Fałszywe dowody hipotezy Poincarégo i co z nich wynikło

Anna Gierzkiewicz

Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

anna.gierzkiewicz@urk.edu.pl

LX SMP w Woli Duckiej
23–27 sierpnia 2019

Hipoteza Poincarégo

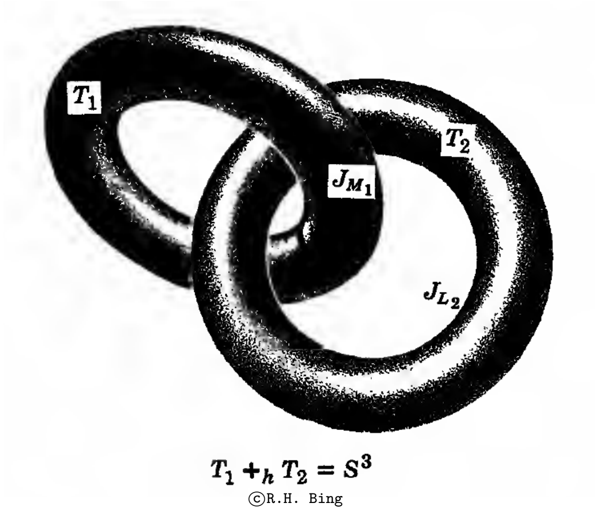
Zwarta, jednospójna rozmaitość 3-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą 3-wymiarową $\mathbb{S}^3$.

Hipoteza Poincarégo

Zwarta, jednospójna rozmaitość 3-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą 3-wymiarową $\mathbb{S}^3$.

Sfera $\mathbb{S}^3$

- $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$
- uzwarcenie: $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$
- sklejenie kul 2-wymiarowych brzegami: $\mathbb{B}^2 \cup_h \mathbb{B}^2$
- sklejenie pełnych torusów brzegami: $\mathbb{T}^2 \cup_h \mathbb{T}^2$



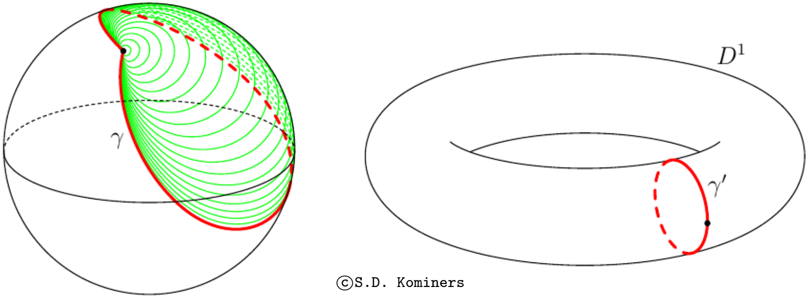
Rysunek: Sfera $\mathbb{S}^3$ jako sklejenie dwóch pełnych torusów.

Przestrzeń topologiczna X jest jednospójna jeśli

- X jest łukowo spójna,
- każda pętla zawarta w X jest homotopijna z punktem (jest ściągalna w X).

Przestrzeń topologiczna X jest jednospójna jeśli

- X jest łukowo spójna,
- każda pętla zawarta w X jest homotopijna z punktem (jest ściągalna w X).



Rysunek: Sfera $\mathbb{S}^2$ jest jednospójna, a torus $\mathbb{T}^2$ nie jest.

Długa historia dowodu hipotezy Poincarégo

- hipoteza postawiona w 1904
- wiele prób i niepełnych dowodów (Poincaré, Whitehead, Bing, Papakirioukopolos, Haken, Stallings…)
- uogólnienie na inne wymiary — „łatwiejsze”
- hipoteza geometryzacyjna Thurstone'a – uogólnienie
- ostateczny dowod hipotezy geometryzacyjnej: (Richard Hamilton+) Grisza Perelman 2002–3
- potwierdzenie prawdziwości dowodu — 2006.
- H-D. Cao, X-P. Zhu – „poprawiona” praca Perelmana

Clearest Proof of Poincaré Conjecture or Is Grisha Perelman Right?

Dmitri Martila (eestidima@gmail.com)
Independent Researcher
Lääne 9-51, Tartu 50605, Estonia

(Dated: October 6, 2015)

Abstract

There is Prize committee (claymath.org), which requires publication in worldwide reputable mathematics journal and at least two years of following scientific admiration. Why then the God-less Grisha Perelman has published only in a God-less forum (arXiv), publication was unclear as the crazy sketch; but mummy child "Grisha" have being forced to accept the Millennium Prize? Am I simply ugly or poor? Please respect my copyrights! ©.

PACS numbers: 01.10.Cr,02.40.Pc,02.40.Ma,04.20.Gz

Rysunek: Dowód Perelmana wzbudza różne emocje.

(Fałszywa) Pre-hipoteza Poincarégo

Zwarta rozmaitość 3-wymiarowa o homologiach sfery jest homeomorficzna ze sferą 3-wymiarową $\mathbb{S}^3$.

(Fałszywa) Pre-hipoteza Poincarégo

Zwarta rozmaitość 3-wymiarowa o homologiach sfery jest homeomorficzna ze sferą 3-wymiarową $\mathbb{S}^3$.

Grupy homologii $\mathbb{S}^3$ (nad $\mathbb{Z}$)

$$H_0(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{S}^3) = 0, \quad H_2(\mathbb{S}^3) = 0, \quad H_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z},$$
$$H_n(\mathbb{S}^3) = 0 \quad \text{dla } n \geqslant 4.$$

(Fałszywa) Pre-hipoteza Poincarégo

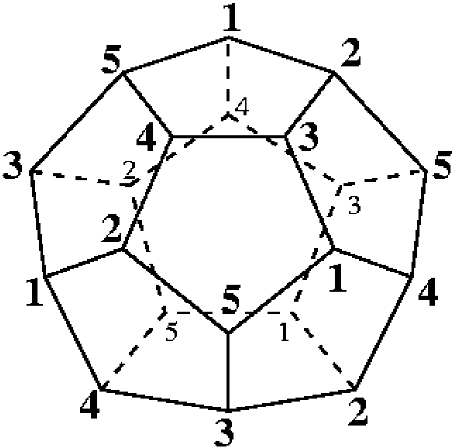
Zwarta rozmaitość 3-wymiarowa o homologiach sfery jest homeomorficzna ze sferą 3-wymiarową $\mathbb{S}^3$.

Grupy homologii $\mathbb{S}^3$ (nad $\mathbb{Z}$)

$$H_0(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{S}^3) = 0, \quad H_2(\mathbb{S}^3) = 0, \quad H_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z},$$
$$H_n(\mathbb{S}^3) = 0 \quad \text{dla } n \geqslant 4.$$

Grupy homologii sfer (nad $\mathbb{Z}$):

	H_0	H_1	H_2	H_3	...	H_n	...
$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	...	0	...
$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	...	0	...
$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	...	0	...
$\mathbb{S}^n$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	...	$\mathbb{Z}$	...



http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi/math/library/poincare_eng.html

Rysunek: Konstrukcja 3-sfery homologicznej Poincarégo – sklejamy naprzeciwległe ściany dwunastościanu (z małym obrotem)

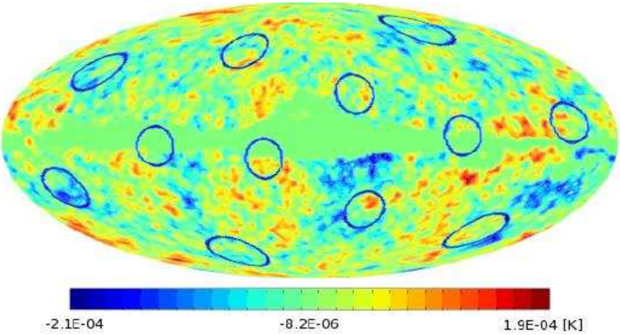


Fig 1. Visualization of the matched circles solution reported in Roukema et al. (2004) and reproduced in this paper to constrain its statistical significance, over-plotted on the first year ILC map masked with Kp2 sky mask.

B.S. Lew, B.F. Roukema, `https://arxiv.org/abs/0801.1358v2`

Rysunek: Czy wszechświat ma topologię sfery homologicznej Poincarégo?

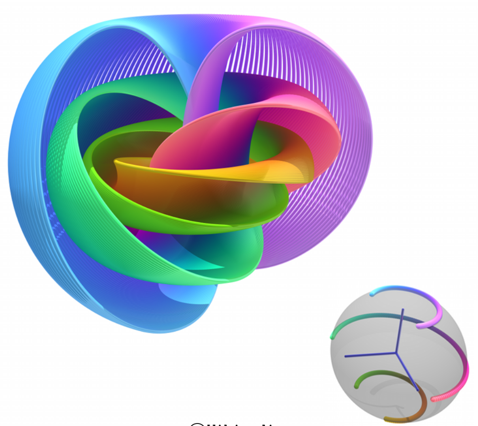
	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}
S^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2{}^2$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{120}\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^5$
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{72}\times\mathbb{Z}_2$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{120}$

©Wikipedia

Rysunek: Grupy homotopii sfer bywają nieintuicyjne

Dlaczego $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$?

Dlaczego $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$?



©Wikipedia

Rysunek: Wizualizacja odwzorowania Hopfa $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$

Idea dowodu Whiteheada

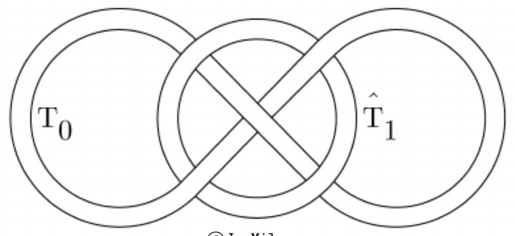
- usuwamy z rozmaitości jednospójnej M^3 punkt p
- pozostała część $M^3 \setminus \{p\}$ jest ściągalną rozmaitością otwartą
- jeśli $M^3 \setminus \{p\}$ to przestrzeń homeomorficzna z $\mathbb{R}^3$, to rozmaitość M^3 musi być uzwarceniem jednopunktowym $\mathbb{R}^3$, czyli $\mathbb{S}^3$.

Idea dowodu Whiteheada

- usuwamy z rozmaitości jednospójnej M^3 punkt p
- pozostała część $M^3 \setminus \{p\}$ jest ściągalną rozmaitością otwartą
- jeśli $M^3 \setminus \{p\}$ to przestrzeń homeomorficzna z $\mathbb{R}^3$, to rozmaitość M^3 musi być uzwarceniem jednopunktowym $\mathbb{R}^3$, czyli $\mathbb{S}^3$.

Twierdzenie Whiteheada (nieprawdziwe)

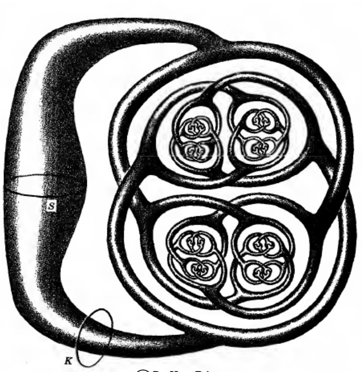
Każda ściągalna 3-wymiarowa rozmaitość otwarta jest homeomorficzna z przestrzenią Euklidesową $\mathbb{R}^3$.



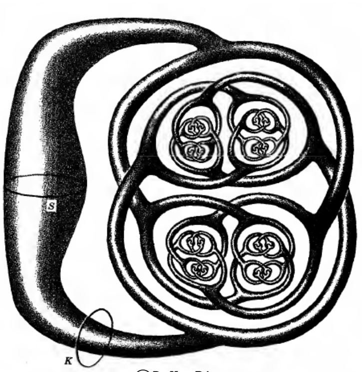
©J. Milnor

Kontrprzykład Whiteheada

- $\mathbb{T}_0$ i $\mathbb{T}'_1$ są pełnymi torusami w $\mathbb{R}^3$
- dopełnienie $\mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} \mathbb{T}'_1$ też jest pełnym torusem
- istnieje homeomorfizm $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ taki, że $h(\mathbb{T}_0) = \mathbb{T}_1$
- ciąg torusów $\mathbb{T}_0 \subset \mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}_2 \subset \mathbb{T}_3 \subset \dots$, gdzie $\mathbb{T}_{i+1} = h(\mathbb{T}_i)$
- $M^3 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_i$ jest ściągalną rozmaitością różną od $\mathbb{R}^3$.



©R.H. Bing



ⓒR.H. Bing

Słaba hipoteza Poincarégo [Bing 1958]

Zwarta, spójna 3-wymiarowa rozmaitość M jest homeomorficzna ze sferą $\mathbb{S}^3$, jeśli każda pętla w M jest zawarta w kuli zawartej w M.

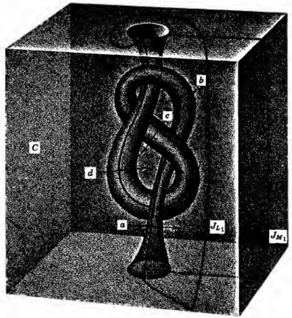


Figure 6

8. A candidate for a counterexample. Suppose J_{L_1} is selected in the $Bd\ C_1$ of Figure 6 so that J_{L_1} goes through the hole once and does not bound in $E^3 - \mathrm{Int}\ C_1$. Let T be a solid torus and $h: Bd\ C_1 \to Bd\ T$ be a homeomorphism that takes J_{L_1} onto a meridianal simple closed curve on $Bd\ T$. Is $C_1 +_h T$ a counterexample to the Poincaré conjecture? The fundamental group of C_1 can be found to be $G = \{a, b, c, d / cac^{-1}b^{-1} = bdc^{-1}d^{-1} = aca^{-1}d^{-1} = 1\}$. After T is sewn in, the fundamental group of the sum is $G' = \{cac^{-1}b^{-1} = bdc^{-1}d^{-1} = aca^{-1}d^{-1} = c^{-1}da^{-1}ba = 1\}$. Whether or not $C_1 +_h T$ is a homotopy sphere depends on whether or not G' is trivial.

Rysunek: Potencjalny kontrprzykład obalający hipotezę Poincarégo

(Uogólniona) hipoteza Poincarégo

Zwarta, jednospójna rozmaitość n-wymiarowa o homologiach sfery jest homeomorficzna ze sferą n-wymiarową $\mathbb{S}^n$.

(Uogólniona) hipoteza Poincarégo

Zwarta, jednospójna rozmaitość n-wymiarowa o homologiach sfery jest homeomorficzna ze sferą n-wymiarową $\mathbb{S}^n$.

Historia

- w 1960 Stephen Smale: $n \geqslant 7$ (dla PL)
- SS za chwilę: $n \geqslant 5$ (medal Fieldsa 1966)
- prawie w tym samym czasie John Stallings: $n \geqslant 7$ (wciąż PL)
- E. C. Zeeman usprawnil dowód Stallinga na $n = 5, 6$
- 1966 M.H.A. Newman: przypadek topologiczny $n \geqslant 5$
- 1982 Michael Freedman $n = 4$ (medal Fieldsa)