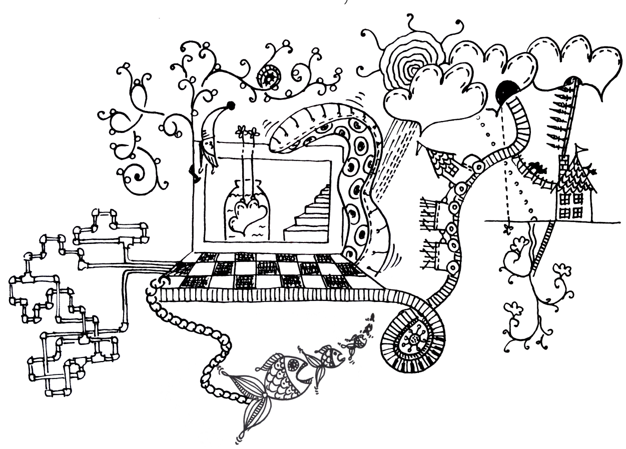
LIX Szkoła Matematyki Poglądowej

Matematyka i Komputery

Ośrodek Kultury Matematycznej

OKM

15-18 lutego 2019, Wola Ducka



Warsaw Center of Mathematics and Computer Science

UNIWERSYTET PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechnika Warszawska

LIX Szkoła Matematyki Poglądowej, Matematyka i Komputery, Wola Ducka, 15-18 lutego 2019, www.smp.uph.edu.pl

	Człowiek – modelowanie od komórki do tłumu piątek, 15 lutego prowadząca: Ewa Piątkowska-Janko	Na własne oczy sobota, 16 lutego prowadzący: Przemysław Biecek	Komputerze, na pomoc! niedziela, 17 lutego prowadzący: Grzegorz Kosiorowski	Maszynowe machinacje poniedziałek, 18 lutego prowadząca: Kamila Łyczek
8:15–9:00		śniadanie		śniadanie
9:00–9:45	Andrzej Komisarski *Odczyt Laureata Medalu Filca** LVIII Szkoły*	Bartosz Wilczyński *Czy matematyk może zobaczyć układ chromosomów, jeśli nie widzi ich mikroskop?*	śniadanie	Bartłomiej Bzdęga *„Machines making machines. How perverse!”*
10:00–10:45	Piotr Szymczak *Przepychanie wielbłąda przez ucho igielne, czyli o transporcie białek przez pory*	Piotr Migdał *Zanurzamy w* $\mathbb{R}^n$ *– słowa i twarze*	Tomasz Kapela *Czy można ufać komputerowo wspieranym dowodom?*	Michał Skrzypczak *Czy komputer może się mylić?*
10:45–11:15	przerwa kawowa	przerwa kawowa		przerwa kawowa
11:15–12:00	Daniel Wójcik *Od ciągów iglic po zachowanie myszy. Procesy punktowe w biologii*	Przemysław Grzegorzewski *Wnioskowanie statystyczne na podstawie danych przedziałowych – problemy i wyzwania*	Daniel Wilczak *Algorytmiczne różniczkowanie, czyli do czego może przydać się setna pochodna*	Jarosław Grytczuk *Bitcoin – złoto dla zuchwałych?*
12:15–13:00	Daniel Wójcik *Źródła aktywności elektrycznej w mózgu – modelowanie i rekonstrukcja*	Przemysław Biecek *Pokaż! Inaczej nie zaufam*	Anna Gierzkiewicz-Pieniążek *Kosmiczny chaos wspomagany komputerowo*	Sylwester Arabas *O modelowaniu komputerowym chmur i deszczu*
13:15–14:00	obiad	obiad	obiad	obiad
15:15–16:00	Przemysław Marcowski *Modelowanie decyzji: mózg i zachowanie*		Łukasz Bożyk *Flagi na torcie, czyli komputer mnoży obrazki*	
16:15–17:00	Piotr Fronczak *Modelowanie zjawisk kolektywnych – dynamika tłumu*	Andrzej Dąbrowski *1000 słów*	Grzegorz Kosiorowski *Kryptolog na dworze króla Artura*	
17:15–18:00	Maciej M. Sysło *Elementy historii obliczeń za pomocą mechanicznych maszyn do liczenia – od Napiera po Curta*	Wit Jakuczun *Optymalizacja praktyczna, czyli jak właściciel firmy może zarobić na algorytmie simplex?*	Tomasz Kazana *Kryptologia postkwantowa*	
18:15–19:00	kolacja		kolacja	
19:30–∞	Maciej M. Sysło *Warsztaty z liczenia*	BAL	*Konkurs na Wzorowego Słuchacza** *prowadząca: Renata Jurasińska*	

*Konkurs na Wzorowego Słuchacza

W zawodach może wziąć udział każdy uczestnik Szkoły (wykładowca, słuchacz), odpowiadając na pytania i łamigłówki związane z najróżniejszymi detalami dotyczącymi aktualnej Szkoły. Wzorowym słuchaczem można zostać co najwyżej trzykrotnie.

**Medal Filca

Tradycją Szkół Matematyki Poglądowej jest nagradzanie najlepszego odczytu każdej szkoły Medalem Filca. Głosowanie odbywa się ostatniego dnia. Każdy uczestnik Szkoły może oddać głosy na jego zdaniem najlepsze (cokolwiek to dla niego znaczy) wykłady.
Zasady głosowania są następujące:

- Każdy ma co najwyżej tyle głosów, na ilu referatach był obecny.
- Na jeden wykład jedna osoba może oddać co najwyżej 10 głosów.
- Liczba wykładów, na które się głosuje, jest ograniczona z góry tylko przez posiadaną liczbę głosów.
- Głosowanie jest anonimowe.
- Głosy należy oddawać najpóźniej w poniedziałek do obiadu.
- Wykładowca, który otrzyma największą liczbę głosów, zostaje Medalistą Filca.
- Podczas ogłaszania wyników podawane są trzy najlepiej ocenione wykłady.
- Uroczyste wręczenie medalu oraz odczyt Laureata będą mieć miejsce podczas następnej Szkoły.

Lista dotychczasowych Medalistów Filca oraz Wzorowych Słuchaczy:

`smp.uph.edu.pl/szkoly/medale`

Odczyt Laureata Medalu Filca LVIII Szkoły
$0101 \oplus 1001 = 1100$

Andrzej Komisarski

Opowiem o kilku nieoczekiwanych zastosowaniach operacji XOR, czyli dodawania w grupie $\mathbb{Z}_2$ oraz w jej potęgach $\mathbb{Z}_2^n$. Nie będą to żadne poważne, czy nowe wyniki a raczej proste przykłady i zadania. Część z nich ma związek z informatyką – można je interpretować w języku teorii informacji i kodowania. Gdy w $\mathbb{Z}_2^n$ oprócz dodawania wprowadzimy również mnożenie (czyniące z $\mathbb{Z}_2^n$ ciało), wówczas wszystko staje się jeszcze bardziej zaskakujące.

Przepychanie wielbłąda przez ucho igielne, czyli o transporcie białek przez pory

Piotr Szymczak

Synteza białek w komórce następuje na rybosomach. Następnie białka są transportowane do swojego miejsca pracy – część zostaje w cytoplazmie, inne są kierowane do organelli, takich jak mitochondria czy retikulum endoplazmatyczne. Ale jak dostać się do środka tych organelli, jeśli rozmiary porów w otaczających je błonach są dużo mniejsze niż rozmiary zwiniętych białek? I co zrobić, jeśli łańcuch białkowy zawiera węzeł, który może zacisnąć się podczas przepychania przez por? W znalezieniu odpowiedzi na te pytania pomóc mogą symulacje komputerowe transportu białek przez pory, o których opowiem.

Od ciągów iglic po zachowanie myszy. Procesy punktowe w biologii

Daniel Wójcik

Neurony, komórki odpowiadające za przetwarzanie informacji w układzie nerwowym, są złożonymi komputerami analogowymi. Kodują one wyniki swoich obliczeń w postaci ciągów zdarzeń punktowych zwanych *potencjałami czynnościowymi* albo *iglicami*. Żeby zrozumieć, jak mózg wykonuje obliczenia, musimy najpierw rozwinąć język, który pozwoli nam precyzyjnie mówić o ciągach iglic. Takiego języka dostarcza teoria procesów punktowych. Co ciekawe, teoria ta przydaje się również w opisie zachowania grup myszy w nowoczesnych zautomatyzowanych klatkach, takich jak IntelliCage, które pozwalają badać społeczne aspekty zachowania myszy. W moim wykładzie omówię pokrótce te dwa różne aspekty funkcjonowania zwierząt, ilustrując je wybranymi doświadczeniami. Pokażę, jak zwiększanie matematycznej precyzji opisu badanych zjawisk może prowadzić do nowych ciekawych biologicznie wyników.

Źródła aktywności elektrycznej w mózgu – modelowanie i rekonstrukcja

Daniel Wójcik

Zewnątrzkomórkowy potencjał elektryczny jest wygodną miarą aktywności mózgu. Stosunkowo łatwo go zmierzyć, rozdzielczość pomiaru pozwala na analizę aktywności pojedynczych komórek, a rejestracje są stabilne tygodniami.

Daleki zasięg pola elektrycznego ułatwia rejestrację, ale utrudnia interpretację sygnałów, które niosą informację o aktywności wielu źródeł, często istotnie odległych od elektrody. Wygodniejszy w analizie jest rozkład źródeł prądowych aktywności. Niestety, nie można go zmierzyć bezpośrednio. W swoim wykładzie omówię związki między źródłami aktywności elektrycznej a potencjałem i pokażę, jak zrekonstruować źródła na podstawie jednoczesnej rejestracji potencjału w wielu miejscach, przy użyciu dowolnego rozkładu elektrod. Pokażę również, jak połączyć analizę źródeł z rozkładem na składowe niezależne (ICA), żeby wydobyć informacje o aktywności konkretnej populacji komórek.

Modelowanie decyzji: mózg i zachowanie

Przemysław Marcowski

Jak podejmujemy decyzje w złożonym świecie, w którym na proces decyzyjny może wpływać wiele czynników? Badania nad podejmowaniem decyzji dążą do odpowiedzi na to pytanie, używając do tego technik modelowania, które łączą dane odnoszące się do zachowania i dynamiki aktywności mózgu. Podczas wykładu będzie można posłuchać o testowaniu i wizualizacji modeli matematycznych, które pomagają lepiej zrozumieć to, dlaczego (czasem) wolimy wróbla w garści od gołębia na dachu.

Modelowanie zjawisk kolektywnych – dynamika tłumu

Piotr Fronczak

Podczas wykładu spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób powstają podniebne spektakle z udziałem setek ptaków i w jaki sposób ławice, głupich, skądinąd, ryb koordynują swój ruch z taką gracją. Wyjaśnimy też, skąd się biorą korki uliczne i jak zapobiec panice w tłumie. Pokażemy, że wszystkie te zjawiska można opisać jako system wielu oddziałujących ze sobą elementów, nieco bardziej tylko zaawansowanych niż zbiór oddziałujących cząstek elementarnych, które bada klasyczna fizyka.

Elementy historii obliczeń za pomocą mechanicznych maszyn do liczenia – od Napiera po Curta

Warsztaty z liczenia

Maciej M. Sysło

Dla wielu osób informatyka nie ma jeszcze swojej historii. Współczesny komputer jest jednak ukoronowaniem wspólnych wysiłków cywilizacji i pokoleń, rozwijających w ciągu wieków wiele rożnych dziedzin nauki i techniki, które kształtowały również sposoby rachowania i konstrukcje urządzeń wspomagających złożone i masowe obliczenia. Od zarania bowiem ludzkości człowiek starał się ułatwiać sobie prowadzenie rachunków i obliczeń, posługując się przy tym rożnymi urządzeniami. Tak rodziły się abaki (liczydła), kalkulatory i wreszcie komputery. Komputer osobisty z początków lat 80. XX wieku można uznać za zwieńczenie wysiłków zarówno tych, których efektem były przeróżne konstrukcje kalkulatorów mechanicznych, przeznaczonych na ogół do osobistego użytku, jak i tych, które skupiały się na budowie komputera o ogólnym i powszechnym przeznaczeniu.

Jeśli nawet uznaje się, że informatyka ma swoją historię, to na ogół niewielką uwagę przywiązuje się do urządzeń mechanicznych. A przecież twórcami pierwszych takich maszyn były nieprzeciętne umysły XVII wieku: John Napier, Blaise Pascal i Gottfried Leibniz. Mechanizmy użyte przez Pascala i Lebniza były stosowane w kalkulatorach mechanicznych do ostatnich dni tych urządzeń. Co więcej, ich rozwój i produkcja doprowadziły do sytuacji w latach 50-70 XX wieku, w której każdy człowiek potrzebujący takiego urządzenia mógł sobie je sprawić, podobnie jak dzisiaj każdy może mieć komputer osobisty. Z kolei jeden pomysł Napiera zaowocował pierwszym kalkulatorem mechanicznym Schickarda, a inny – suwakiem logarytmicznym, nieodłącznym urządzeniem inżynierów do końca lat 1960'. Na początku lat 1970' te wszystkie piękne mechaniczne cacka powędrowały do lamusa, wyparte przez kalkulatory elektroniczne.

Wystąpienie będzie poświęcone najważniejszym osiągnięciom w dziedzinie kalkulatorów mechanicznych i kilku ważnym ideom z okresu ich świetności. Prezentacji będzie towarzyszyć demonstracja działania oryginalnych urządzeń ze zbiorów autora. Pojawią się również repliki: kalkulatora Schickarda (nie istnieje oryginał) i maszyny Słonimskiego (nie odnaleziono oryginału). Na warsztatach będzie można popróbować swoich sił w obliczeniach mechanicznych. W tym również na modelu maszyny Turinga, wykonanym z klocków Lego.

Czy matematyk może zobaczyć układ chromosomów, jeśli nie widzi ich mikroskop?

Bartosz Wilczyński

Chromosomy są ułożone w jądrze komórkowym w niebywale upakowanym stanie. Nie może być to ułożenie przypadkowe, ale nie mamy metod bezpośredniego „podglądania" tego ułożenia ze względu na dynamikę układu i ograniczenia technik mikroskopowych. Możemy natomiast, dzięki nowym technikom sekwencjonowania DNA, otrzymać macierze częstości kontaktów pomiędzy chromosomami, na podstawie których możemy próbować wnioskować o tym co się z chromosomami dzieje. Droga od takich macierzy do interesujących wniosków nie jest łatwa, ale w związku z tym obfituje w ciekawe pytania dla matematyków, statystyków i informatyków.

Zanurzamy w $\mathbb{R}^n$ – słowa i twarze

Piotr Migdał

Różne obiekty mogą być zanurzone w $\mathbb{R}^n$. W uczeniu maszynowych, mogą to być np. słowa lub... twarze. Opowiem po co zanurzać rzeczy w $\mathbb{R}^n$, jakie n jest dobre (zwykle koło 300), i co z tego wynika: zarówno w kontekście odległości (nasze intuicje geometryczne dla $n = 300$ mogą być słabe) jak i struktury liniowej.

Wnioskowanie statystyczne na podstawie danych przedziałowych – problemy i wyzwania

Przemysław Grzegorzewski

Punktem wyjścia wnioskowania statystycznego są dane pochodzące z obserwacji lub będące wynikami eksperymentu. Rozwój technik informacyjnych otworzył dostęp do dużych i różnorodnych zbiorów danych. Zainteresowania współczesnej statystyki nie ograniczają się – jak niegdyś – do danych liczbowych czy wektorów, ale obejmują również analizę danych funkcjonalnych, symbolicznych, rozmytych itd.

W ostatnim czasie dużym zainteresowaniem cieszą się metody wnioskowania na podstawie danych przedziałowych, za pomocą których można w sposób stosunkowo prosty modelować brak precyzji, niepewność wynikającą z braku informacji, fluktuacje mierzonych wielkości itp.

W referacie zostaną zasygnalizowane pewne problemy pojawiające się przy konstruowaniu narzędzi statystycznych do wnioskowania na podstawie danych przedziałowych. Zostaną omówione możliwe scenariusze działania, wynikające z przyjętego sposobu interpretacji danych. Rozważania zostaną zilustrowane przykładami praktycznych rozwiązań.

Pokaż! Inaczej nie zaufam

Przemysław Biecek

Uczenie maszynowe (*machine Learning*) był zbiorem technik, za pomocą których ludzie uczyli maszyny. Dzisiaj obserwujemy rozwój technik uczenia ze wzmocnieniem (*reinforcement learning*), które pozwalają maszynom uczyć się od siebie samych. Co dalej? Czy zbudujemy techniki, dzięki którym ludzie będą uczyć się od maszyn?

1000 słów

Andrzej Dąbrowski

Obraz wart jest tysiąc słów. Ale trzeba więcej słów by o tym opowiedzieć (Tukey).

Informacja, która nas zewsząd osacza wymaga języka zrozumiałego dla wszystkich. Takim językiem jest obraz. Obraz, który wydobędzie z informacji jej sedno ale również ukaże jej piękno.

W referacie pokażę, że umiejętnie skonstruowany obraz pozwala zrozumieć i odkryć nieznane i czasami niewygodne fakty. Grafiki, przedstawiające dane, mogą również zniekształcać obraz rzeczywistości. Dowiecie się, jak można to zauważyć.

Optymalizacja praktyczna, czyli jak właściciel firmy może zarobić na algorytmie simplex?

Wit Jakuczun

Data science jest dzisiaj utożsamiane z technikami *uczenia maszynowego*. To jest bardzo mocne uproszczenie i z mojego praktycznego doświadczenia wynika, że jest nie do obronienia. W trakcie wykładu pokażę dlaczego optymalizacja jest potrzebna, aby rozwiązywać problemy biznesowe firm. Opowiem czym jest optymalizacja, dlaczego jest trudna, jakie narzędzia są dostępne na rynku (darmowe i płatne) oraz jakie przykładowe wdrożenia były przez nas robione.

Czy można ufać komputerowo wspieranym dowodom?

Tomasz Kapela

Obliczenia zmiennoprzecinkowe są obarczone błędami zaokrągleń, które potrafią całkowicie wypaczyć wynik. Symulacje komputerowe często „gubią” obiekty niestabilne lub sugerują istnienie fenomenów np. chaosu, których w prawdziwym systemie nie ma. Jak zatem otrzymane oszacowania mogą dowodzić twierdzeń matematycznych?

W trakcie referatu przedstawię wybrane narzędzia komputerowo wspieranych dowodów tj. arytmetyka przedziałowa, odwzorowania kostkowe, relacje nakrywające, przedziałowe metody Newtona i Krawczyka. Pokażę też przykłady komputerowo wspieranych dowodów od bardzo prostych aż po stabilność orbit okresowych w problemie N-ciał.

Algorytmiczne różniczkowanie, czyli do czego może przydać się setna pochodna

Daniel Wilczak

Algorytmiczne różniczkowanie to grupa niezwykle efektywnych algorytmów pozwalających na obliczanie pochodnych (dowolnego rzędu) funkcji (również wielu zmiennych), dla których istnieje algorytm obliczający ich wartość. W teorii układów dynamicznych stosuje się je do rozwijania w szeregi Taylora rozwiązań równań różniczkowych, funkcji uwikłanych, a nawet rozmaitości niezmienniczych.

W trakcie wykładu przedstawię podstawowe idee algorytmicznego różniczkowania oraz podam przykładowe zastosowanie do badania bifurkacji rozwiązań okresowych w kołowym problemie trzech ciał.

Kryptologia postkwantowa

Tomasz Kazana

Algorytm Shora to szybki algorytm kwantowy (a więc potrzebujący komputera kwantowego do realizacji), umożliwiający rozkład na czynniki pierwsze nawet dużych liczb naturalnych. Jednocześnie – jak powszechnie wiadomo – istotna część kryptologii (np. słynny szyfr RSA) oparta jest na trudności faktoryzacji. Tak więc stworzenie stabilnego i odpowiednio złożonego komputera kwantowego musi nieuchronnie doprowadzić do kryptologicznej rewolucji. W tej prelekcji spróbujemy zasygnalizować, co (i jak bardzo) się zmieni, a co zostanie „po staremu”.

Flagi na torcie, czyli komputer mnoży obrazki

Łukasz Bożyk

Zajmiemy się rozwiązaniem pewnego problemu ekstremalnej teorii grafów na dwa sposoby. Pierwszy będzie dość krótki i elementarny, choć odrobinę pomysłowy. Drugi, z pozoru przeładowany koncepcyjnie i angażujący silne narzędzia — algebry flagowe i elementy optymalizacji wypukłej – będzie różnił się tym, że niemal w całości można go zlecić komputerowi. Będzie miał też tę przewagę, że pozwoli na osiągnięcie poważnych matematycznych rezultatów tam, gdzie sposobów podobnych do pierwszego trudno się spodziewać.

Kryptolog na dworze króla Artura

Grzegorz Kosiorowski

Nadmiar matematyki potrafi czasem zepsuć rozrywkę: przykładem takiej sytuacji jest gra towarzyska „Avalon”. Celem referatu będzie pokazanie jak za pomocą nowoczesnych algorytmów kryptograficznych „drużyna Artura” może wyznaczyć strategię maksymalizującą szanse na zwycięstwo w tej grze. Pomocniczo omówiona będzie zasada działania tego typu algorytmów.

Kosmiczny chaos wspomagany komputerowo

Anna Gierzkiewicz-Pieniążek

Mój referat opiera się na wcześniejszych wykładach Daniela Wilczaka i Tomasza Kapeli o arytmetyce przedziałowej i bibliotece CAPD.

Chciałabym pokazać, jak za pomocą prostych narzędzi wykrywać chaos w ciągłych układach dynamicznych. Porozmawiamy o naturze chaosu i o tym, jak go „zdyskretyzować”, aby móc zaprząc do pracy komputer, narzędzie z natury dyskretne. Przedstawię też przykłady z mojej pracy nad układem modelującym rotację własną Hyperiona, księżyca Saturna.

„Machines making machines. How perverse!”

Bartłomiej Bzdęga

Quine to program komputerowy, który wyświetla swój własny kod źródłowy (bez operacji na plikach – byłoby zbyt łatwo), a maszyny von Neumanna budują kopie siebie samych. Pokażę liczne przykłady takiego lub podobnego zachowania, zarówno w przyrodzie żywej, jak i tej ożywionej ręką programisty.

Czy komputer może się mylić?

Michał Skrzypczak

Komputery kontrolują coraz większą część naszego otoczenia, włącznie z tak krytycznymi obszarami jak aparatura medyczna czy autonomiczne pojazdy. Z drugiej strony, niemal codziennie spotykamy się z „bugiem” w jakimś oprogramowaniu. Czy w takim razie maszynom można ufać? W ramach wykładu postaram się zdefiniować co to znaczy, że komputer się myli. Następnie podam przykłady metod zapewniających bezbłędność (wraz z ich ograniczeniami).

Bitcoin – złoto dla zuchwałych?

Jarosław Grytczuk

Właśnie mija dziesięć lat od pojawienia się *bitcoina* – internetowej waluty, która miała zrewolucjonizować światowy system handlu. Przedstawię w zarysie ideę tego wynalazku oraz matematyczne podstawy jego działania. Jednym z kluczowych elementów jest tu zagadnienie *konsensusu*, znane także jako *Problem Bizantyjskich Generałów*. Chodzi o to jak uzgodnić wspólne stanowisko w warunkach przypominających działania wojenne (armia rozproszona, łączność zerwana, część generałów zdradziła, itp.). Okazuje się, że nawet jeden zdrajca niweczy możliwość idealnego rozwiązania, chyba, że użyjemy maszyn losujących...

O modelowaniu komputerowym chmur i deszczu

Sylwester Arabas

Nieprzerwanie już od lat pięćdziesiątych XX wieku, najwydajniejsze komputery wykorzystywane są do symulacji chmur. Kluczowym wyzwaniem, jak i powodem do stosowania obliczeń numerycznych przy modelowaniu ewolucji chmur i deszczu, jest szeroki zakres skal przestrzennych istotnych dla tych procesów. Chmury, będące strukturami o rozciągłości poziomej i pionowej przekraczającej kilometry, składają się z kropelek wody powstających na submikrometrowych rozmiarów drobinach zanieczyszczeń zawieszonych w powietrzu. Nieliniowy charakter procesów odpowiadających za dynamikę rozmiarów kropel, takich jak kondensacja i parowanie, zderzenia i rozpad kropel, powodują, iż mikroskopowe własności (fizyczne i chemiczne) drobin aerozolu determinują makroskopowe własności chmur i deszczu. Podczas wykładu opowiem o wybranych stosowanych w tej dziedzinie modelach matematycznych.

Zapowiedź
LX Szkoły Matematyki Poglądowej

Błędy, iluzje, sztuczki, oszustwa, czyli to, z czego zbudowana jest matematyka

Fanatycznych matematycznych patriotów spieszymy uspokoić – to nie jest opis efektu „końcowego”, bieżącego stanu matematyki, lecz opis punktów startowych większości jej dokonań.

Gdy ktoś nam powie, że kwadratu nie można podzielić na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach, pomyślimy, że żartuje. No, chyba że „przypadkowo” znamy normy p-adyczne i – tym sposobem – umiemy ten dziwny fakt udowodnić. A jak będzie z podziałem kwadratu na trójkąty ostrokątne?

Proklosowi zdawało się, że można udowodnić V postulat *Elementów*, startując od poprzednich czterech. I przez półtora tysiąca lat półtora tysiąca matematyków takie dowody produkowało, kolekcjonując bardzo pouczające błędy – bo sprawa była niewykonalna – prowadzące do sprecyzowania pojęcia teorii matematycznej.

Georg Cantor udowodnił, że kwadrat ma tyle samo punktów, co odcinek, i nie mógł uwierzyć, że matematyka toleruje takie sztuczki.

Każdy zna zagadkę, jak z sześciu zapałek ułożyć cztery trójkąty, ale nie każdy wie, jak z dziesięciu zapałek ułożyć pięć czworościanów. A ten, który wie, wie również, że nie będzie mógł tego zademonstrować na imieninach u cioci.

Leibniz wymyślił obiekty nieskończenie małe – większe od zera, ale mniejsze od każdej dodatniej liczby rzeczywistej – by móc uprawiać analizę matematyczną. Ten absurdalny pomysł oburzał wielu, ale gdy się go w analizie pozbyto, natychmiast znaleźli się tacy, co powołali do życia analizę niestandardową, w której takie obiekty pożytecznie istnieją.

Hausdorff stworzył sztuczkę zwaną paradoksalnym rozkładem, która pozwoliła Banachowi i Tarskiemu rozłożyć kulę na dwie z nią identyczne. Ten chwyt nie działał na płaszczyźnie, jednak jego sedno – istnienie „dzikich” figur – pozwoliło Laczkovichowi wykonać kwadraturę koła.

Skoro przy rozwiązywaniu równań kwadratowych posługujemy się równaniami liniowymi, przy rozwiązywaniu równań sześciennych działają równania kwadratowe, a przy rozwiązywaniu równań stopnia czwartego – równania sześcienne, więc było rzeczą pewną, że przy rozwiązywaniu równań stopnia piątego zadziałają równania stopnia czwartego (i tak dalej...). Iluzja była tak silna, że Niels Abel nawet znalazł ten sposób, by następnie – przyglądając się swemu dokonaniu – udowodnić, że jest to niemożliwe niezależnie już od sposobu.

A co można odkryć bezowocnie, starając się narysować pięciokąt mający dokładnie trzy osie symetrii?

Zapraszamy na nasz przegląd takich osobliwości.