Czy można ufać komputerowo wspieranym dowodom?

Tomasz Kapela

Instytut Informatyki i Matematyki Komputerowej
Uniwersytet Jagielloński

Szkoła Matematyki Poglądowej
17 luty 2019

Analityczne Abstrakcyjne Twierdzenia

$+$

Ścisłe Oszacowania

$=$

Komputerowo Wspierane Dowody

Twierdzenia muszą mieć założenia np. w postaci inkluzji, nierówności.

Ścisłe oszacowania muszą brać pod uwagę wszelkie błędy obliczeń.

Analityczne Abstrakcyjne Twierdzenia

$+$

Ścisłe Oszacowania

$=$

Komputerowo Wspierane Dowody

Twierdzenia muszą mieć założenia np. w postaci inkluzji, nierówności.

Ścisłe oszacowania muszą brać pod uwagę wszelkie błędy obliczeń.

Analityczne Abstrakcyjne Twierdzenia

$$+$$

Ścisłe Oszacowania

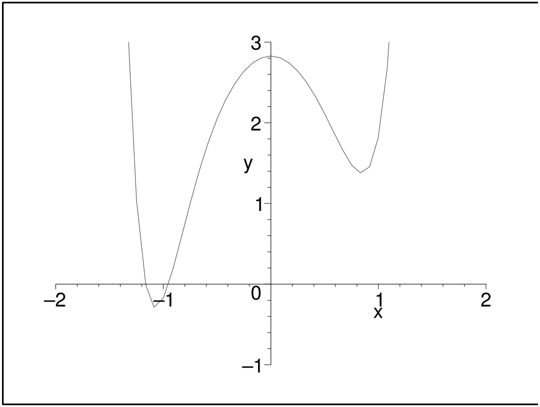
$$=$$

Komputerowo Wspierane Dowody

Twierdzenia muszą mieć założenia np. w postaci inkluzji, nierówności.

Ścisłe oszacowania muszą brać pod uwagę wszelkie błędy obliczeń.

Prosty przykład

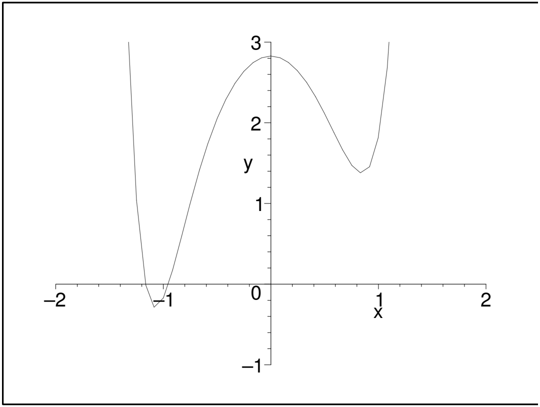


Czy istnieją rzeczywiste rozwiązania równania

$$F(x) = x^8 + x^5 - 3x^2 + \sqrt{8} = 0$$

$x_1 \approx -1.164443372$ $x_2 \approx -.9525383787$

Prosty przykład



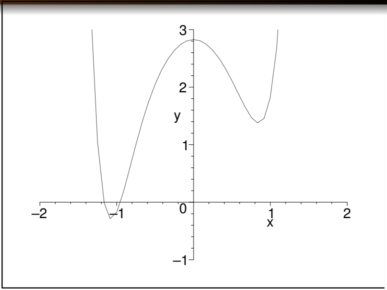
Czy istnieją rzeczywiste rozwiązania równania

$$F(x) = x^8 + x^5 - 3x^2 + \sqrt{8} = 0$$

$x_1 \approx -1.164443372$ $x_2 \approx -.9525383787$

Prosty przykład

$$F(x) = x^8 + x^5 - 3x^2 + \sqrt{8} = 0$$



Ścisłe oszacowania:
$F([-1]) \in [-1]^8 + [-1]^5 - 3 \cdot [-1]^2$
$+[2.82, 2.83] = [-0.18, -0.17] < 0$

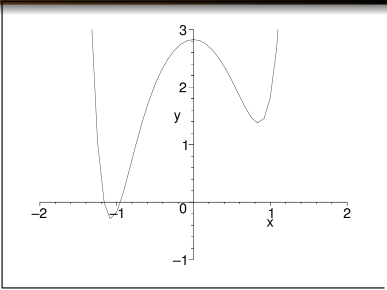
$$F([0]) \in [0]^8 + [0]^5 - 3 \cdot [0]^2 + [2.82, 2.83] = [2.82, 2.83] > 0.$$

Analityczne Twierdzenia:
Wielomiany są ciągłe.
Ciągłe funkcje mają własność Darbou.

Wniosek: $F(x^*) = 0$ dla pewnego $x^* \in (-1, 0)$.

Prosty przykład

$$F(x) = x^8 + x^5 - 3x^2 + \sqrt{8} = 0$$



Ścisłe oszacowania:
$F([-1]) \in [-1]^8 + [-1]^5 - 3 \cdot [-1]^2$
$+[2.82, 2.83] = [-0.18, -0.17] < 0$

$$F([0]) \in [0]^8 + [0]^5 - 3 \cdot [0]^2 + [2.82, 2.83] = [2.82, 2.83] > 0.$$

Analityczne Twierdzenia:
Wielomiany są ciągłe.
Ciągłe funkcje mają własność Darbou.

Wniosek: $F(x^*) = 0$ dla pewnego $x^* \in (-1, 0)$.

Problemy z obliczeniami zmiennoprzecinkowymi

Example

Policz na komputerze wartość funkcji

$$f(x,y) = 333.75y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + 5.5y^8 + x/(2y)$$

dla $x_0 = 77617$ i $y_0 = 33096$.

narzędzie	obliczona wartość
Open Office 3.0 Calc	1.1726039
C++ float (32 bity)	$-2.51654 \cdot 10^{29}$
C++ double (64 bity)	1.1726039
C++ __float128 (128 bitów)	1.1726039
Mathematica	$-1.18059 \cdot 10^{21}$
GNU MP (140 bitów)	-0.827396
Mathematica - wynik dokładny	$-54767/66192 \approx -0.827396$

Problemy z obliczeniami zmiennoprzecinkowymi

Example

Policz na komputerze wartość funkcji

$$f(x,y) = 333.75y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + 5.5y^8 + x/(2y)$$

dla $x_0 = 77617$ i $y_0 = 33096$.

narzędzie	obliczona wartość
Open Office 3.0 Calc	1.1726039
C++ float (32 bity)	$-2.51654 \cdot 10^{29}$
C++ double (64 bity)	1.1726039
C++ __float128 (128 bitów)	1.1726039
Mathematica	$-1.18059 \cdot 10^{21}$
GNU MP (140 bitów)	-0.827396
Mathematica - wynik dokładny	$-54767/66192 \approx -0.827396$

Przyczyna: Dwa składniki sumy

$$\begin{aligned} T_1 &= 333.75 y_0^6 + x_0^2(11 x_0^2 y_0^2 - y_0^6 - 121 y_0^4 - 2) \\ &= \mathbf{-7917111340668961361101134701524942850} \\ T_2 = 5.5 y_0^8 &= \mathbf{+7917111340668961361101134701524942848} \end{aligned}$$

są bardzo duże na moduł, a ich suma wynosi -2.

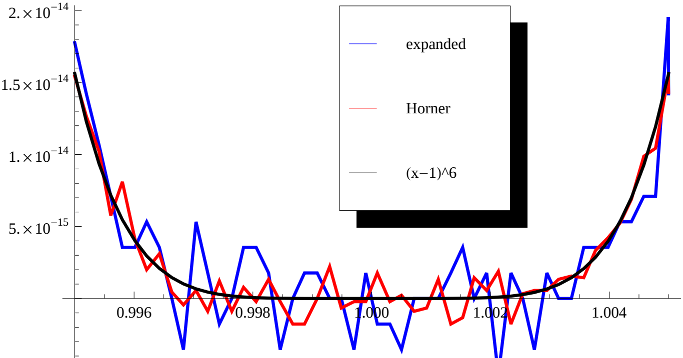
Przy obliczeniach np. z precyzją `double` mamy do dyspozycji co najwyżej 17 cyfr znaczących.

Example

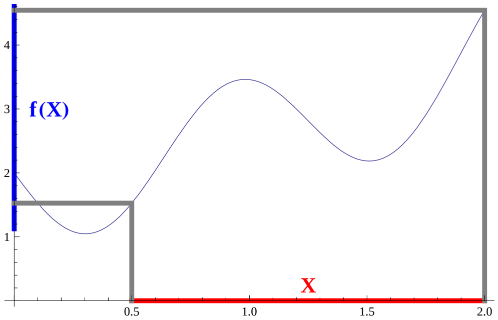
"Wykres" wielomianu

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^6 \\ &= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 \\ &= x(x(x(x(x(x-6)+15)-20)+15)-6)+1 \end{aligned}$$

przy użyciu różnych reprezentacji



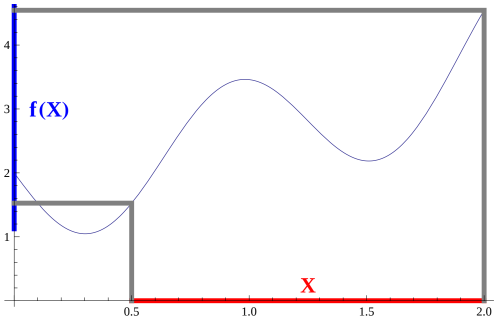
Cel: oszacować wartość funkcji na zbiorze argumentów



- pełna automatyzacja obliczeń komputerowych
- funkcje bywają skomplikowane:
  - wielu zmiennych
  - uwikłane
  - rozwiązania równań różniczkowych
  - parametryzacja rozmaitości niezmienniczych

Ścisła analiza numeryczna

Cel: oszacować wartość funkcji na zbiorze argumentów



- pełna automatyzacja obliczeń komputerowych
- funkcje bywają skomplikowane:
  - wielu zmiennych
  - uwikłane
  - rozwiązania równań różniczkowych
  - parametryzacja rozmaitości niezmienniczych

Ścisła analiza numeryczna - jak to zrobić?

Najprostsza idea:

- oszacować obraz przedziału przez funkcje elementarne
- propagować te oszacowania przez złożenia funkcji elementarnych
- jeśli funkcja nie jest złożeniem funkcji elementarnych, to użyć analitycznych oszacowań, w których wystąpią funkcje elementarne

Arytmetyka przedziałowa

Dla $\diamond \in \{+, -, *, /\}$ określamy

$$\left[\,\underline{a}, \overline{a}\,\right] \diamond \left[\,\underline{b}, \overline{b}\,\right] = \left[\,\underline{c}, \overline{c}\,\right]$$

gdzie

$$\begin{aligned} \underline{c} &= \min\{a \diamond b : a \in \left[\,\underline{a}, \overline{a}\,\right], b \in \left[\,\underline{b}, \overline{b}\,\right]\}, \\ \overline{c} &= \max\{a \diamond b : a \in \left[\,\underline{a}, \overline{a}\,\right], b \in \left[\,\underline{b}, \overline{b}\,\right]\} \end{aligned}$$

przy czym dla dzielenia zakładamy, że $0 \notin \left[\,\underline{b}, \overline{b}\,\right]$.

Można rozszerzyć na funkcje elementarne $\sqrt{}, \exp, \log, \ldots$ **korzystając z ich monotoniczności.**

Arytmetyka przedziałowa

Dla $\diamond \in \{+, -, *, /\}$ określamy

$$[\,\underline{a}, \overline{a}\,] \diamond \left[\,\underline{b}, \overline{b}\,\right] = [\,\underline{c}, \overline{c}\,]$$

gdzie

$$\begin{array}{rcl} \underline{c} & = & \min\{a \diamond b : a \in [\,\underline{a}, \overline{a}\,], b \in \left[\,\underline{b}, \overline{b}\,\right]\}, \\ \overline{c} & = & \max\{a \diamond b : a \in [\,\underline{a}, \overline{a}\,], b \in \left[\,\underline{b}, \overline{b}\,\right]\} \end{array}$$

przy czym dla dzielenia zakładamy, że $0 \notin \left[\,\underline{b}, \overline{b}\,\right]$.

Można rozszerzyć na funkcje elementarne $\sqrt{}, \exp, \log, \ldots$ **korzystając z ich monotoniczności.**

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Example

Obliczyć $f(x) = (x-1)^2 - 1 = x(x-2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0,1]$

$$
\begin{aligned}
([x]-1)^2 - 1 &= [0,1]^2 - 1 = [0,1] - 1 = [-1,0] \\
[x] * ([x]-2) &= [0,1] * ([0,1]-2) = [0,1] * [-2,-1] = [\mathbf{-2}, \mathbf{0}] \\
[x]^2 - 2[x] &= [0,1]^2 - 2[0,1] = [0,1] - [0,2] = [\mathbf{-2}, \mathbf{1}]
\end{aligned}
$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0,1]$ przez funkcję f.

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Example

Obliczyć $f(x) = (x-1)^2 - 1 = x(x-2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0,1]$

$$([x]-1)^2 - 1 \quad = \quad [0,1]^2 - 1 = [0,1] - 1 = \mathbf{[-1,0]}$$

$$[x] * ([x]-2) \quad = \quad [0,1] * ([0,1]-2) = [0,1] * [-2,-1] = \mathbf{[-2,0]}$$

$$[x]^2 - 2[x] \quad = \quad [0,1]^2 - 2[0,1] = [0,1] - [0,2] = \mathbf{[-2,1]}$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0,1]$ przez funkcję f.

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Example

Obliczyć $f(x) = (x-1)^2 - 1 = x(x-2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0,1]$

$$([x]-1)^2 - 1 \quad = \quad [0,1]^2 - 1 = [0,1] - 1 = \mathbf{[-1,0]}$$

$$[x] * ([x]-2) \quad = \quad [0,1] * ([0,1]-2) = [0,1] * [-2,-1] = \mathbf{[-2,0]}$$

$$[x]^2 - 2[x] \quad = \quad [0,1]^2 - 2[0,1] = [0,1] - [0,2] = \mathbf{[-2,1]}$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0,1]$ przez funkcję f.

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Example

Obliczyć $f(x) = (x-1)^2 - 1 = x(x-2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0,1]$

$$([x]-1)^2 - 1 = [0,1]^2 - 1 = [0,1] - 1 = \mathbf{[-1,0]}$$

$$[x] * ([x]-2) = [0,1] * ([0,1]-2) = [0,1] * [-2,-1] = \mathbf{[-2,0]}$$

$$[x]^2 - 2[x] = [0,1]^2 - 2[0,1] = [0,1] - [0,2] = \mathbf{[-2,1]}$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0,1]$ przez funkcję f.

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Example

Obliczyć $f(x) = (x-1)^2 - 1 = x(x-2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0,1]$

$$
\begin{aligned}
([x]-1)^2 - 1 &= [0,1]^2 - 1 = [0,1] - 1 = \mathbf{[-1,0]} \\
[x] * ([x]-2) &= [0,1] * ([0,1]-2) = [0,1] * [-2,-1] = \mathbf{[-2,0]} \\
[x]^2 - 2[x] &= [0,1]^2 - 2[0,1] = [0,1] - [0,2] = \mathbf{[-2,1]}
\end{aligned}
$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0,1]$ przez funkcję f.

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Arytmetyka przedziałów reprezentowalnych

Dla $\diamond \in \{+, -, *, /\}$ określamy

$$[\underline{a}, \overline{a}] \diamond \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = [\underline{c}, \overline{c}]$$

gdzie

$$\begin{aligned} \underline{c} &= \min\{\downarrow(a \diamond b) : a \in [\underline{a}, \overline{a}], b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\}, \\ \overline{c} &= \max\{\uparrow(a \diamond b) : a \in [\underline{a}, \overline{a}], b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\} \end{aligned}$$

przy czym dla dzielenia zakładamy, że $0 \notin \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$.

Można rozszerzyć na funkcje elementarne $\sqrt{}, \exp, \log, \ldots$ korzystając z ich monotoniczności.

Arytmetyka przedziałów reprezentowalnych

Dla $\diamond \in \{+, -, *, /\}$ określamy

$$[\underline{a}, \overline{a}] \diamond \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = [\underline{c}, \overline{c}]$$

gdzie

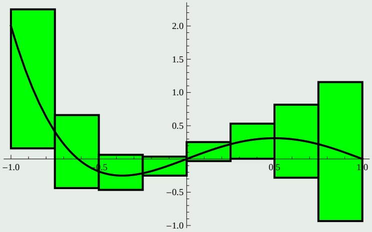
$$\begin{aligned} \underline{c} &= \min\{{\color{red}\downarrow}(a \diamond b) : a \in [\underline{a}, \overline{a}], b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\}, \\ \overline{c} &= \max\{{\color{red}\uparrow}(a \diamond b) : a \in [\underline{a}, \overline{a}], b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\} \end{aligned}$$

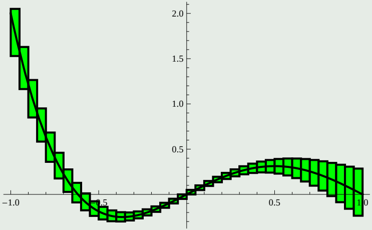
przy czym dla dzielenia zakładamy, że $0 \notin \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$.

Można rozszerzyć na funkcje elementarne $\sqrt{}, \exp, \log, \ldots$ **korzystając z ich monotoniczności.**

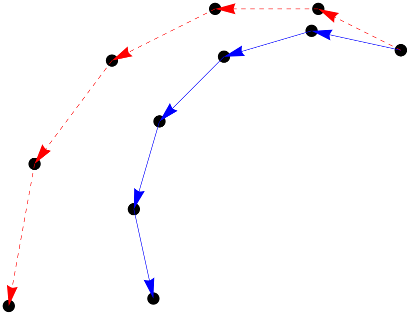
Example

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x$$





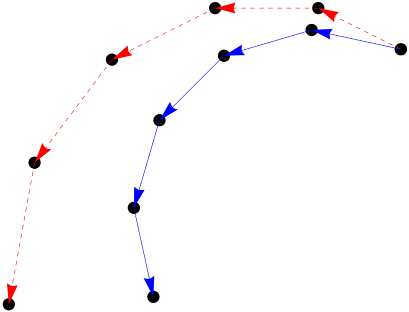
(Nie)ścisła analiza numeryczna.



dokładna trajektoria

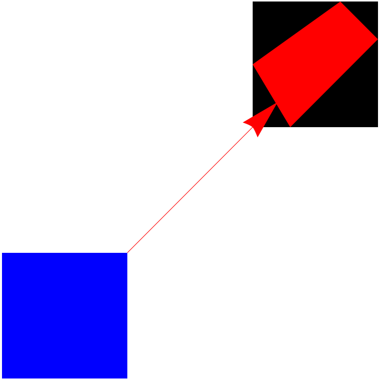
trajektoria z metody numerycznej

(Nie)ścisła analiza numeryczna.



dokładna trajektoria

trajektoria z metody numerycznej



zbiór warunków początkowych

dokładny obraz zbioru poprzez odwzorowanie (np. potok)

przykładowy wynik zwrócony przez ścisłą metodę

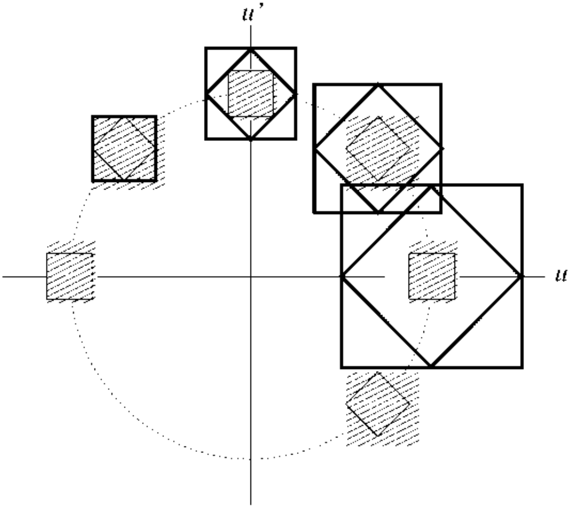
Źródła błędów

Metoda numeryczna

$\Phi(h, x)$ oznacza metodę numeryczną dla $x' = f(x)$,
np. metodę Taylora rzędu p

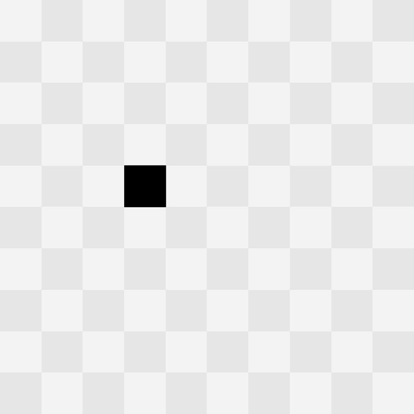
- **błędy zaokrągleń** - *arytmetyka przedziałowa*
- **błąd metody numerycznej** - *mamy jawny wzór na resztę.*
- **błąd pochodzący z dyskretyzacji przestrzeni i jego propagacji** *Lohner algorithm, set representations*

Efekt upakowania



Oscylator harmoniczny : $u' = y, \qquad y' = -u$

Konstrukcja odwzorowania kostkowego

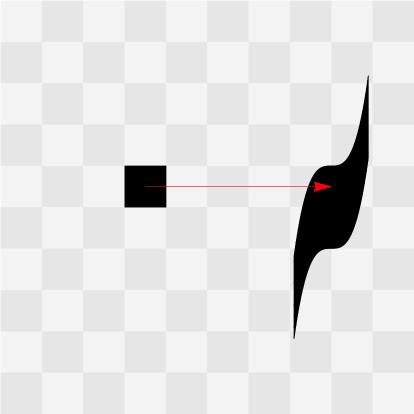


$$F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

$$f(X) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \in F(X) \text{ for all } X \in \mathcal{X}$$

Problem badania odwzorowania został sprowadzony do badania własności grafu skierowanego.

Konstrukcja odwzorowania kostkowego

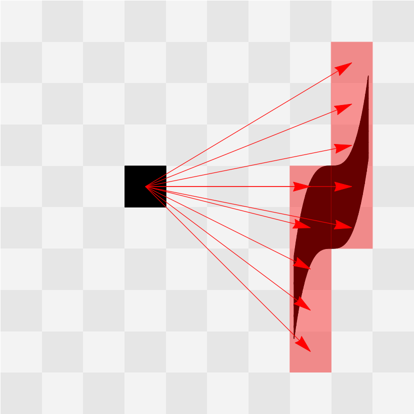


$$F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

$$f(X) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \in F(X) \text{ for all } X \in \mathcal{X}$$

Problem badania odwzorowania został sprowadzony do badania własności grafu skierowanego.

Konstrukcja odwzorowania kostkowego

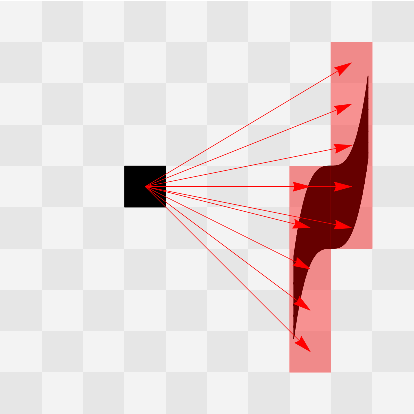


$$F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

$$f(X) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \in F(X) \text{ for all } X \in \mathcal{X}$$

Problem badania odwzorowania został sprowadzony do badania własności grafu skierowanego.

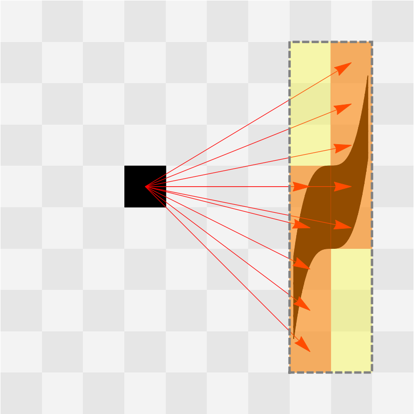
Konstrukcja odwzorowania kostkowego



$$F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

$$f(X) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \in F(X) \text{ for all } X \in \mathcal{X}$$

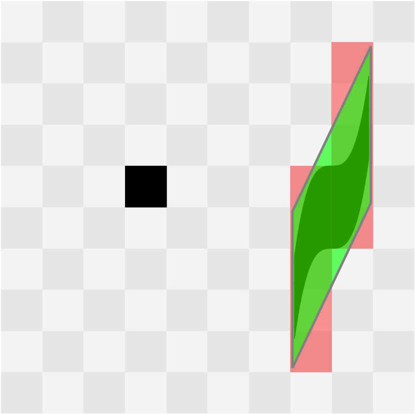
Konstrukcja odwzorowania kostkowego



$$F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

$$f(X) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \in F(X) \text{ for all } X \in \mathcal{X}$$

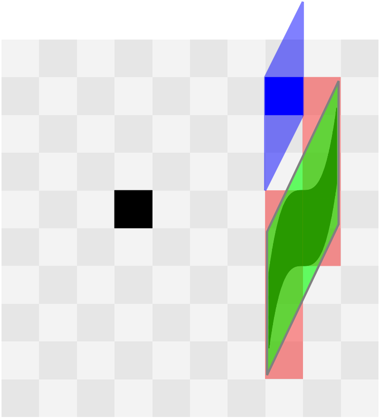
Konstrukcja odwzorowania kostkowego



$$F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

$$f(X) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \in F(X) \text{ for all } X \in \mathcal{X}$$

Konstrukcja odwzorowania kostkowego



$$F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$$

$$f(X) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \in F(X) \text{ for all } X \in \mathcal{X}$$

Redukcja efektu upakowania

Reprezentacja afiniczna

$$[x] = x + B[r],$$

where

- x - środek zbioru,
- $[r]$ - średnice zbioru,
- B - macierz 'dobrze dobranego' układu współrzędnych

Jak wybrać macierz B?

Redukcja efektu upakowania

Reprezentacja afiniczna

$$[x] = x + B[r],$$

where

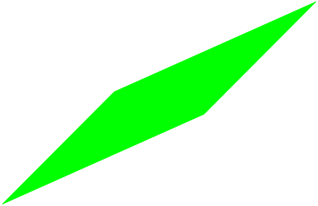
- x - środek zbioru,
- $[r]$ - średnice zbioru,
- B - macierz 'dobrze dobranego' układu współrzędnych

Jak wybrać macierz B?

Doubleton: Dużo lepsza reprezentacja

$$[x] = x + C[r_0] + B[r]$$

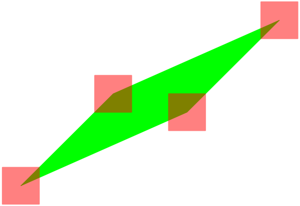
- C bliska macierzy jakobianowej,
- r_0 jest stałe i przechowuje początkowy rozmiar zbioru,
- B dobry układ współrzędnych dla błędów,
- r pojemnik na wszystkie błędy,



Doubleton: Dużo lepsza reprezentacja

$$[x] = x + C[r_0] + B[r]$$

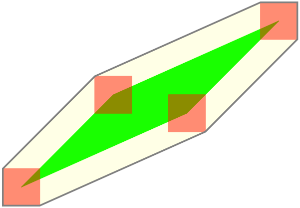
- C bliska macierzy jakobianowej,
- r_0 jest stałe i przechowuje początkowy rozmiar zbioru,
- B dobry układ współrzędnych dla błędów,
- r pojemnik na wszystkie błędy,



Doubleton: Dużo lepsza reprezentacja

$$[x] = x + C[r_0] + B[r]$$

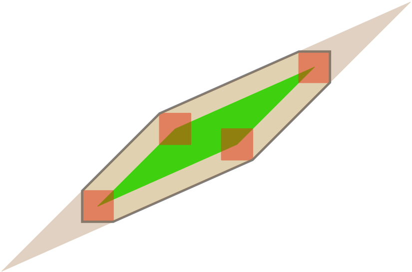
- C bliska macierzy jakobianowej,
- r_0 jest stałe i przechowuje początkowy rozmiar zbioru,
- B dobry układ współrzędnych dla błędów,
- r pojemnik na wszystkie błędy,



Doubleton: Dużo lepsza reprezentacja

$$[x] = x + C[r_0] + B[r]$$

- C bliska macierzy jakobianowej,
- r_0 jest stałe i przechowuje początkowy rozmiar zbioru,
- B dobry układ współrzędnych dla błędów,
- r pojemnik na wszystkie błędy,



Odwzorowanie Rösslera (Phys. Let. A, 1979)

$$\mathcal{R}\colon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3.8x(1-x) - 0.1y \\ 0.2(y-1.2)(1-1.9x) \end{bmatrix}$$

Lemma

Zbiór $W = [\,0.01\,,\ 0.99\,] \times [-0.33\,,\ 0.27\,]$ *jest dodatnio niezmienniczy względem* $\mathcal{R}$.

Dowód: Dla $(x\,,\ y) \in W$ mamy

$$3.8x(1-x) - 0.1y \leqslant 3.8 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 0.1 \cdot 0.33 = 0.983 < 0.99$$
$$3.8x(1-x) - 0.1y \geqslant 3.8 \cdot 0.99 \cdot 0.01 - 0.1 \cdot 0.27 = 0.01062 > 0.01$$

Podobnie

$$0.2(y-1.2)(1-1.9x) \leqslant 0.2(-1.53)(1-1.9\cdot 0.99) = 0.269586 < 0.27$$
$$0.2(y-1.2)(1-1.9x) \geqslant 0.2(-0.33-1.2)(1-1.9\cdot 0.01) = -0.300186$$

Odwzorowanie Rösslera (Phys. Let. A, 1979)

$$\mathcal{R}\colon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3.8x(1-x) - 0.1y \\ 0.2(y-1.2)(1-1.9x) \end{bmatrix}$$

Lemma

Zbiór $W = [\,0.01\,,\ 0.99\,] \times [-0.33\,,\ 0.27\,]$ *jest dodatnio niezmienniczy względem* $\mathcal{R}$.

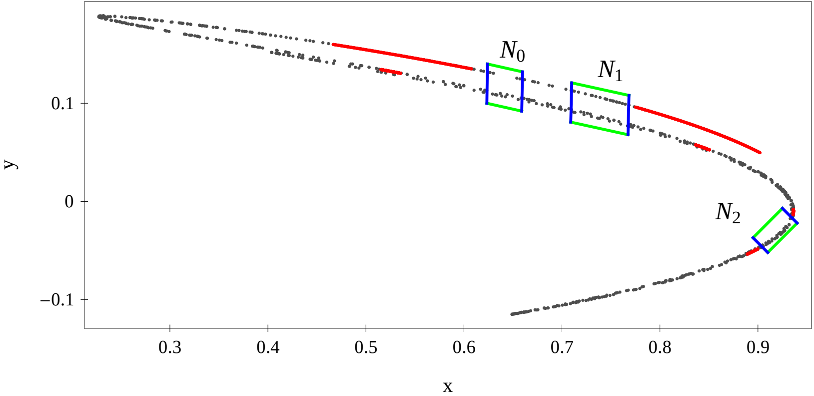
Dowód: Dla $(x\,,\ y) \in W$ mamy

$$3.8x(1-x) - 0.1y \leqslant 3.8 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 0.1 \cdot 0.33 = 0.983 < 0.99$$
$$3.8x(1-x) - 0.1y \geqslant 3.8 \cdot 0.99 \cdot 0.01 - 0.1 \cdot 0.27 = 0.01062 > 0.01$$

Podobnie

$$0.2(y-1.2)(1-1.9x) \leqslant 0.2(-1.53)(1-1.9 \cdot 0.99) = 0.269586 < 0.27$$
$$0.2(y-1.2)(1-1.9x) \geqslant 0.2(-0.33-1.2)(1-1.9 \cdot 0.01) = -0.300186$$

Atraktor w odwzorowaniu Rösslera



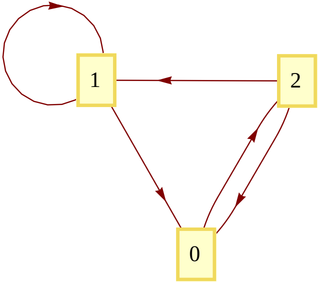
Obserwowany numerycznie atraktor

Otoczenia izolujące N_0, N_1, N_2

Pokaż aplet

Chaos w odwzorowaniu Rösslera

Oznaczmy przez Σ zbiór ścieżek $(i_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$ w grafie



Theorem

Dla $(i_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ *istnieje* $u \in N_{i_0}$ *takie, że*

$$\mathcal{R}^{3j}(u) \in N_{i_j}$$

Ponadto, jeśli $(i_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *jest okresowy to* u *może być wybrany jako punkt okresowy o tym samym okresie podstawowym.*

Idea:

- Zredukować problem do skończonej liczby nierówności
- zweryfikować nierówności używając arytmetyki przedziałowej

Potrzebne są "dobrze postawione" twierdzenia-narzędzia.

Komputerowo wspierany dowód

Idea:

- Zredukować problem do skończonej liczby nierówności
- zweryfikować nierówności używając arytmetyki przedziałowej

Potrzebne są "dobrze postawione" twierdzenia-narzędzia.

Miejsca zerowe funkcji

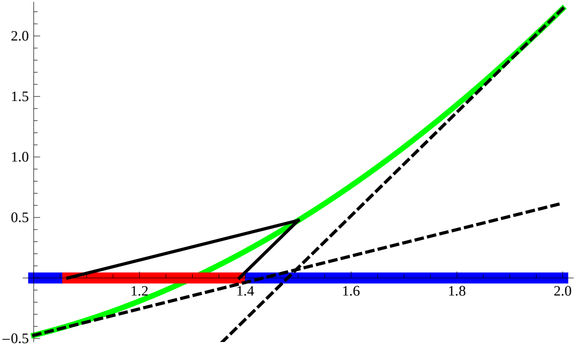
Theorem (przedziałowa metoda Newtona)

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *klasy* $\mathcal{C}^1$
- $X \subset \mathbb{R}^n$ - *zwarty, wypukły,* $x_0 \in X$

Określamy ***przedziałowy operator Newtona***

$$N(f, X, x_0) = x_0 - [Df(X)]_I^{-1} f(x_0)$$

- *jeśli* $N(f, X, x_0) \subset \mathrm{int} X$ *to* f *ma dokładnie jedno zero w* X. *Ponadto, jeśli* x_* *jest tym zerem, to* $x_* \in N(f, X, x_0)$
- *jeśli* $N(f, X, x_0) \cap X = \emptyset$ *to* f *nie ma zer w* X



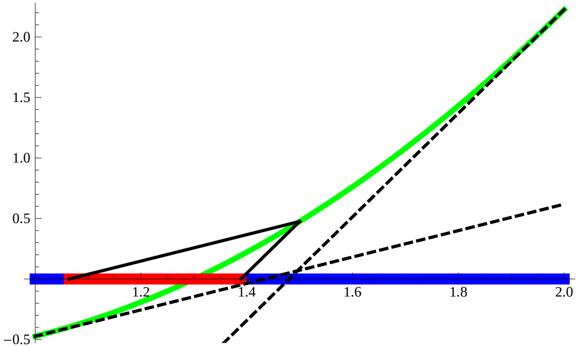
Example

$f(x) = x(x^2 + 2) + 1$

Przybliżone zero f to $x_* \approx -0.453398.....$

$$x_0 = -0.5 \qquad f(x_0) = -0.125$$
$$X = [-1, 0] \qquad Df(X) \subset [2, 5]$$

$$N(f, X, x_0) \subset [-0.475, -0.4375] \subset \mathrm{int} X = (-1, 0)$$

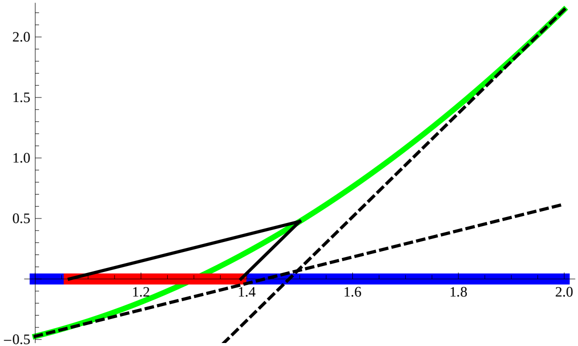


Example

$f(x) = x(x^2 + 2) + 1$
Przybliżone zero f to $x_* \approx -0.453398.....$

$$x_0 = -0.5 \qquad f(x_0) = -0.125$$
$$X = [-1, 0] \qquad Df(X) \subset [2, 5]$$

$$N(f, X, x_0) \subset [-0.475, -0.4375] \subset \mathrm{int} X = (-1, 0)$$



Example

$f(x) = x(x^2 + 2) + 1$

Przybliżone zero f to $x_* \approx -0.453398.....$

$$x_0 = -0.5 \qquad f(x_0) = -0.125$$

$$X = [-1, 0] \qquad Df(X) \subset [2, 5]$$

$$N(f, X, x_0) \subset [-0.475, -0.4375] \subset \mathrm{int} X = (-1, 0)$$

Przedziałowa metoda Krawczyka

Przedziałowy operator Newtona

$$N(f,X,x_0)=x_0-[Df(X)]_I^{-1}f(x_0)$$

C - dowolna nieosobliwa macierz punktowa

$$K(f,C,X,x_0)=x_0-Cf(x_0)+(\mathrm{Id}-C\cdot[Df(X)]_I)(X-x_0)$$

Theorem

- *Jeśli* $K(f,C,X,x_0)\subset\mathrm{int}X$ *to* f *ma dokładnie jedno zero* $x_*\in X$. *Ponadto* $x_*\in K(f,C,X,x)$.
- *Jeśli* $K(f,C,X,x_0)\cap X=\emptyset$ *to* f *nie ma zer w* X.

Na ogół przyjmuje się $C=Df^{-1}(x_0)$

Przedziałowa metoda Krawczyka

Przedziałowy operator Newtona

$$N(f, X, x_0) = x_0 - [Df(X)]_I^{-1} f(x_0)$$

C - dowolna nieosobliwa macierz punktowa

$$K(f, C, X, x_0) = x_0 - Cf(x_0) + (\mathrm{Id} - C \cdot [Df(X)]_I)(X - x_0)$$

Theorem

- *Jeśli $K(f, C, X, x_0) \subset \mathrm{int} X$ to f ma dokładnie jedno zero $x_* \in X$. Ponadto $x_* \in K(f, C, X, x)$.*
- *Jeśli $K(f, C, X, x_0) \cap X = \emptyset$ to f nie ma zer w X.*

Na ogół przyjmuje się $C = Df^{-1}(x_0)$

Przedziałowa metoda Krawczyka

Przedziałowy operator Newtona

$$N(f, X, x_0) = x_0 - [Df(X)]_I^{-1} f(x_0)$$

C - dowolna nieosobliwa macierz punktowa

$$K(f, C, X, x_0) = x_0 - Cf(x_0) + (\mathrm{Id} - C \cdot [Df(X)]_I)(X - x_0)$$

Theorem

- *Jeśli* $K(f, C, X, x_0) \subset \mathrm{int} X$ *to* f *ma dokładnie jedno zero* $x_* \in X$. *Ponadto* $x_* \in K(f, C, X, x)$.
- *Jeśli* $K(f, C, X, x_0) \cap X = \emptyset$ *to* f *nie ma zer w* X.

Na ogół przyjmuje się $C = Df^{-1}(x_0)$

Przedziałowa metoda Krawczyka

Przedziałowy operator Newtona

$$N(f, X, x_0) = x_0 - [Df(X)]_I^{-1} f(x_0)$$

C - dowolna nieosobliwa macierz punktowa

$$K(f, C, X, x_0) = x_0 - Cf(x_0) + (\mathrm{Id} - C \cdot [Df(X)]_I)(X - x_0)$$

Theorem

- *Jeśli* $K(f, C, X, x_0) \subset \mathrm{int} X$ *to* f *ma dokładnie jedno zero* $x_* \in X$. *Ponadto* $x_* \in K(f, C, X, x)$.
- *Jeśli* $K(f, C, X, x_0) \cap X = \emptyset$ *to* f *nie ma zer w* X.

Na ogół przyjmuje się $C = Df^{-1}(x_0)$

Układ Rösslera - (Rössler 1976)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y+z)\\ \dot{y} &= x + b * y\\ \dot{z} &= b + z*(x-a)\end{aligned} \qquad a = 5.7,\ b = 0.2$$

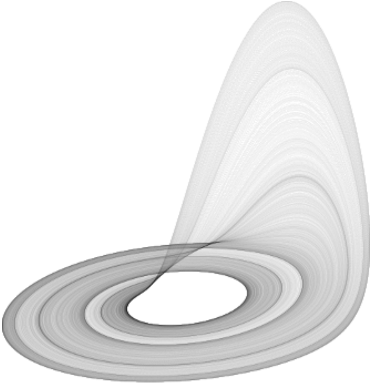
Rozwiązania okresowE

$\updownarrow$

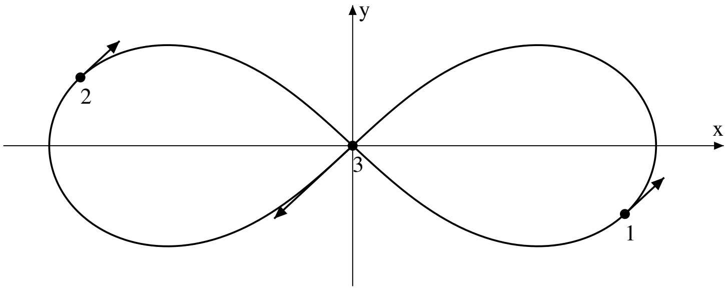
Punkty stałe odwzorowania Poincarégo P

$\updownarrow$

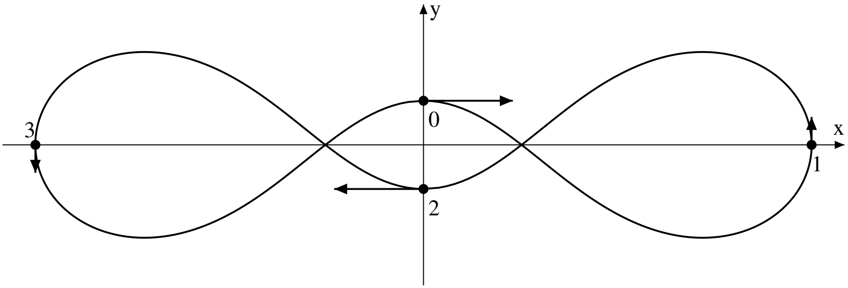
Zera $P - \mathrm{Id}$



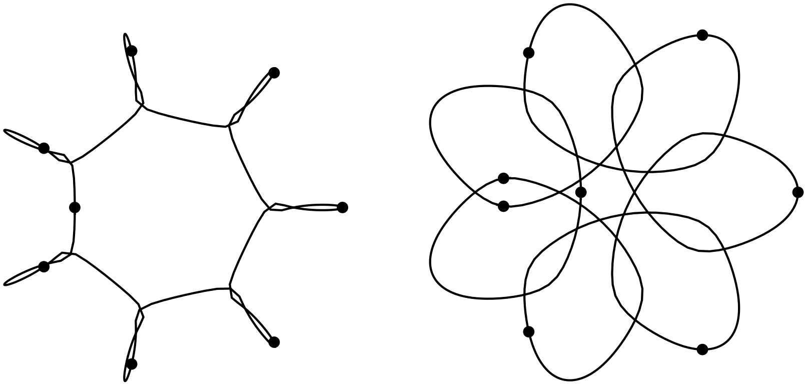
Prosta choreografia to rozwiązanie problemu N-ciał, w którym wszystkie ciała poruszają się po jednej krzywej z stałym przesunięciem fazowym.



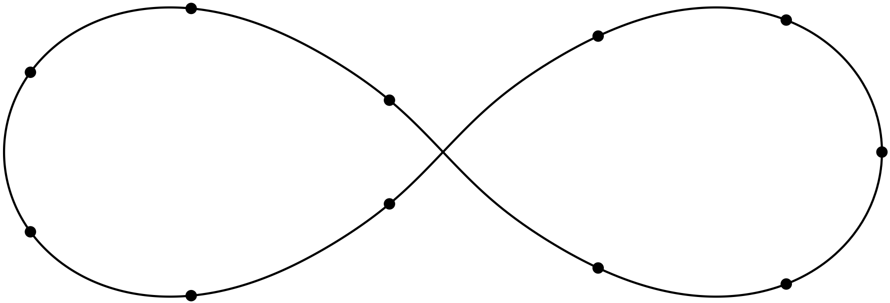
Ósemka - sławna orbita okresowa



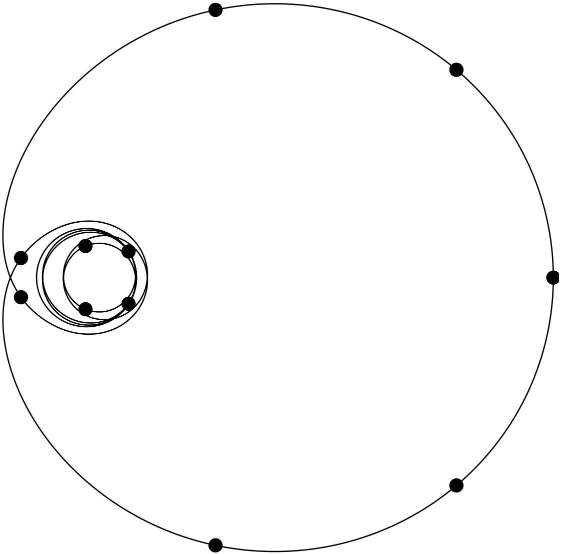
Orbita Gervera - Super Ósemka



Choreografie ośmiu ciał

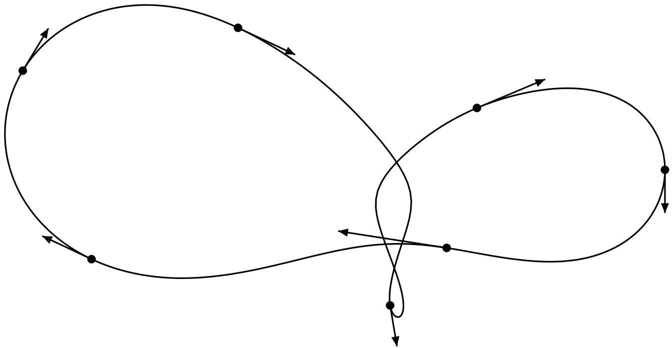


11 planet



11 bodies

Simó znalazł numerycznie choreografie niesymetryczne dla 6, 7 i więcej ciał.



7 bodies - no symmetry

Dziękuję za uwagę!