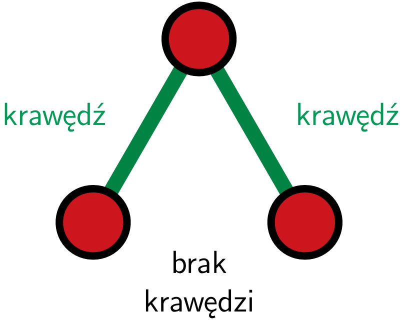
Flagi na torcie,
czyli komputer mnoży obrazki

Łukasz Bożyk

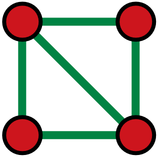
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Wola Ducka, 17 lutego 2019 r.

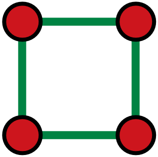
Co może być na torcie?



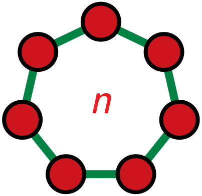
Szansa na 



$$\frac{1}{2}$$



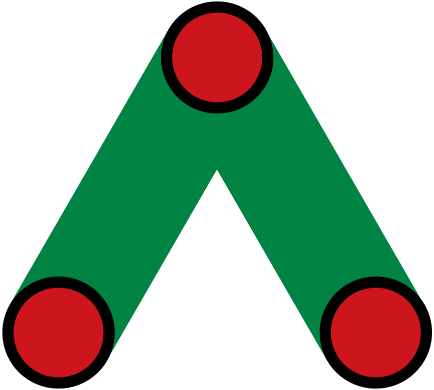
$$1$$



$$\frac{n}{\binom{n}{3}} = \frac{6}{(n-1)(n-2)}$$

Szansa na 

$$\frac{n^3+4n\binom{n}{2}}{\binom{3n}{3}}$$



$$\frac{2}{3}$$

Nieco bardziej formalnie

Gęstość grafu H w grafie G:

$$d(H,G) = \frac{\text{liczba indukowanych podgrafów } G \text{ izomorficznych z } H}{\binom{|G|}{|H|}}$$

Dla $n \geqslant |H|$ oznaczmy $\operatorname{ind}(H,n) = \max_{G\colon\ |G|=n} d(H,G)$.

Indukowalność grafu H:

$$\operatorname{ind}(H) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind}(H,n).$$

Istnieje dla każdego H i należy do $[0,1]$. Szukamy ind()!

Oszacowanie dolne ind(Λ)

$$\mathrm{ind}(\Lambda, 2n) \geqslant d(\Lambda, K_{n,n}) = \frac{2n\binom{n}{2}}{\binom{2n}{3}} = \frac{3n}{4n-2} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{ind}(\Lambda) \geqslant \frac{3}{4}$$

Oszacowanie górne ind()

Rozważmy dowolny graf G o n wierzchołkach.
\#  — liczba indukowanych  w G; itd.

\#  $\leqslant$ \#  $+$ \#  $= \frac{1}{2}\sum_{v}$ \# 

$$= \frac{1}{2}\sum_{v} \deg(v)(n-1-\deg(v))$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{v}\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{n(n-1)^2}{8}$$

$d($$, G) \leqslant \dfrac{\frac{n(n-1)^2}{8}}{\binom{n}{3}} = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{n-1}{n-2} \Longrightarrow \mathrm{ind}($$, n) \leqslant \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{n-1}{n-2} \Longrightarrow \mathrm{ind}($$) \leqslant \dfrac{3}{4}$

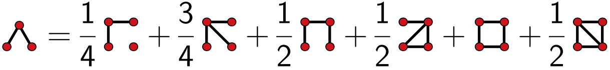
Algebry flagowe — dodawanie obrazków

Graf H utożsamiamy z $d(H,G)$, gdzie G — *„duży graniczny graf"*.

Zamiast *losować* $|H|$ wierzchołków, możemy wylosować $k \geqslant |H|$ i spojrzeć na gęstość H w wylosowanym k-wierzchołkowym podgrafie:

$$H = \sum_{G:\,|G|=k} d(H,G) \cdot G$$

Przykładowo:



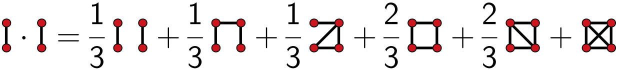
Algebry flagowe — mnożenie obrazków

Definiujemy iloczyn grafów H_1 i H_2:

$$H_1 \cdot H_2 = \sum_{H\colon |H| = |H_1| + |H_2|} P(H_1, H_2; H) \cdot H,$$

gdzie $P(H_1, H_2; H)$ oznacza prawdopodobieństwo, że dwa losowe rozłączne podzbiory wierzchołków H mocy $|H_1|$ i $|H_2|$ indukują odpowiednio H_1 i H_2.

Przykładowo:

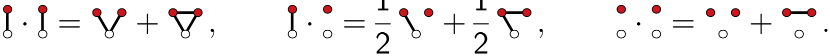


Razborov (2007) udowodnił, że to jest algebra.

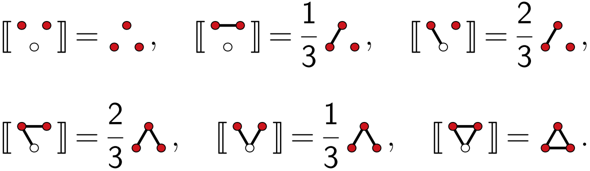
Algebry flagowe — wyróżnianie i uśrednianie

Analogicznie można zdefiniować algebrę na klasie kombinacji liniowych grafów *ukorzenionych*, tj. z wyróżnionym wierzchołkiem.

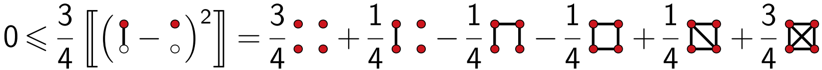
Przykładowo:

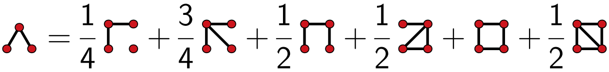


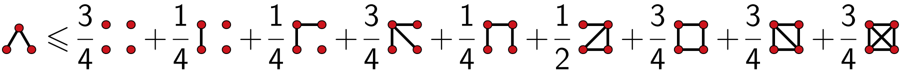
Definiujemy (liniowy) operator *uśredniania* $[\![\cdot]\!]$, który związuje te dwie algebry:

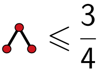


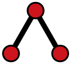
Kwadrat jest nieujemny. . .









$\mathrm{ind}($$) = \frac{3}{4}$

Dziękuję za uwagę!