

Algorytmiczne różniczkowanie

Daniel Wilczak

Uniwersytet Jagielloński

LIX Szkoła Matematyki Poglądowej
Matematyka i komputery

Example

Policz n -tą pochodną funkcji $f(x) = e^{x - e^{e^x - x^2}}$

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 1$

[wykonalne ćwiczenie]

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 2$

[przecież Mathematica to policzy]

- w punkcie $x_0 = -2$ dla $n = 30$

[hmm, a może wystarczy, że pochodna istnieje?:-)]

Example

Policz n -tą pochodną funkcji $f(x) = e^{x - e^{e^x - x^2}}$

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 1$

[wykonalne ćwiczenie]

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 2$

[przecież Mathematica to policzy]

- w punkcie $x_0 = -2$ dla $n = 30$

[hmm, a może wystarczy, że pochodna istnieje?:-)]

Example

Policz n -tą pochodną funkcji $f(x) = e^{x - e^{e^x - x^2}}$

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 1$

[wykonalne ćwiczenie]

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 2$

[przecież Mathematica to policzy]

- w punkcie $x_0 = -2$ dla $n = 30$

[hmm, a może wystarczy, że pochodna istnieje?;-)]

Example

Policz n -tą pochodną funkcji $f(x) = e^{x - e^{e^x - x^2}}$

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 1$

[wykonalne ćwiczenie]

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 2$

[przecież Mathematica to policzy]

- w punkcie $x_0 = -2$ dla $n = 30$

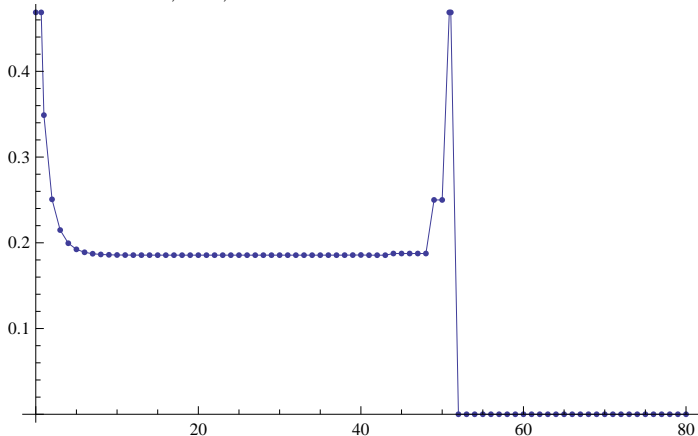
[hmm, a może wystarczy, że pochodna istnieje?:-)]

To może iloraz różnicowy:

Spróbujmy policzyć

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

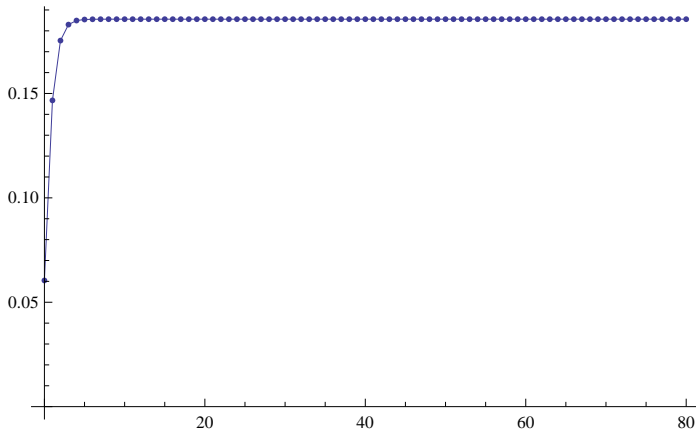
dla $h = k^{-i}$, $i = 0, \dots, 80$.



Efekt kasowania bitów przy odejmowaniu

Bądźmy sprytni - mamy liczby zespolone!

$$f'(x_0) \approx \Im \frac{f(x_0 + ih)}{h}$$



Funkcja musi mieć rozszerzenie zespolone!

Obserwacja

Aby wyznaczyć **dokładną** wartość pochodnej **w punkcie** **nie potrzebujemy wzoru** na pochodną.

Zamiast liczyć na symbolach, będziemy liczyć na parach (u, u') liczb (nie symboli).

$$(p, p') \pm (q, q') = (p \pm q, p' \pm q')$$

$$(p, p') * (q, q') = (p * q, p'q + q'p)$$

$$(p, p') / (q, q') = (p/q, p'/q - q'p/q^2)$$

Analogicznie

$$\sin(p, p') = (\sin(p), \cos(p) * p')$$

$$\cos(p, p') = (\cos(p), -\sin(p) * p')$$

$$\exp(p, p') = (\exp(p), \exp(p) * p')$$

Obserwacja

Aby wyznaczyć **dokładną** wartość pochodnej **w punkcie** **nie potrzebujemy wzoru** na pochodną.

Zamiast liczyć na symbolach, będziemy liczyć na parach (u, u') **liczb** (nie symboli).

$$(p, p') \pm (q, q') = (p \pm q, p' \pm q')$$

$$(p, p') * (q, q') = (p * q, p'q + q'p)$$

$$(p, p') / (q, q') = (p/q, p'/q - q'p/q^2)$$

Analogicznie

$$\sin(p, p') = (\sin(p), \cos(p) * p')$$

$$\cos(p, p') = (\cos(p), -\sin(p) * p')$$

$$\exp(p, p') = (\exp(p), \exp(p) * p')$$

Obserwacja

Aby wyznaczyć **dokładną** wartość pochodnej **w punkcie** **nie potrzebujemy wzoru** na pochodną.

Zamiast liczyć na symbolach, będziemy liczyć na parach (u, u') **liczb** (nie symboli).

$$(p, p') \pm (q, q') = (p \pm q, p' \pm q')$$

$$(p, p') * (q, q') = (p * q, p'q + q'p)$$

$$(p, p') / (q, q') = (p/q, p'/q - q'p/q^2)$$

Analogicznie

$$\sin(p, p') = (\sin(p), \cos(p) * p')$$

$$\cos(p, p') = (\cos(p), -\sin(p) * p')$$

$$\exp(p, p') = (\exp(p), \exp(p) * p')$$

Example

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

Example

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

Example

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

Example

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

Example

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Example

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

A co z pochodnymi wyższych rzędów?

Arytmetyka szeregów Taylora dla funkcji jednej zmiennej.

Oznaczenie: $f^{[k]}(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$ - k -ty współczynnik Taylora f w x

$$(f \pm g)^{[k]} = f^{[k]} \pm g^{[k]}$$

$$(f \cdot g)^{[k]} = \sum_{i=0}^k f^{[i]} \cdot g^{[k-i]}$$

$$(f/g)^{[k]} = \frac{1}{g^{[0]}} \left(f^{[k]} - \sum_{i=0}^{k-1} (f/g)^{[i]} \cdot g^{[k-i]} \right)$$

$$(\exp(f))^{[k]} = \begin{cases} \exp(f^{[0]}) & \text{dla } k = 0 \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i f^{[i]} \cdot (\exp(f))^{[k-i]} & \text{dla } k > 0 \end{cases}$$

A co z pochodnymi wyższych rzędów?

Arytmetyka szeregów Taylora dla funkcji jednej zmiennej.

Oznaczenie: $f^{[k]}(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$ - k -ty współczynnik Taylora f w x

$$(f \pm g)^{[k]} = f^{[k]} \pm g^{[k]}$$

$$(f \cdot g)^{[k]} = \sum_{i=0}^k f^{[i]} \cdot g^{[k-i]}$$

$$(f/g)^{[k]} = \frac{1}{g^{[0]}} \left(f^{[k]} - \sum_{i=0}^{k-1} (f/g)^{[i]} \cdot g^{[k-i]} \right)$$

$$(\exp(f))^{[k]} = \begin{cases} \exp(f^{[0]}) & \text{dla } k = 0 \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i f^{[i]} \cdot (\exp(f))^{[k-i]} & \text{dla } k > 0 \end{cases}$$

Wzór Taylora z resztą Lagrange'a

$$f(a+h) = \underbrace{\sum_{k=0}^r f^{[k]}(a)h^k}_{F(h)} + f^{[r+1]}(y)h^{r+1}$$

dla pewnego $y \in [a, a+h]$.

$$\left| \int_a^{a+h} f(x)dx - \int_0^h F(t)dt \right| \leq \max_{a \leq y \leq a+h} |f^{[r+1]}(y)| \frac{h^{r+2}}{r+2}$$

Wzór Taylora z resztą Lagrange'a

$$f(a+h) = \underbrace{\sum_{k=0}^r f^{[k]}(a)h^k}_{F(h)} + f^{[r+1]}(y)h^{r+1}$$

dla pewnego $y \in [a, a+h]$.

$$\left| \int_a^{a+h} f(x)dx - \int_0^h F(t)dt \right| \leq \max_{a \leq y \leq a+h} |f^{[r+1]}(y)| \frac{h^{r+2}}{r+2}$$

Całki oznaczone - praktyczny algorytm adaptacyjny.

Przyjmując

$$\max_{a \leq y \leq a+h} |f^{[r+1]}(\mathbf{y})| \approx |f^{[r+1]}(\mathbf{a})|$$

Stąd

$$\left| f^{[r+1]}(\mathbf{a}) \frac{h^{r+2}}{r+2} \right| < tol \quad \Rightarrow \quad h < \left| \frac{tol(r+2)}{f^{[r+1]}(\mathbf{a})} \right|^{1/(r+2)}$$

Całki oznaczone - praktyczny algorytm adaptacyjny.

Przyjmując

$$\max_{a \leq y \leq a+h} |f^{[r+1]}(\mathbf{y})| \approx |f^{[r+1]}(\mathbf{a})|$$

Stąd

$$\left| f^{[r+1]}(\mathbf{a}) \frac{h^{r+2}}{r+2} \right| < tol \quad \implies \quad h < \left| \frac{tol(r+2)}{f^{[r+1]}(\mathbf{a})} \right|^{1/(r+2)}$$

Propagacja dżetów:

$$(p \cdot q)^{[\kappa]} = \sum_{0 \leq i \leq \kappa} p^{[i]} q^{[\kappa-i]}$$

$$(\exp(p))^{[\kappa]} = \frac{1}{\kappa_i} \sum_{0 \leq \nu \leq \kappa - e_i} (\kappa_i - \nu_i) p^{[\kappa-\nu]} (\exp(p))^{[\nu]}$$

Równania różniczkowe

Rozważmy zagadnienie początkowe

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

Określamy $F = f \circ x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$x^{[n+1]}(0) = \frac{1}{n+1} F^{[n]}(0).$$

Example

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

i warunek początkowy $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Równania różniczkowe

Rozważmy zagadnienie początkowe

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

Określamy $F = f \circ x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$x^{[n+1]}(0) = \frac{1}{n+1} F^{[n]}(0).$$

Example

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

i warunek początkowy $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Równania różniczkowe

Rozważmy zagadnienie początkowe

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

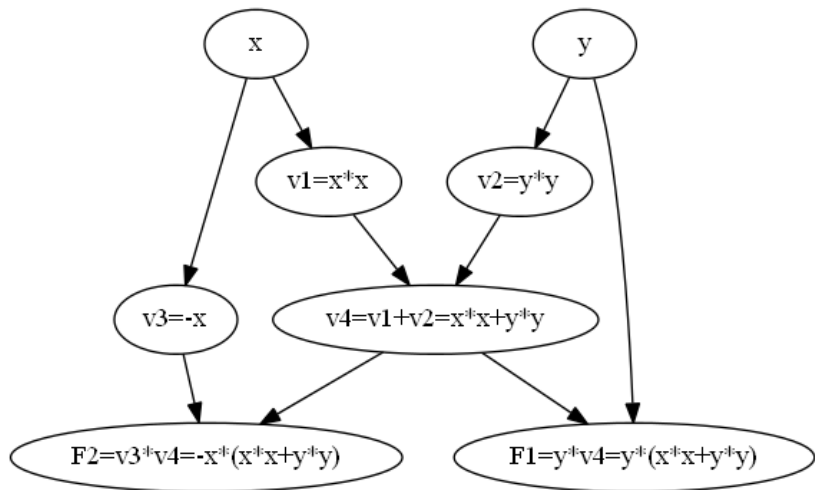
Określamy $F = f \circ x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$x^{[n+1]}(0) = \frac{1}{n+1} F^{[n]}(0).$$

Example

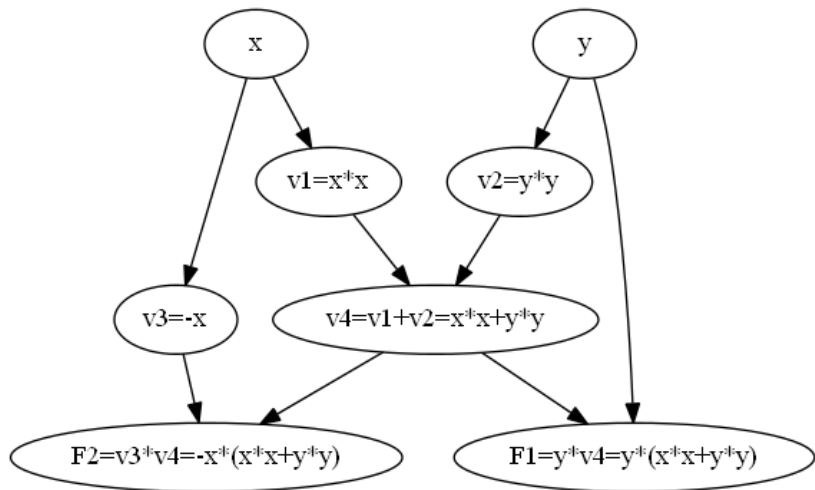
$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

i warunek początkowy $(x_0, y_0) = (1, -1)$.



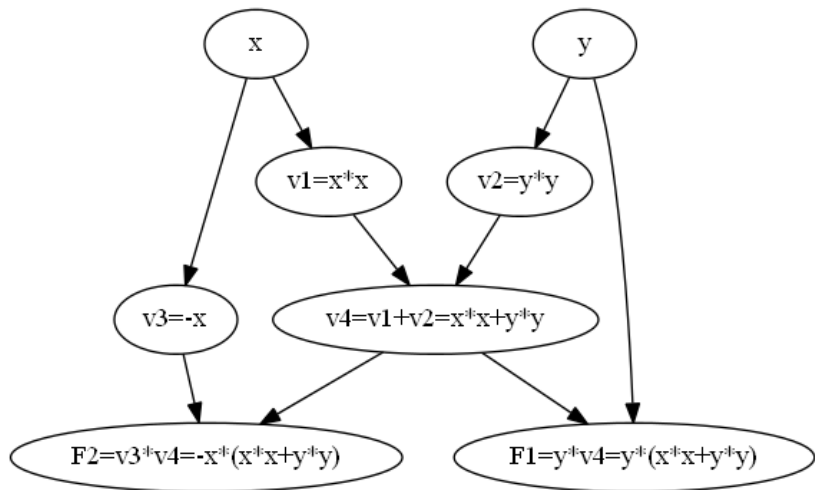
$$x^{[1]} = F_1^{[0]} = -2$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2							



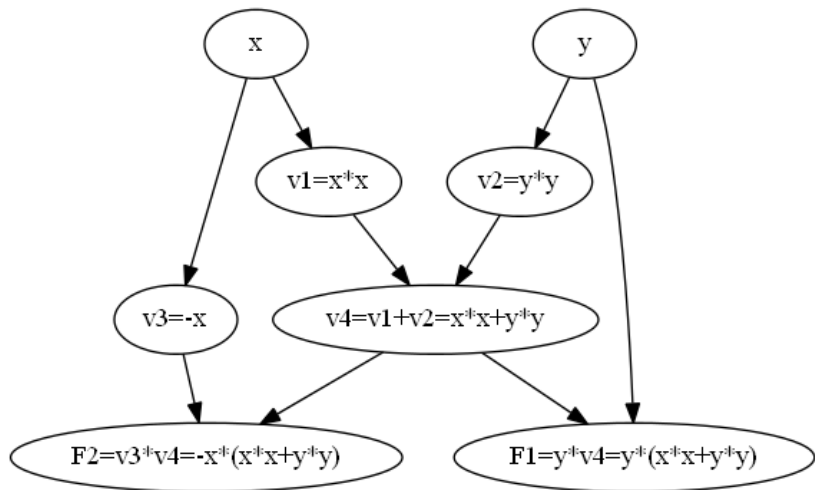
$$y^{[1]} = F_2^{[0]} = -2$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2						



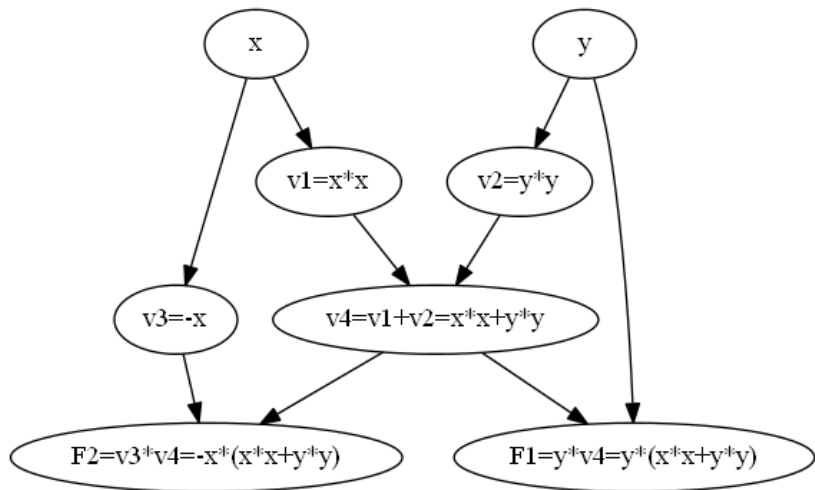
$$v_1^{[1]} = 2 * x^{[0]} * x^{[1]} = -4$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4					



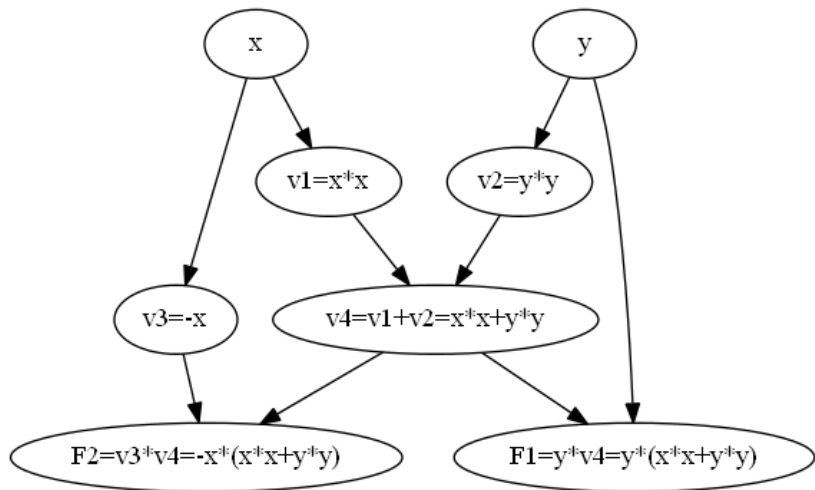
$$v_2^{[1]} = 2 * y^{[0]} * y^{[1]} = 4$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4				



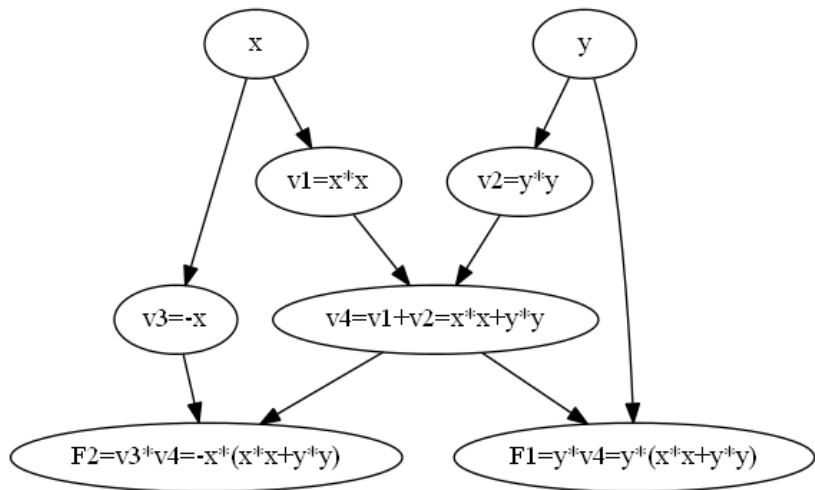
$$v_3^{[1]} = -x^{[1]} = 2$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2			



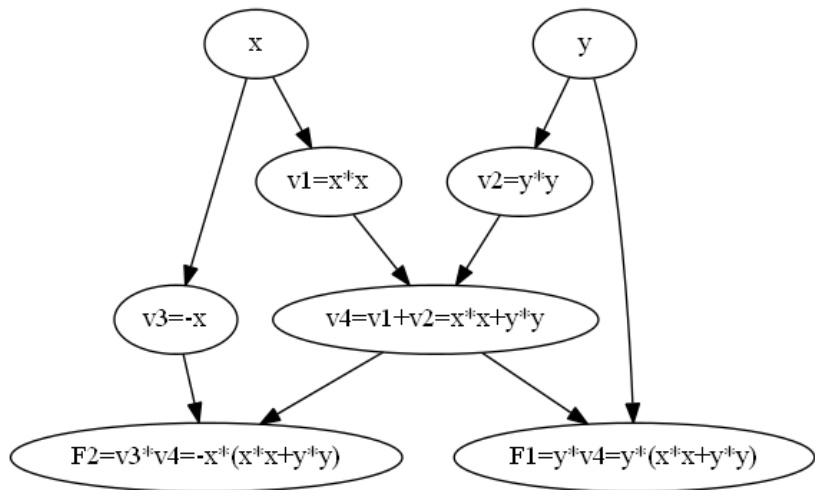
$$v_4^{[1]} = v_1^{[1]} + v_2^{[1]} = 0$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0		



$$F_1^{[1]} = y^{[0]} * v_4^{[1]} + y^{[1]} * v_4^{[0]} = -4$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	



$$F_2^{[1]} = v_3^{[0]} * v_4^{[1]} + v_3^{[1]} * v_4^{[0]} = 4$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4

Przykład - ciąg dalszy.

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4
2	-2	2						

$$x^{[2]} = \frac{1}{2} F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2} F_2^{[1]} = 2$$

Zatem otrzymaliśmy początek rozwinięcia Taylora dla rozwiązania

$$x(t) = 1 - 2t - 2t^2 + \dots$$

$$y(t) = -1 - 2t + 2t^2 + \dots$$

Wszystko bez liczenia pochodnych pola wektorowego.

Przykład - ciąg dalszy.

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4
2	-2	2						

$$x^{[2]} = \frac{1}{2}F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2}F_2^{[1]} = 2$$

Zatem otrzymaliśmy początek rozwinięcia Taylora dla rozwiązania

$$x(t) = 1 - 2t - 2t^2 + \dots$$

$$y(t) = -1 - 2t + 2t^2 + \dots$$

Wszystko bez liczenia pochodnych pola wektorowego.

Przykład - ciąg dalszy.

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4
2	-2	2						

$$x^{[2]} = \frac{1}{2} F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2} F_2^{[1]} = 2$$

Zatem otrzymaliśmy początek rozwinięcia Taylora dla rozwiązania

$$x(t) = 1 - 2t - 2t^2 + \dots$$

$$y(t) = -1 - 2t + 2t^2 + \dots$$

Wszystko bez liczenia pochodnych pola wektorowego.

Przykład - ciąg dalszy.

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4
2	-2	2						

$$x^{[2]} = \frac{1}{2} F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2} F_2^{[1]} = 2$$

Zatem otrzymaliśmy początek rozwinięcia Taylora dla rozwiązania

$$x(t) = 1 - 2t - 2t^2 + \dots$$

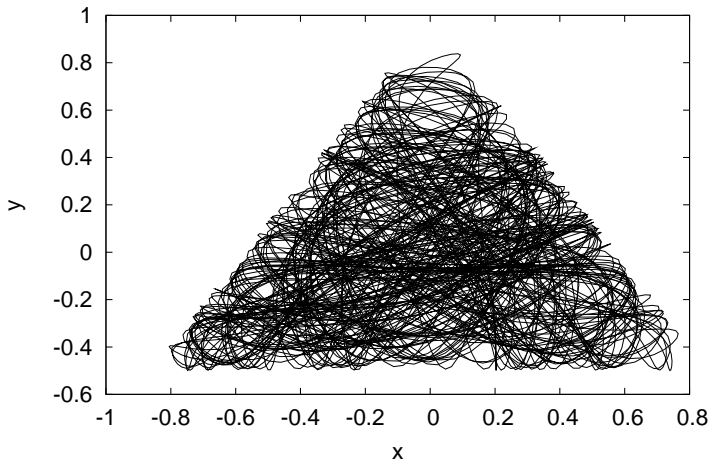
$$y(t) = -1 - 2t + 2t^2 + \dots$$

Wszystko bez liczenia pochodnych pola wektorowego.

Przykład: Hamiltonian Hénona-Heilesa.

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

Typowa chaotyczna trajektoria



Symplektyczne metody Eulera:

$$p_{n+1} = p_n + h \nabla_q H(p_{n+1}, q_n),$$

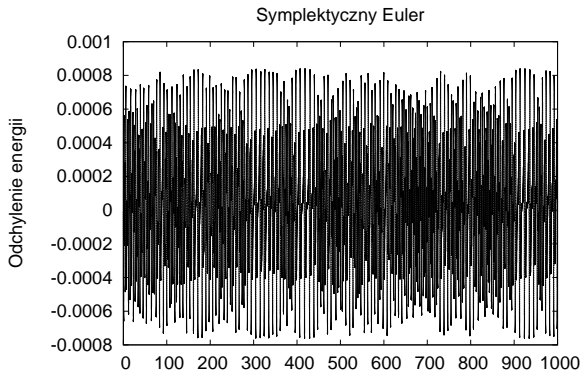
$$q_{n+1} = q_n - h \nabla_p H(p_{n+1}, q_n)$$

lub

$$p_{n+1} = p_n + h \nabla_q H(p_n, q_{n+1}),$$

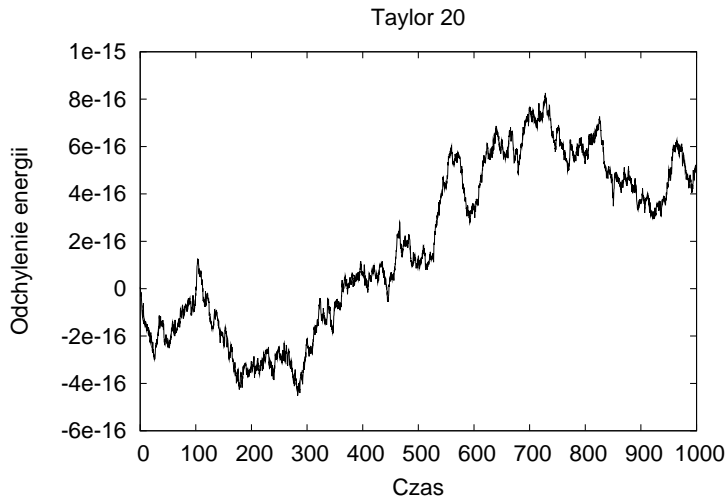
$$q_{n+1} = q_n - h \nabla_p H(p_n, q_{n+1}).$$

Stały krok $h = 1/128$.



Liczba kroków: 4810.

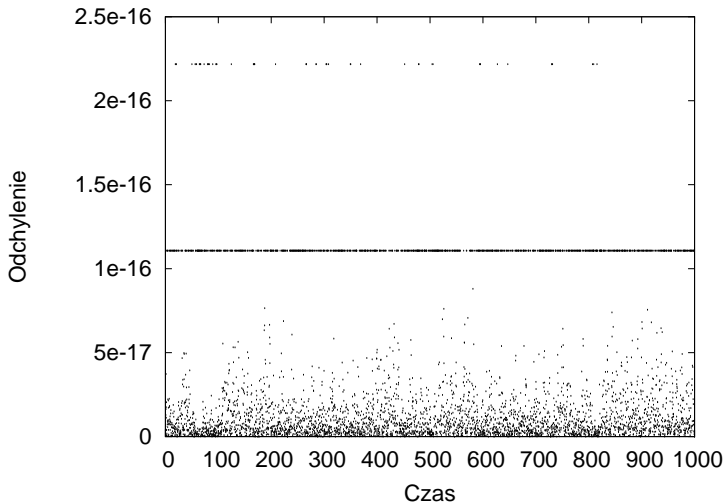
Najmniejszy wykonany krok czasowy: 0.183594.



Czy metoda jest symplektyczna?

W każdym kroku liczymy różniczkę $D = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ oraz $A = D^T J D - J$.

Na wykresie przedstawiono $\max_{i,j} |A_{ij}|$ w każdym wykonanym kroku.



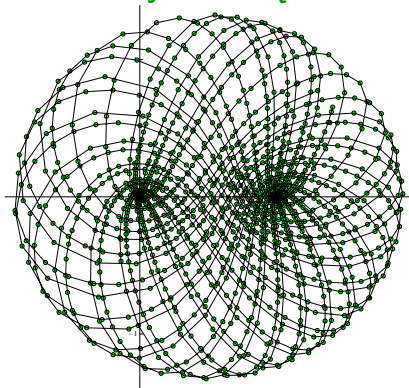
Przykład (Euler, 1760).

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{-Ax}{v^3} - \frac{B(x-a)}{u^3}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{-Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3}$$

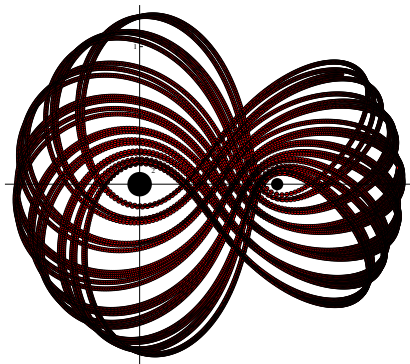
$$v = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad u = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Parametry: $A = 2$, $B = 1$

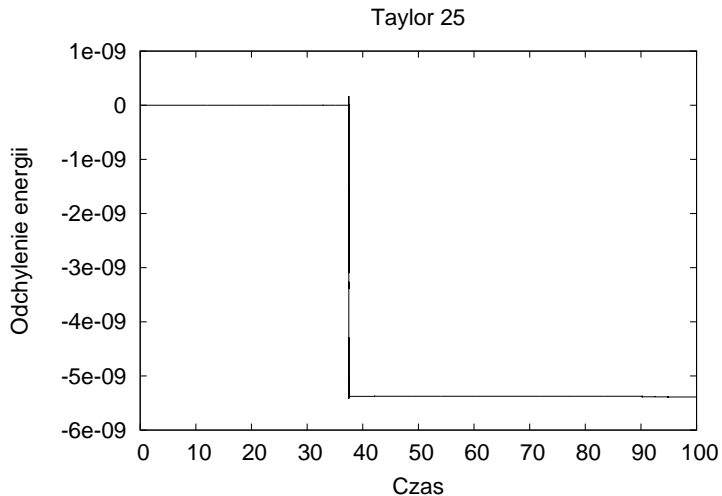
Taylor 30 rzędu



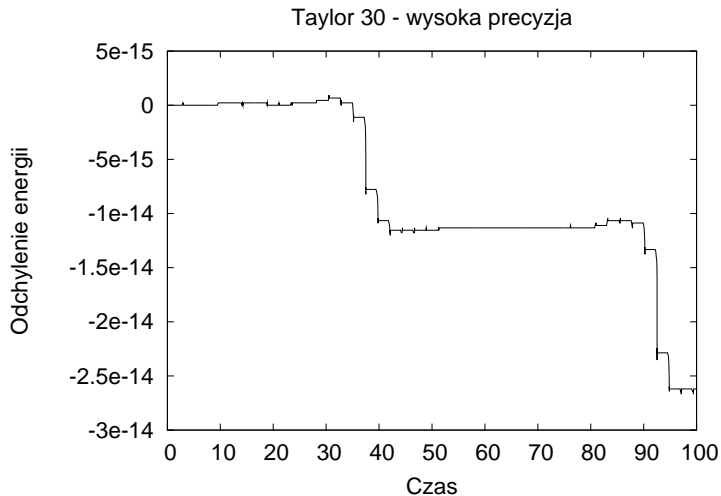
Symplektyczny Euler



Obliczenia w precyzji double - rząd 25.



Obliczenia wysokiej precyzji - 100 bitów mantysy, rząd 30.



Przypomnienie:

F - wielomian Taylora stopnia r dla f w punkcie a

$$f(a+h) - F(h) = f^{[r+1]}(y)h^{r+1}$$

dla pewnego $y \in [a, a+h]$.

Błąd całki oznaczonej można ściśle oszacować

$$\left| \int_a^{a+h} f(x) dx - \int_0^h F(t) dt \right| \in \left| f^{[r+1]}([a, a+h]) \right| \frac{h^{r+2}}{r+2}$$

Pokaż program

Przypomnienie:

F - wielomian Taylora stopnia r dla f w punkcie a

$$f(a+h) - F(h) = f^{[r+1]}(y)h^{r+1}$$

dla pewnego $y \in [a, a+h]$.

Błąd całki oznaczonej można ściśle oszacować

$$\left| \int_a^{a+h} f(x) dx - \int_0^h F(t) dt \right| \in \left| f^{[r+1]}([a, a+h]) \right| \frac{h^{r+2}}{r+2}$$

[Pokaż program](#)

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Theorem

$\dot{x} = f(x)$ - równanie różniczkowe, z prawą stroną gładką

$[X], [Y]$ - wektory przedziałowe

$h > 0$

Jeśli

$$[X] + [0, h]f([Y]) \subset \text{int}([Y])$$

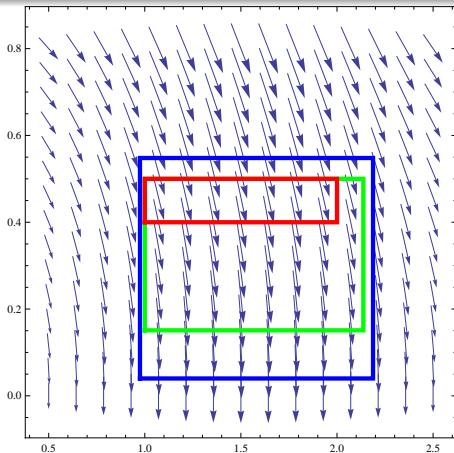
to

- dla $x \in [X]$ rozwiązanie jest określone na przedziale $[0, h]$
- dla $t \in [0, h], x \in [X]$ zachodzi $x(t) \in [Y]$

Ważna odpowiednia predykcja kroku czasowego i zbioru $[Y]$

Example

$$x'' = -\sin(x) + 0.1x', \quad h = 0.25$$



$$[X] = [1, 2] \times [0.4, 0.5]$$

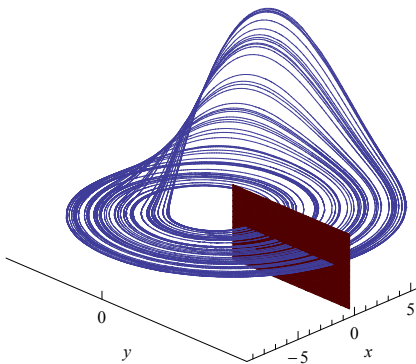
$$[Y] = [X] + h[-.2, 1.5] * f([X]) \subset [0.9749, 2.1875] \times [0.04, 0.548]$$

$$[Z] = [X] + [0, h] * f([Y]) \subset [1.0, 2.137] \times [0.1502, 0.5] \subset \text{int}([Y])$$

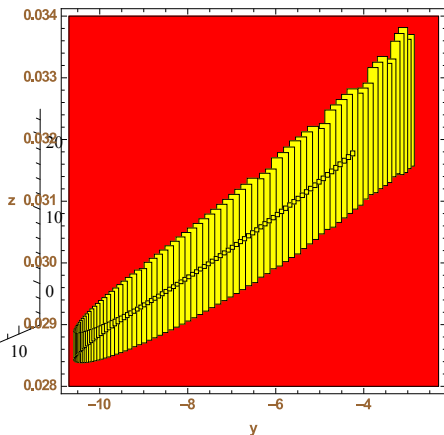
Example (Atraktor w układzie Rösslera)

$$x' = -(y + z), \quad y' = x + 0.2y, \quad z' = 0.2 + z(x - 5.7)$$

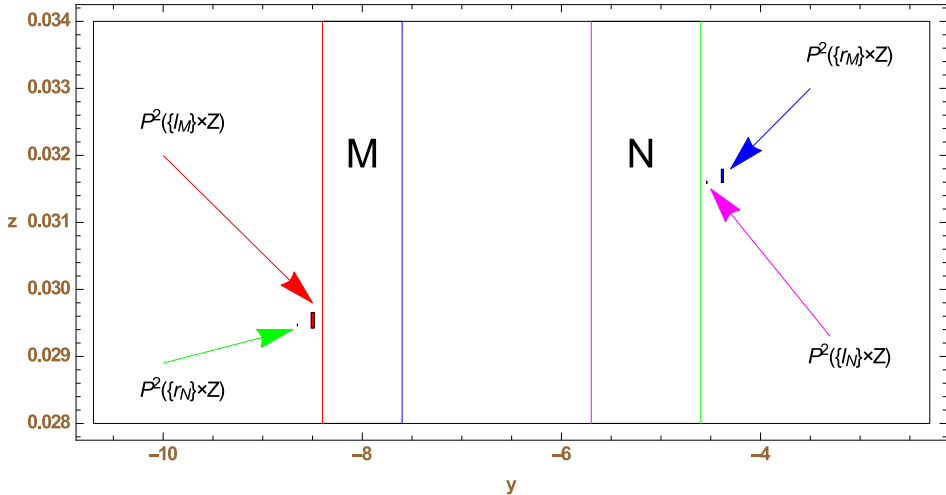
$$W = [-10.7, -2.3] \times [0.028, 0.034], \quad P(W) \subset W$$



Symulacja



Walidacja



Nierówności do sprawdzenia

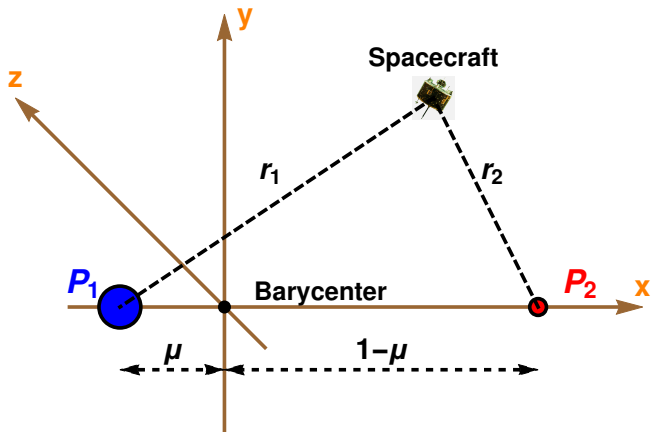
$$\pi_y P^2(l_M \times [0.028, 0.034]) < l_M$$

$$\pi_y P^2(r_M \times [0.028, 0.034]) > r_N$$

$$\pi_y P^2(l_N \times [0.028, 0.034]) > r_N$$

$$\pi_y P^2(r_N \times [0.028, 0.034]) < l_M$$

Kołowy Ograniczony Problem Trzech Ciał



$\mu \in (0, 1)$ – relatywna masa P_2

Równania ruchu

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial\Omega(x,y,z)}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial\Omega(x,y,z)}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial\Omega(x,y,z)}{\partial z}$$

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (1 - \mu)/r_1 + \mu/r_2,$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}.$$

Całka Jacobiego:

$$C(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2\Omega(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

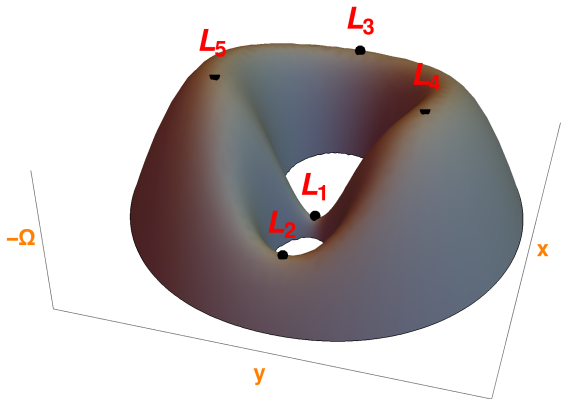
Układ planarny CR3BP: hiperpłaszczyzna

$$\{z = \dot{z} = 0\}$$

jest niezmiennicza.

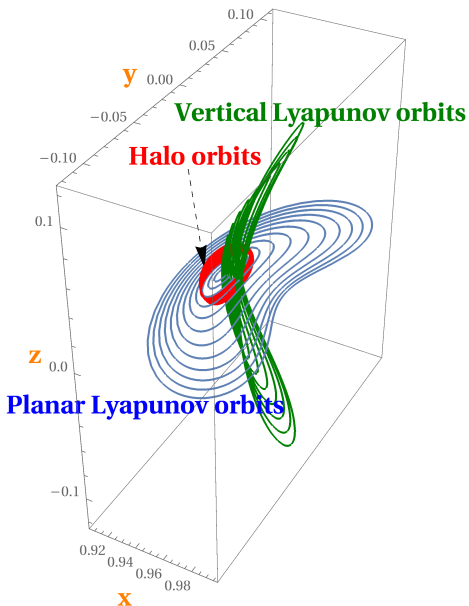
Punkty libracji

L_1, L_2, L_3 – współliniowe punkty równowagi typu
centrum \times **centrum** \times **siodło**



Orbity okresowe wokół $L_{1,2,3}$

- **Planar Lyapunov orbits:**
planarne, R -symetryczne
leżące na rozmaitości
centralnej L_1, L_2, L_3
- **Halo orbits:**
3D, R -symetryczne
bifurkujące z płaskich orbit
Lyapunova
- **Vertical Lyapunov
orbits:**
3D,
(R, S)-symetryczne leżące
na rozmaitości centralnej
 L_1, L_2, L_3



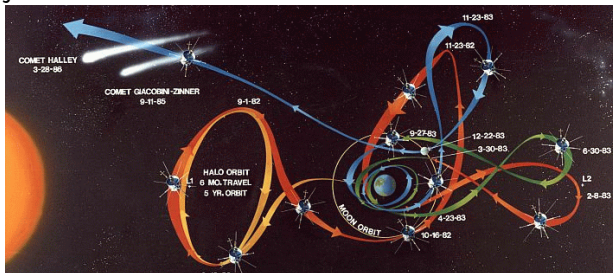
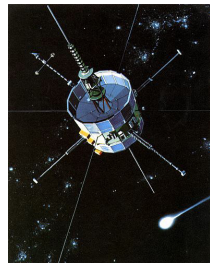
Historia odkrycia orbity Halo.

- punkty libracji znane od czasów Eulera,
- 1950 - Arthur C. Clarke - sugeruje, że punkt L_2 mógłby być idealnym położeniem dla przekaźnika radiowo-telewizyjnego z Ziemi do kolonii na Księżycu,
- 1966 - Robert Farquhar, odkrył orbitę wokół L_2 , na której przekaźnik zapewniałby stałą komunikację z Ziemi do przeciwnej (patrząc z Ziemi) strony Księżyca. Nazwał ją "**halo orbit**" - widziana z Ziemi ma kształt aureoli wokół Księżyca. W przestrzeni orbita ta wygląda jak brzeg tradycyjnego chipsa.
- koniec lat 60 i początek 70 - w NASA rusza program Apollo: intensywne badania teoretyczne nad możliwością umieszczenia satelity na Halo-orbitach dla Ziemi-Księżyca (Farquhar 1968-1972) i Ziemi-Słońca (Breakwell, Brown 1979-1984).

ISEE-3 - pierwsza misja z wykorzystaniem orbity Halo.

ISEE (1972) - wspólny projekt NASA i ESA

- udana misja ISEE-3 (1978) - sonda umieszczona w pobliżu orbity Halo wokół L_1 w układzie Ziemia-Słońce,
- badanie wiatru słonecznego,
- 1982 cała misja przemianowana na ICE (**International Cometary Explorer**),
- sonda wysłana w pobliże komety 21P/Giacobini-Zinner oraz komety Halleya,
- oficjalnie zakończona w 1997.



Symetria układu

Symetria odwrócenia w czasie:

$$R : (x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow (x(-t), -y(-t), z(-t))$$

Symetria odbicia:

$$S : (x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow (x(t), y(t), -z(t))$$

Sekcja Poincarégo:

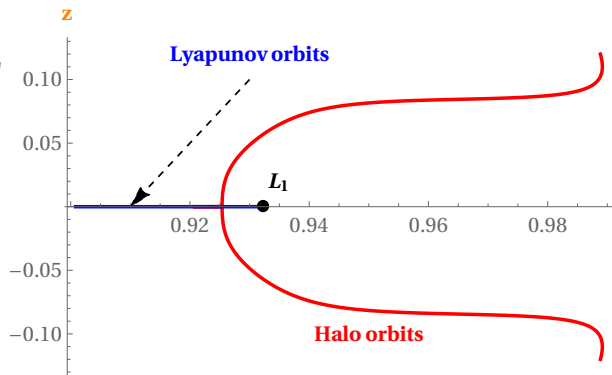
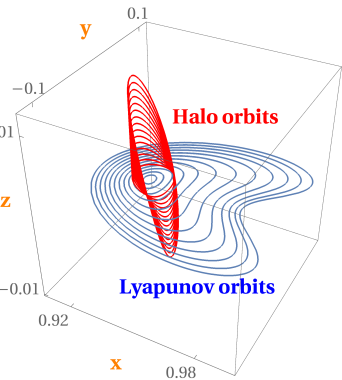
$$\Pi = \{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \in \mathbb{R}^6 : y = 0\}$$

Odwzorowanie Poincarégo:

$$P : \Pi \rightarrow \Pi$$

FAKT: P jest R -symetryczne

Orbita Halo na sekciji



Cel: kontynuacja i bifurkacje orbit Halo

Symetria układu

Symetria odwrócenia w czasie:

$$R : (x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow (x(-t), -y(-t), z(-t))$$

Symetria odbicia:

$$S : (x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow (x(t), y(t), -z(t))$$

Sekcja Poincarégo:

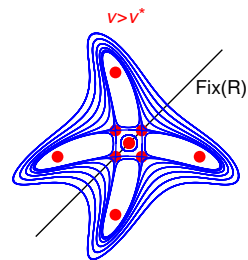
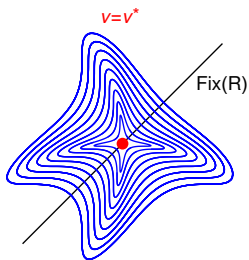
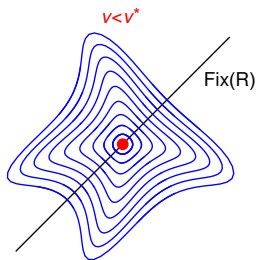
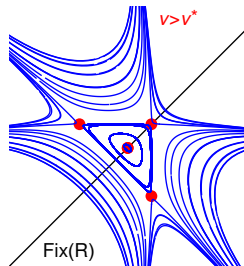
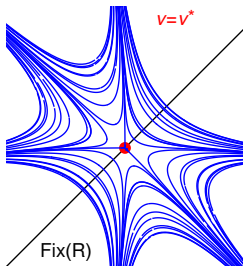
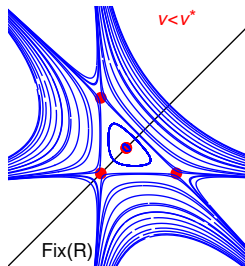
$$\Pi = \{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \in \mathbb{R}^6 : y = 0\}$$

Odwzorowanie Poincarégo:

$$P : \Pi \rightarrow \Pi$$

FAKT: P jest R -symetryczne

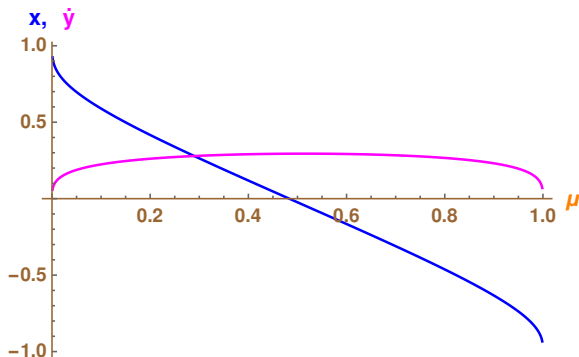
Zastosowania (Irmína Walawska)

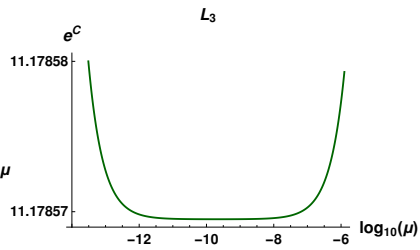
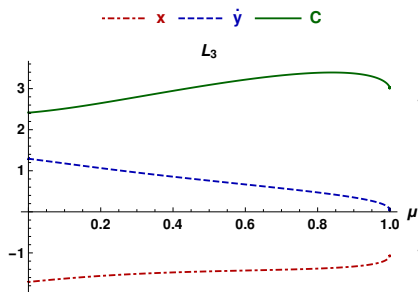
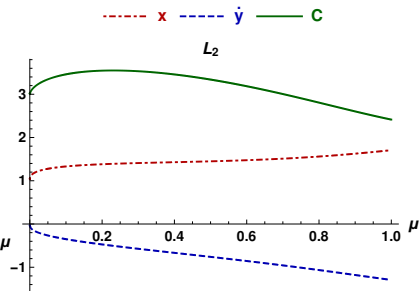
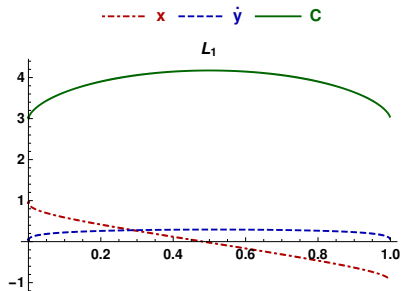


Theorem (Bifurkacje z orbit Lapunowa)

Dla parametrów $\mu \in [0.00095, 0.5]$ oraz dla $i = 1, 2, 3$ istnieje gładka gałąź orbit halo bifurkująca z rodziny orbit planarnych Lapunowa wokół L_i i sparametryzowana przez

$$h_\mu: [-1, 1] \cdot 10^{-7} \ni z \rightarrow (x(z), 0, z, 0, \dot{y}(z), 0) \in \Pi$$





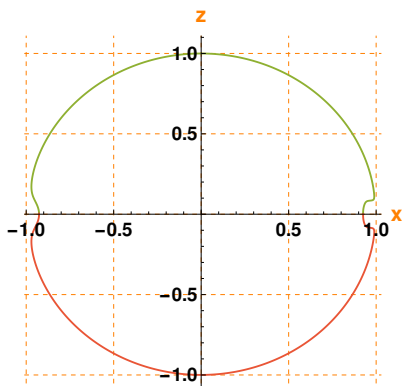
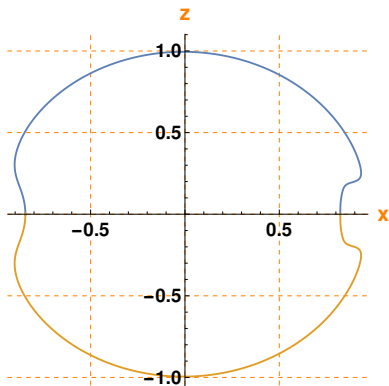
Kontynuacja rodziny L_1 -halo

Theorem

Dla układów Ziemia-Księżyc i Słońce-Jowisz rodzina orbit L_1 -halo tworzy 2D torus.

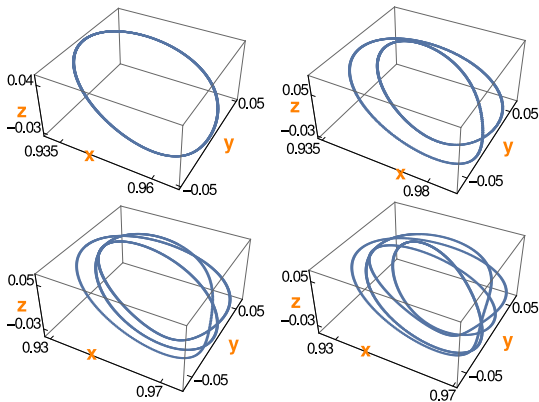
Przecięcie torusa z sekcją Poincarégo $y = 0$ jest dyfeomorficzne z okręgiem.

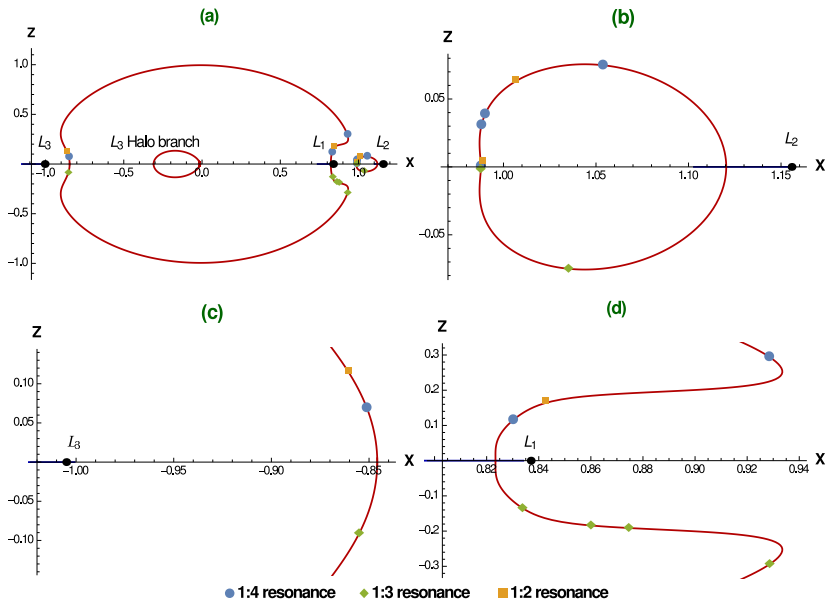
Każdy punkt na tym okręgu należy do innej orbity halo.



Theorem (Bifurkacje orbit $L_{1,2}$ – halo)

Dla układów Ziemia-Księżyc i Słońce-Jowisz rodziny orbit $L_{1,2}$ ulegają licznym bifurkacjom podwojenia, potrojenia i poczworzenia okresu (lista w artykule).





Narzędzia numeryczne:

- Ścisłe metody numeryczne dla równań wariacyjnych trzeciego rzędu

$$\phi(t, x), D_x \phi(t, x), D_x^2 \phi(t, x), D_x^3 \phi(t, x)$$

- obliczenia z wysoką precyzją (kilkaset bitów mantysy)
- konieczne użycie bardzo wysokich rzędów (skończyło się na 60)

Computer Assisted Proofs in Dynamics group

Main

Research interests

The CAPD group

Applications of the CAPD

Download the library

CAPD 4.0 Documentation

RedHom subproject

Related links

Contact:

Institute of Computer Science
Jagiellonian University
Lojasiewicza 6
30-348 Krakow, Poland



virtual:

wilczak@ii.uj.edu.pl

What is the CAPD library?

The CAPD library is a collection of flexible C++ modules which are mainly designed to computation of homology of sets and maps and nonrigorous and validated numerics for dynamical systems.

The list of modules is pretty long, but the most important are:

Basic modules:

- **krak** - a portable graphics kernel for very primitive drawing in the graphical window. Very easy to start with.
- **interval** - template written interval arithmetic, supports double, long double and multiprecision. It can be extended to any arithmetic type for which we can implement arithmetic operations and rounding.
- **vectalg** and **matrixAlgorithms** - a flexible template implementation of basic operations and algorithms for **dense** vectors and matrices (with integer, floating points and various interval coefficients).

Modules for dynamical systems:

- **map** - computation of values and derivatives of maps. It is also the core for the solvers in *dynsys* module.
- **dynsys** - various nonrigorous and rigorous solvers to ODEs, for computations of the solutions and partial derivatives wrt initial conditions up to arbitrary order.
- **geomset**, **dynset** - various representations of sets and Lohner-type algorithms.
- **poincare** - computation of Poincare maps and their derivatives; both rigorous and nonrigorous.
- **diffincl** - rigorous computations of the solutions to differential inclusions.

Modules for computation of homology:

- Currently developed and recommended homological software is based on various reduction algorithms. The [RedHom](#) homology project is the official **subproject** of the CAPD library.

<http://capd.ii.uj.edu.pl>

Computer **A**ssisted **P**roofs in **D**ynamics