

# Kosmiczny chaos wspierany komputerowo

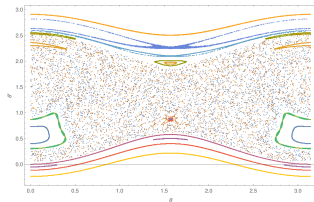
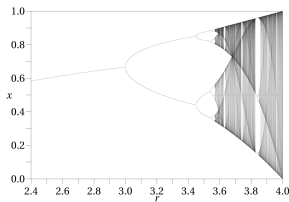
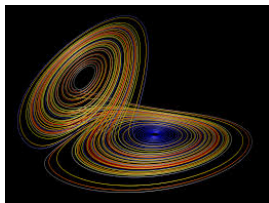
Anna Gierzkiewicz

Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

`anna.gierzkiewicz@urk.edu.pl`

LIX SMP w Woli Duckiej  
15 – 18 lutego 2019

Myślisz – chaos, widzisz – ?



$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon) \right)$$

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta Z_0 \rightarrow 0} \ln \frac{|\delta Z(t)|}{|\delta Z_0|}$$

► Youtube (Lord8Vader) – atraktor układu Lorenza (1963)

## Chaos Devaneya (1989)

Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną, to  $f : X \rightarrow X$  jest odwzorowaniem *chaotycznym* na  $X$ , jeśli

D1.  $f$  jest tranzytywne  $(\forall U, V - \text{otw. } \exists k \in \mathbb{Z} : f^k(U) \cap V \neq \emptyset)$ ;

(D1\* istnieje orbita gęsta;)

D2. punkty okresowe stanowią gęsty podzbiór  $X$ ;

D3.  $f$  jest wrażliwe na warunki początkowe

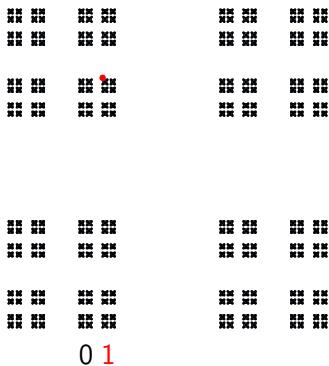
$(\exists \delta > 0 \forall U - \text{otw. } \forall x \in U \exists y \in U \exists k \in \mathbb{Z} : d(f^k(x), f^k(y)) > \delta)$ .

Za dużo!

Często  $D1 \wedge D2 \implies D3$ ,  
ale D3 działa na wyobraźnię!

$$\Sigma_2 = \{c : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

	...	(-3)	(-2)	(-1)	(0)	(1)	(2)	(3)	...
$\mathbb{1} =$	...	1	1	1	1	1	1	1	...
$0 =$	...	0	0	0	0	0	0	0	...
$0\mathbb{1} =$	...	1)	(0	1)	(0	1)	(0	1)	...
$10 =$	...	0)	(1	0)	(1	0)	(1	0)	...
$100 =$	...	(1	0	0)	(1	0	0)	(1	...
.....									
$(e^{-1}\pi) =$	...	1	0	1	0	1	1	0	...

$\Sigma_2 \iff$  zbiór Cantora<sup>2</sup>


---

	...	(-3)	(-2)	(-1)	(0)	(1)	(2)	(3)	...
$c =$	...	1	0	1	0	1	1	0	...

## Metryka na $\Sigma_2$

Odzworowanie  $d : \Sigma_2^2 \rightarrow [0, 1]$  zadane przez

$$d(c, c') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|c(i) - c'(i)|}{2^{|i|}}$$

jest metryką.

## Przykład 1.

Odległość  $\mathbb{0} = (\dots, 0, 0, 0, 0, \dots)$  od  $\mathbb{1} = (\dots, 1, 1, 1, 1, \dots)$ :

	...	(-3)	(-2)	(-1)	(0)	(1)	(2)	(3)	...
$\mathbb{1} =$	...	1	1	1	1	1	1	1	...
$\mathbb{0} =$	...	$(\frac{1}{8})$	$(\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{1})$	$(\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{4})$	$(\frac{1}{8})$	...
		0	0	0	0	0	0	0	
				0	0	0			
					0				

$$d(\mathbb{0}, \mathbb{1}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|}} = 3 = \text{diam}(\Sigma_2).$$

$$d(c, c') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|c(i) - c'(i)|}{2^{|i|}}$$

## Przykład 2.

Odległość  $\mathbb{1}0 = (\dots, 0, 1, 0, 1, \dots)$  od  $\mathbb{1}$ :

	...	(-4)	(-3)	(-2)	(-1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	...
$\mathbb{1} =$	...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$\mathbb{1}0 =$	...	1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	1	...
			0						0		
					0		0				

$$d(\mathbb{1}0, \mathbb{1}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|2i+1|}} = \frac{4}{3}.$$



$$d(c, c') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|c(i) - c'(i)|}{2^{|i|}}$$

### Przykład 3.

Odległość  $\mathbb{0}_{(-123)} = (\dots, \overset{(-123)}{0}, 1, 1, 1, \dots)$  od  $\mathbb{1}$ :

	...	<sup>(-123)</sup>	...	<sup>(-2)</sup>	<sup>(-1)</sup>	<sup>(0)</sup>	<sup>(1)</sup>	<sup>(2)</sup>	<sup>(3)</sup>	<sup>(4)</sup>	...
$\mathbb{1} =$	...	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...
$\mathbb{0}_{(-123)} =$	...	<sup>(2<sup>-123</sup>)</sup> 0	...	1	1	1	1	1	1	1	...

$$d(\mathbb{0}_{(-123)}, \mathbb{1}) = 2^{-123} = d(\mathbb{0}_{(123)}, \mathbb{1}).$$

Czym jest kula w  $(\Sigma_2, d)$ ?

Rozważmy kulę domkniętą o środku w  $\mathbb{1}$  i promieniu  $\frac{1}{4}$ .

	...	(-4)	(-3)	(-2)	(-1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	...
$\mathbb{1} =$	...	1	1	1	(1	1	1)	1	1	1	...
					(to musi zostać)						
$d = \frac{1}{4} :$	...	1	1	0	(1	1	1)	1	1	1	...
$d = \frac{1}{4} :$	(0)	0	0	1	(1	1	1)	1	1	1	...
$d = \frac{1}{4} :$	...	1	1	1	(1	1	1)	0	1	1	...
$d = \frac{1}{4} :$	...	1	1	1	(1	1	1)	1	0	0	(0)
$d = \frac{1}{4} :$	(0)	0	1	1	(1	1	1)	1	1	0	(0)
$d \leq \frac{1}{4} :$	(cokolwiek)	1	1	1	(1	1	1)	1	1	(cokolwiek)	

„Shift w prawo” – odwzorowanie  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$

$$\sigma(c)_i := c_{i-1}.$$

	...	(-4)	(-3)	(-2)	(-1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	...
$\sigma^{-1}(c) =$	...	0	0	0	1	1	0	1	0	0	...
$c =$	...	1	0	0	0	1	1	0	1	0	...
$\sigma(c) =$	...	1	1	0	0	0	1	1	0	1	...
$\sigma^2(c) =$	...	0	1	1	0	0	0	1	1	0	...
$\sigma^3(c) =$	...	0	0	1	1	0	0	0	1	1	...

### Własności $\sigma$

- bijekcja (homeomorfizm)
- punkty stałe:  $\emptyset, \mathbb{1}$ .
- punkty okresowe: ciągi okresowe.

## Chaotyczne własności $\sigma$ : tranzytywność

- tranzytywność:  $(\forall U, V - \text{otw. } \exists k \in \mathbb{Z} : \sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset)$ ;
- więcej: istnieje orbita gęsta w  $\Sigma_2$ , np.:

...(cokolwiek)... 0 1 00 01 10 11 000 001 010 011 100 101 110 111 0000 ...

## Chaotyczne własności $\sigma$ : gęstość orbit okresowych

- Do każdego ciągu można podejść dowolnie blisko ciągiem okresowym:

	...	(-5)	(-4)	(-3)	(-2)	(-1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	...
$c =$	...	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	...
$d \leq 2 :$	...	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	...
$d \leq 1 :$	...	1)	(0	1	1)	(0	1	1)	(0	1	1)	(0	...
$d \leq \frac{1}{2} :$	...	1	1	0)	(0	0	1	1	0)	(0	0	1	...
$d \leq \frac{1}{4} :$	...	0	1)	(0	0	0	1	1	0	1)	(0	0	...

## Chaotyczne własności $\sigma$ : wrażliwość na warunki początkowe

- $\sigma$  jest wrażliwe na warunki początkowe  
 $(\exists \delta > 0 \forall U - \text{otw.} \forall x \in U \exists y \in U \exists k \in \mathbb{Z} : d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) > \delta)$ .
- Nieważne, jak blisko leżą dwa (różne) ciągi –  
 – któraś iteracja (być może ujemna) rozdzieli je na co najmniej  $\delta = 1$ :

	...	(-123)	(-122)	...	(-2)	(-1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	...
$\mathbb{1} = \sigma^n(\mathbb{1}) =$	...	1	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...
$c =$	...	0	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...
$\sigma(c) =$	...	1	0	...	1	1	1	1	1	1	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sigma^{121}(c) =$	...	1	1	...	0	1	1	1	1	1	1	...
$\sigma^{122}(c) =$	...	1	1	...	1	0	1	1	1	1	1	...
$\sigma^{123}(c) =$	...	1	1	...	1	1	0	1	1	1	1	...

$$d(c, \mathbb{1}) = 2^{-123}, \quad \text{ale} \quad d(\sigma^{123}(c), \sigma^{123}(\mathbb{1})) = 1.$$

▶ Youtube (Stanley Wang) – dwie orbity atraktora układu Lorenza

## Semi-sprzężenie z shiftem

Rozważmy odwzorowanie  $f : X \rightarrow X$ .

Odwzorowanie  $f$  jest *chaotyczne w sensie istnienia dynamiki symbolicznej*, jeśli istnieje zbiór zwarty  $Y$ , niezmienniczy dla  $f$ , oraz ciągła surjekcja  $g : Y \rightarrow \Sigma_2$  taka, że  $f|_Y$  jest *semi-sprzężona* z  $\sigma$  przez zależność:

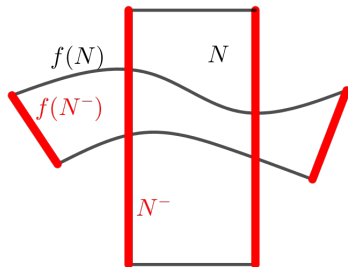
$$g \circ f|_Y = \sigma \circ g.$$

Wtedy  $f$  ma na  $Y$  co najmniej tak bogatą dynamikę, jak  $\sigma$  na  $\Sigma_2$ .

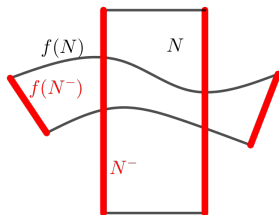
## H-zbiór

- Ciągłe odwzorowanie  
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $s$  i  $u$  oznaczają kierunki „stabilny” i „niestabilny”
- Definiujemy zbiór  $N = \overline{B}_u \times \overline{B}_s$  z wyróżnionym „zbiorem wejścia”:  $N^- = \partial B_u \times \overline{B}_s$

Samonakrywanie:







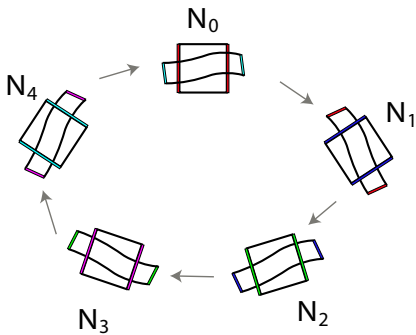
**Twierdzenie. Istnienie punktu stałego**  
[Miranda 1940].

Jeśli  $N \xrightarrow{f} N$ , to istnieje punkt  $p \in N$  taki, że

$$f(p) = p.$$

### Wniosek dla odwzorowania Poincarégo $P$

Jeśli  $N \xrightarrow{P} N$  i  $P$  jest odwzorowaniem Poincarégo, to istnieje orbita okresowa dla układu dynamicznego.



**Twierdzenie.** Istnienie punktu okresowego.

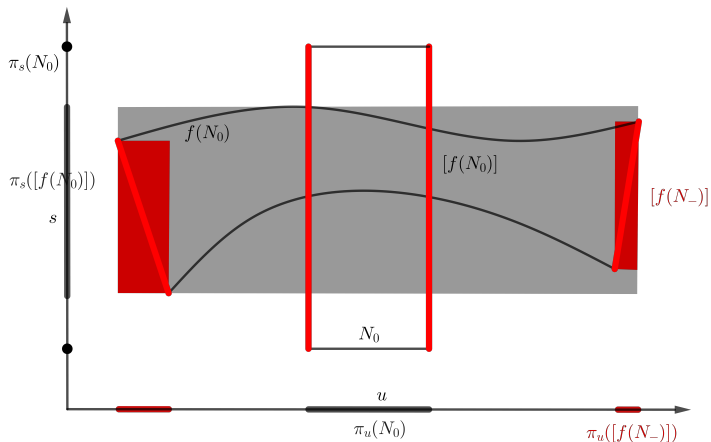
$$N_0 \xrightarrow{f} N_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} N_k \xrightarrow{f} N_0,$$

to istnieje  $k$ -okresowy punkt przechodzący przez te zbiory.

### Wniosek dla $P$

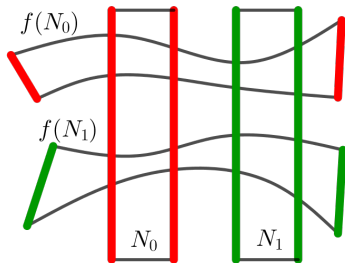
Jeśli ta relacja zachodzi dla odwzorowania Poincarégo  $P$ , to dostajemy punkt stacjonarny dla  $P^k$ , który leży na orbicie okresowej układu.

## Arytmetyka przedziałowa a nakrywanie:



Naiwnie:

$$\begin{cases} \pi_u([f(N_-^{lew})]) < \pi_u(N_0) < \pi_u([f(N_-^{praw})]) \\ \pi_s(N_0^{dol}) < \pi_s([f(N_0)]) < \pi_s(N_0^{gor}) \end{cases}$$

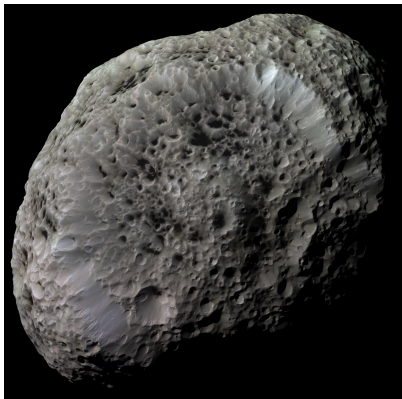


## Chaotyczne nakrywanie („podkowa topologiczna”)

Układ dwóch rozłącznych h-zbiorów spełniający relacje:

$$\begin{aligned} N_0 &\stackrel{f}{\rightrightarrows} N_0 & N_0 &\stackrel{f}{\rightrightarrows} N_1 \\ N_1 &\stackrel{f}{\rightrightarrows} N_0 & N_1 &\stackrel{f}{\rightrightarrows} N_1 \end{aligned}$$

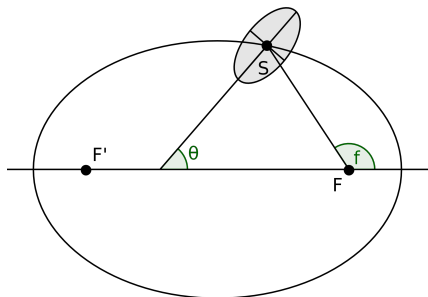
oznacza, że  $f$  jest chaotyczne w sensie semi-sprzężenia z shiftem na przestrzeni  $\Sigma_2$  (*dynamika symboliczna*).



Hyperion, Wikipedia

## Hyperion, księżyc Saturna

- Osie (w km):  $360.2 \times 266 \times 205.4$
- Rotacja własna  $\theta$  prawdopodobnie chaotyczna (obserwacje *Voyagerów*)
- [▶ Youtube \(Kurdistan Planetarium\)](#)

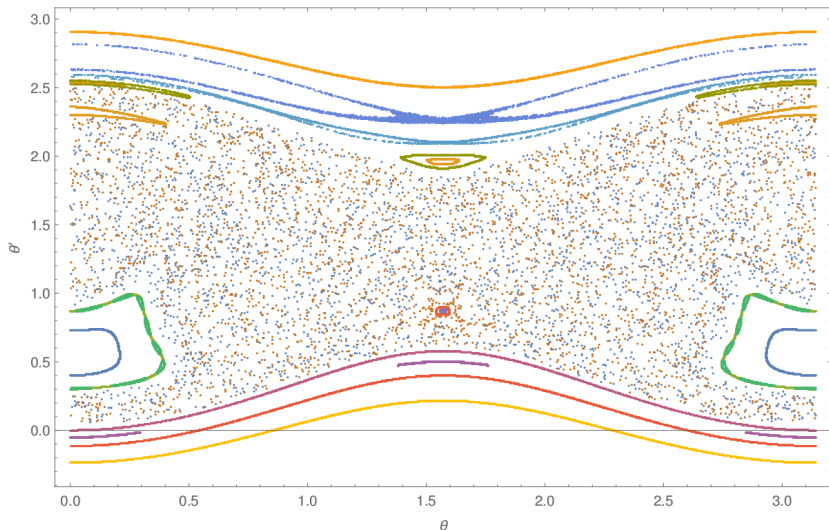


## Układ dynamiczny rotacji jednoosiowej

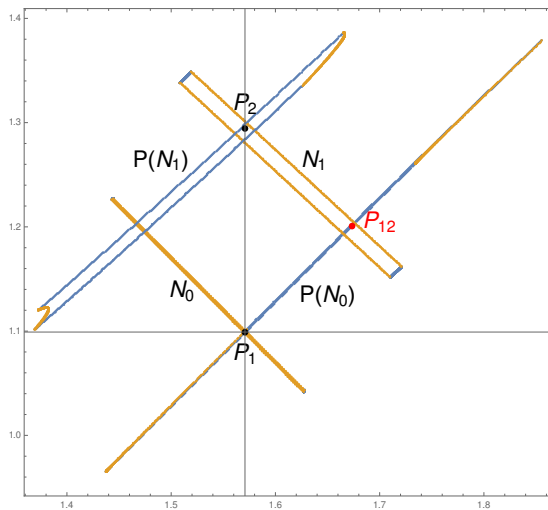
$$\begin{cases} \theta' = \phi \\ \phi' = -\frac{\omega^2}{2r^3} \sin 2(\theta - f) \\ f' = \frac{(1+e \cos f)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \end{cases}$$

gdzie  $r = \frac{1-e^2}{1+e \cos f}$ ,  $(\theta, \phi, f) \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

Przekrój Poincarégo dla  $f = 0$ ,  $e = 0.1$ ,  $\omega^2 = 0.79$ . Zmienna  $\theta$  jest  $\pi$ -okresowa:

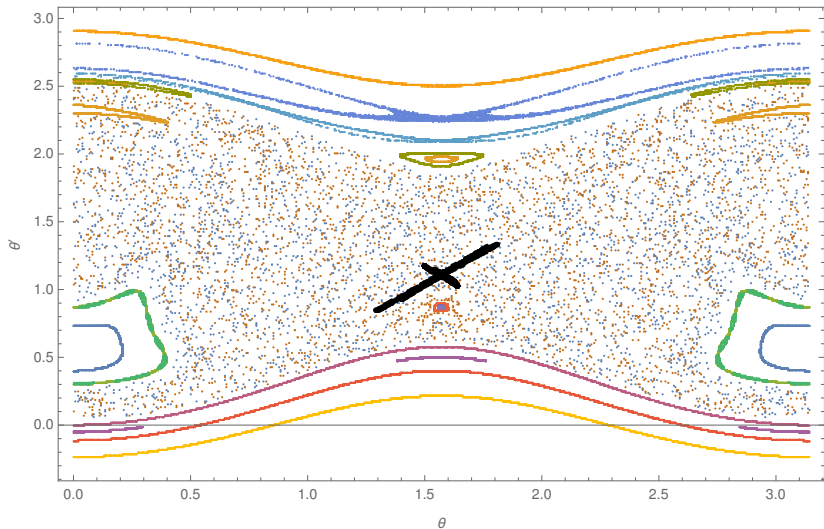


$$N_0 \xrightarrow{P} N_0 \xrightarrow{P} N_1 \xrightarrow{P} N_1 \xrightarrow{P} N_0:$$





Gdzie leży ta podkowa na przekroju Poincarégo?

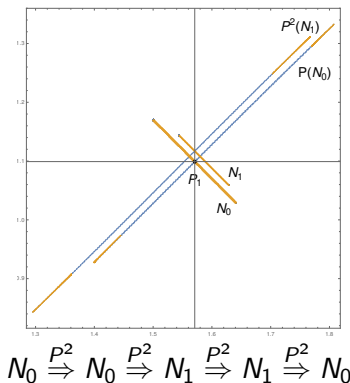


Czasem potrzeba wyższych iteracji (podkowa dla  $P^k$ ):

$$N_0 \xrightarrow{P} N_0 \xrightarrow{P} N_1 \xrightarrow{P} \dots \xrightarrow{P} N_k \xrightarrow{P} M_0 \xrightarrow{P} M_0 \xrightarrow{P} M_1 \xrightarrow{P} \dots \xrightarrow{P} M_k \xrightarrow{P} N_0$$

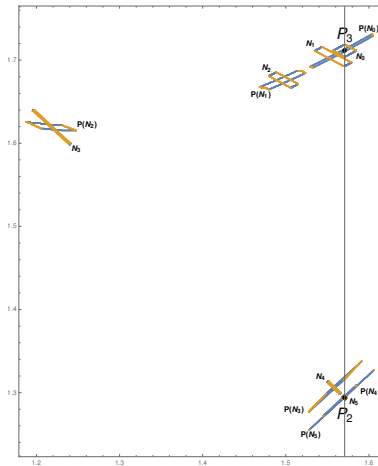
$$\implies N_0 \xrightarrow{P^k} N_0 \xrightarrow{P^k} M_0 \xrightarrow{P^k} M_0 \xrightarrow{P^k} N_0$$

Podkowa dla  $P^2$ , związana z punktem  $P_1$ :

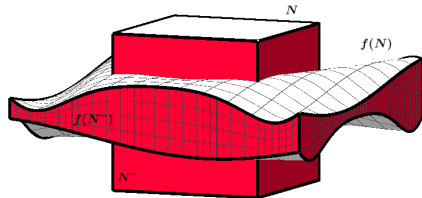
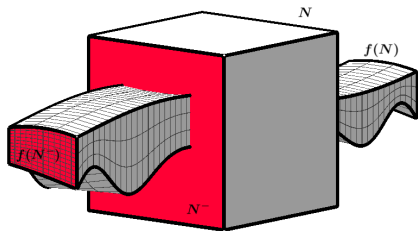


Podkowa dla  $P^4$ , z  $P_2$  do  $P_3$ :

$$N_0 \xrightarrow{P^4} N_0 \xrightarrow{P^4} M_0 \xrightarrow{P^4} M_0 \xrightarrow{P^4} N_0$$

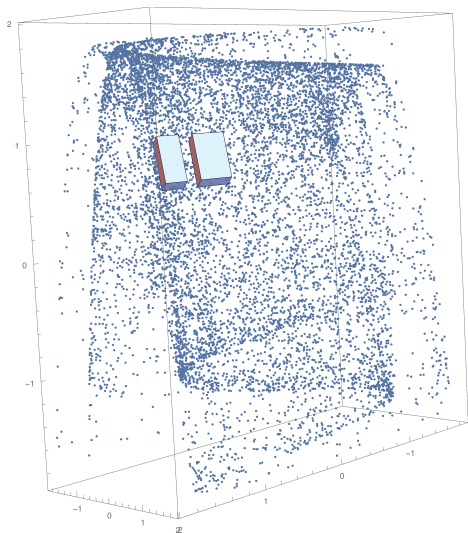


Samonakrywanie w  $\mathbb{R}^3$ :

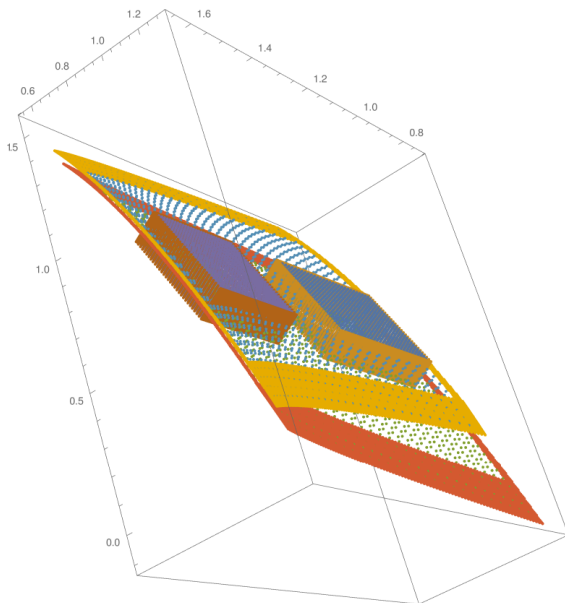


„Henon 3D” i atraktor „złożony ręcznik”:

$$H(x, y, z) = (a - y^2 - bz, x, y), \quad a = 1,76, \quad b = 0,1$$



$H^4$  [Q. Li i X.-S. Yang, 2006]:





I SENSE YOU  
HAVE  
QUESTIONS!

ENTER, MY  
CHILD, AND LET  
THE POWER OF  
SCIENCE REVEAL  
ALL!

'kay.