mathrm{tr}(ACB) = \dots$$

Ślad jest niezmienniczy ze względu na permutacje cykliczne!

Własność Markowa

Przyszłość zależy od teraźniejszości, a nie od przeszłości.

Własność Markowa

Przyszłość zależy od teraźniejszości, a nie od przeszłości.

Przyszłość zależy od przeszłości tylko przez teraźniejszość.

Własność Markowa

Przyszłość zależy od teraźniejszości, a nie od przeszłości.

Przyszłość zależy od przeszłości tylko przez teraźniejszość.

(X_n) - błądzenie losowe na prostej

Własność Markowa

Przyszłość zależy od teraźniejszości, a nie od przeszłości.

Przyszłość zależy od przeszłości tylko przez teraźniejszość.

(X_n) - błądzenie losowe na prostej

$$\mathbb{P}(X_4 > 0 | X_3 > 0,\ X_2 > 0) =$$

Własność Markowa

Przyszłość zależy od teraźniejszości, a nie od przeszłości.

Przyszłość zależy od przeszłości tylko przez teraźniejszość.

(X_n) - błądzenie losowe na prostej

$$\mathbb{P}(X_4 > 0 | X_3 > 0,\ X_2 > 0) = \mathbb{P}(X_4 > 0 | X_3 > 0)$$

Własność Markowa

Przyszłość zależy od teraźniejszości, a nie od przeszłości.

Przyszłość zależy od przeszłości tylko przez teraźniejszość.

(X_n) - błądzenie losowe na prostej

$$\mathbb{P}(X_4 > 0 | X_3 > 0,\ X_2 > 0) \neq \mathbb{P}(X_4 > 0 | X_3 > 0)$$

Własność Markowa

Przyszłość zależy od teraźniejszości, a nie od przeszłości.

Przyszłość zależy od przeszłości tylko przez teraźniejszość.

(X_n) - błądzenie losowe na prostej

$$\mathbb{P}(X_4 > 0 | X_3 > 0,\ X_2 > 0) \neq \mathbb{P}(X_4 > 0 | X_3 > 0)$$

Przyszłość zależy tylko od teraźniejszości, ale trzeba wiedzieć, co rozumieć przez teraźniejszość.

Obraz wielomianu, Putnam 1969 r., zadanie A1

Opisać wszystkie możliwe zbiory wartości wielomianu rzeczywistego dwóch zmiennych.

Obraz wielomianu, Putnam 1969 r., zadanie A1

Opisać wszystkie możliwe zbiory wartości wielomianu rzeczywistego dwóch zmiennych.

Zbiorem wartości wielomianu rzeczywistego jednej zmiennej jest zawsze zbiór domknięty: $\{a\}$, $[a, b]$ lub $\mathbb{R}$.

Obraz wielomianu, Putnam 1969 r., zadanie A1

Opisać wszystkie możliwe zbiory wartości wielomianu rzeczywistego dwóch zmiennych.

Zbiorem wartości wielomianu rzeczywistego jednej zmiennej jest zawsze zbiór domknięty: $\{a\}$, $[a, b]$ lub $\mathbb{R}$.

Wielomian

$$p(x, y) = (1 - xy)^2 + x^2$$

ma zbiór wartości $(0, +\infty)$.

Obraz wielomianu, Putnam 1969 r., zadanie A1

Opisać wszystkie możliwe zbiory wartości wielomianu rzeczywistego dwóch zmiennych.

Zbiorem wartości wielomianu rzeczywistego jednej zmiennej jest zawsze zbiór domknięty: $\{a\}$, $[a, b]$ lub $\mathbb{R}$.

Wielomian

$$p(x, y) = (1 - xy)^2 + x^2$$

ma zbiór wartości $(0, +\infty)$.

Wielomian dwóch zmiennych może mieć otwarty zbiór wartości.

Operator odwrotny

Każdy liniowy operator ograniczony i „na” jest otwarty.

Operator odwrotny

Każdy liniowy operator ograniczony i „na” jest otwarty.

Każdy liniowy operator ograniczony, różnowartościowy i „na” ma liniowy i ograniczony operator odwrotny.

Operator odwrotny

Każdy liniowy operator ograniczony i „na”
ma liniowy i ograniczony prawy odwrotny.

Operator odwrotny

Każdy liniowy operator ograniczony i „na"
ma liniowy i ograniczony prawy odwrotny.

- Każdy liniowy operator ograniczony i „na" ma liniowy prawy odwrotny (Lemat Kuratowskiego-Zorna).

Operator odwrotny

**Każdy liniowy operator ograniczony i „na”
ma liniowy i ograniczony prawy odwrotny.**

- Każdy liniowy operator ograniczony i „na” ma liniowy prawy odwrotny (Lemat Kuratowskiego-Zorna).

- Każdy liniowy operator ograniczony i „na” ma ograniczony prawy odwrotny (twierdzenie o operatorze otwartym).

Operator odwrotny

**Każdy liniowy operator ograniczony i „na"
ma liniowy i ograniczony prawy odwrotny.**

- Każdy liniowy operator ograniczony i „na" ma liniowy prawy odwrotny (Lemat Kuratowskiego-Zorna).
- Każdy liniowy operator ograniczony i „na" ma ograniczony prawy odwrotny (twierdzenie o operatorze otwartym).

Operator odwrotny

**Każdy liniowy operator ograniczony i „na”
ma liniowy i ograniczony prawy odwrotny.**

- Każdy liniowy operator ograniczony i „na” ma liniowy prawy odwrotny (Lemat Kuratowskiego-Zorna).
- Każdy liniowy operator ograniczony i „na” ma ograniczony prawy odwrotny (twierdzenie o operatorze otwartym).

Ale to nie musi być ten sam operator!

Operator odwrotny

Każdy liniowy operator ograniczony i „na”
ma liniowy i ograniczony prawy odwrotny.

- Każdy liniowy operator ograniczony i „na” ma liniowy prawy odwrotny (Lemat Kuratowskiego-Zorna).
- Każdy liniowy operator ograniczony i „na” ma ograniczony prawy odwrotny (twierdzenie o operatorze otwartym).

Ale to nie musi być ten sam operator!

Liniowy operator ograniczony i „na” nie musi mieć liniowego i ograniczonego prawego odwrotnego.

Ośrodkowość

Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

Ośrodkowość

Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

- Niech $X = \mathbb{R}$ z topologią generowaną przez $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Ośrodkowość

Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

- Niech $X = \mathbb{R}$ z topologią generowaną przez $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Rozważmy przestrzeń $X \times X$, która jest ośrodkowa jako iloczyn kartezjański przestrzeni ośrodkowych.

Ośrodkowość

Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

- Niech $X = \mathbb{R}$ z topologią generowaną przez $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Rozważmy przestrzeń $X \times X$, która jest ośrodkowa jako iloczyn kartezjański przestrzeni ośrodkowych.
- Niech $Y \subset X \times X$ będzie prostą $y = -x$.

Ośrodkowość

Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

- Niech $X = \mathbb{R}$ z topologią generowaną przez $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Rozważmy przestrzeń $X \times X$, która jest ośrodkowa jako iloczyn kartezjański przestrzeni ośrodkowych.
- Niech $Y \subset X \times X$ będzie prostą $y = -x$.

Ośrodkowość

Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

- Niech $X = \mathbb{R}$ z topologią generowaną przez $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Rozważmy przestrzeń $X \times X$, która jest ośrodkowa jako iloczyn kartezjański przestrzeni ośrodkowych.
- Niech $Y \subset X \times X$ będzie prostą $y = -x$.

Przestrzeń Y nie jest ośrodkowa.

Ośrodkowość

Podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

- Niech $X = \mathbb{R}$ z topologią generowaną przez $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Rozważmy przestrzeń $X \times X$, która jest ośrodkowa jako iloczyn kartezjański przestrzeni ośrodkowych.
- Niech $Y \subset X \times X$ będzie prostą $y = -x$.

Przestrzeń Y nie jest ośrodkowa.

Podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metrycznej jest ośrodkowa!

Domknięcia

Czym jest domknięcie kuli jednostkowej w dowolnej przestrzeni metrycznej?

Domknięcia

Czym jest domknięcie kuli jednostkowej w dowolnej przestrzeni metrycznej?

Domknięciem otwartej kuli jednostkowej w metryce dyskretnej jest cała przestrzeń.

Zbiory otwarte

Jak wyglądają zbiory otwarte G, spełniające

$$\mathbb{Q} \subset G \subset \mathbb{R}?$$

Zbiory otwarte

Jak wyglądają zbiory otwarte G, spełniające

$$\mathbb{Q} \subset G \subset \mathbb{R}?$$

Mogą wyglądać różnie.

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (q_n - 1/5^n, q_n + 1/5^n).$$

Zbiory otwarte

Jak wyglądają zbiory otwarte G, spełniające

$$\mathbb{Q} \subset G \subset \mathbb{R}?$$

Mogą wyglądać różnie.

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (q_n - 1/5^n, q_n + 1/5^n).$$

$\mathbb{Q}$ jest malutki, a zbiory otwarte bywają bardzo dziwne.

Wzór na wymiar

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

Wzór na wymiar

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

Stąd

$$\begin{aligned}\dim(U+V+W) = {} & \dim U + \dim V + \dim W \\ & - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W) - \dim(V \cap W) \\ & + \dim(U \cap V \cap W)\end{aligned}$$

Wzór na wymiar

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

Stąd

$$\begin{aligned}\dim(U+V+W) = {} & \dim U + \dim V + \dim W \\ & - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W) - \dim(V \cap W) \\ & + \dim(U \cap V \cap W)\end{aligned}$$

Trzy proste w $\mathbb{R}^2$!

Chmury

Czy trzy chmury wystarczą do pokrycia płaszczyzny?

Chmury

Czy trzy chmury wystarczą do pokrycia płaszczyzny?

**Wystarczą wtedy i tylko wtedy,
gdy prawdziwa jest hipoteza continuum.**

Liczby kardynalne

$$|A| < |2^A|$$

Liczby kardynalne

$$|A| < |2^A|$$

$$|A| < |B| \quad \Longrightarrow \quad |2^A| < |2^B|$$

Liczby kardynalne

$$|A| < |2^A|$$

$$|A| < |B| \qquad \Longrightarrow \qquad |2^A| < |2^B|$$

Jest to zdanie niezależne od aksjomatyki ZFC.

Dziękuję za uwagę.