Gra w (wielo)kolorowanie sympleksów

Piotr Maćkowiak

Katedra Ekonomii Matematycznej

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

2018

Lemat(y) Spernera

- (lemat Spernera - wersja słaba) Niech T będzie triangulacją sympleksu Δ^n ze V_T zbiorem wierzchołków triangulacji T. Jeśli funkcja $l : V_T \to [n+1]$ jest etykietowaniem Spernera, to istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, że $l(vert(\sigma)) = [n+1]$.

Lemat(y) Spernera

- (lemat Spernera - wersja słaba) Niech T będzie triangulacją sympleksu Δ^n ze V_T zbiorem wierzchołków triangulacji T. Jeśli funkcja $l : V_T \longrightarrow [n+1]$ jest etykietowaniem Spernera, to istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, że $l(vert(\sigma)) = [n+1]$.
- (o zbiorach łączących) Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz dane będą triangulacja T sympleksu Δ^n i funkcja $l : V_T \longrightarrow [n+1]$. Wtedy

Lemat(y) Spernera

- (lemat Spernera - wersja słaba) Niech T będzie triangulacją sympleksu Δ^n ze V_T zbiorem wierzchołków triangulacji T. Jeśli funkcja $l : V_T \to [n+1]$ jest etykietowaniem Spernera, to istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, że $l(vert(\sigma)) = [n+1]$.
- (o zbiorach łączących) Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz dane będą triangulacja T sympleksu Δ^n i funkcja $l : V_T \to [n+1]$. Wtedy
  (a) istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, że $\#l(vert(\sigma)) = n+1$ lub

Lemat(y) Spernera

- (lemat Spernera - wersja słaba) Niech T będzie triangulacją sympleksu Δ^n ze V_T zbiorem wierzchołków triangulacji T. Jeśli funkcja $l : V_T \to [n+1]$ jest etykietowaniem Spernera, to istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, że $l(vert(\sigma)) = [n+1]$.
- (o zbiorach łączących) Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz dane będą triangulacja T sympleksu Δ^n i funkcja $l : V_T \to [n+1]$. Wtedy
  (a) istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, że $\# l(vert(\sigma)) = n+1$ lub
  (b) istnieje ciąg wierzchołków $v^1, v^2, \ldots, v^q \in V_T$, $q \in \mathbb{N}$, dla którego $l(v^1) = \ldots = l(v^q)$, $\langle v^j, v^{j+1} \rangle$ jest krawędzią pewnego sympleksu z T, $j \in [q-1]$, oraz dla każdego $i \in [n+1]$ istnieje taki indeks $j \in [q]$, że $v^j \in \Delta^n_i$.

Triangulacja regularna

Ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $T := K_m^n(\Delta^n)$, $V_T := V_m^n(\Delta^n)$. Załóżmy, że $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

Triangulacja regularna

Ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $T := K^n_m(\Delta^n)$, $V_T := V^n_m(\Delta^n)$. Załóżmy, że $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- Lemat:

  Istnieje taka funkcja $l : V_T \to [n+1]$, że dla dowolnego $\sigma \in T$ zachodzi $l(vert(\sigma)) = [n+1]$.

Triangulacja regularna

Ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $T := K_m^n(\Delta^n)$, $V_T := V_m^n(\Delta^n)$. Załóżmy, że $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- Jeśli funkcja $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$ spełnia warunek: dla $v \in \Delta_i^n \cap V_T$, $L_k(v) \neq i$, $i, k \in [n+1]$, to istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, o wierzchołkach $v^1, \ldots, v^{n+1}$, oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\{L_{\pi_i}(v^i) : i \in [n+1]\} = [n+1]$.

Triangulacja regularna

Ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $T := K^n_m(\Delta^n)$, $V_T := V^n_m(\Delta^n)$. Załóżmy, że $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- Jeśli funkcja $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$ spełnia warunek: dla $v \in \Delta^n_i \cap V_T$, $L_k(v) \neq i$, $i, k \in [n+1]$, to istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, o wierzchołkach $v^1, \ldots, v^{n+1}$, oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\{L_{\pi_i}(v^i) : i \in [n+1]\} = [n+1]$.
- Wtedy

Triangulacja regularna

Ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $T := K^n_m(\Delta^n)$, $V_T := V^n_m(\Delta^n)$. Załóżmy, że $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- Jeśli funkcja $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$ spełnia warunek: dla $v \in \Delta^n_i \cap V_T$, $L_k(v) \neq i$, $i, k \in [n+1]$, to istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, o wierzchołkach $v^1, \ldots, v^{n+1}$, oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\{L_{\pi_i}(v^i) : i \in [n+1]\} = [n+1]$.
- Wtedy
  - (a) istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, o wierzchołkach $\{v^1, \ldots, v^{n+1}\}$, oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\#\{L_{\pi_i}(v^i) : i \in [n+1]\} = n+1$ lub

Triangulacja regularna

Ustalmy $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $T := K_m^n(\Delta^n)$, $V_T := V_m^n(\Delta^n)$. Załóżmy, że $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- Jeśli funkcja $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$ spełnia warunek: dla $v \in \Delta_i^n \cap V_T$, $L_k(v) \neq i$, $i, k \in [n+1]$, to istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, o wierzchołkach $v^1, \ldots, v^{n+1}$, oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\{L_{\pi_i}(v^i) : i \in [n+1]\} = [n+1]$.
- Wtedy
  - (a) istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, o wierzchołkach $\{v^1, \ldots, v^{n+1}\}$, oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\#\{L_{\pi_i}(v^i) : i \in [n+1]\} = n+1$ lub
  - (b) istnieją takie ciągi $v^1, v^2, \ldots, v^q \in V_T$ oraz $j_1, \ldots, j_q \in [n+1]$, $q \in \mathbb{N}$, że $L_{j_1}(v^1) = \ldots = L_{j_q}(v^q)$, $\langle v^j, v^{j+1} \rangle$ jest krawędzią pewnego sympleksu T, $j \in [q-1]$, oraz dla każdego $i \in [n+1]$ istnieje taki indeks $j \in [q]$, że $v^j \in \Delta_i^n$. Ponadto $j_k \neq j_{k+1}$, $k \in [q-1]$.

Triangulacje dowolne

Niech T będzie dowolną triangulacją sympleksu Δ^n z wierzchołkami V_T, $n \in \mathbb{N}$.
Załóżmy, że dana jest funkcja $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

Triangulacje dowolne

Niech T będzie dowolną triangulacją sympleksu Δ^n z wierzchołkami V_T, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dana jest funkcja $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- (twierdzenie Bapata - wersja słaba) Jeśli funkcja L spełnia warunek: $v \in \Delta^n_i \cap V_T$ pociąga $L_k(v) \neq i$, $i, k \in [n+1]$. Istnieje wtedy taki sympleks $\sigma \in T$, funkcja $h : [n+1] \to vert(\sigma)$ oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\{L_{\pi_i}(h(i)) : \ i \in [n+1]\} = [n+1]$.

Triangulacje dowolne

Niech T będzie dowolną triangulacją sympleksu Δ^n z wierzchołkami V_T, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dana jest funkcja $(L_1, \dots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- (twierdzenie Bapata - wersja słaba) Jeśli funkcja L spełnia warunek: $v \in \Delta_i^n \cap V_T$ pociąga $L_k(v) \neq i$, $i, k \in [n+1]$. Istnieje wtedy taki sympleks $\sigma \in T$, funkcja $h : [n+1] \to vert(\sigma)$ oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\{L_{\pi_i}(h(i)) : i \in [n+1]\} = [n+1]$.
- Wtedy

Triangulacje dowolne

Niech T będzie dowolną triangulacją sympleksu Δ^n z wierzchołkami V_T, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dana jest funkcja $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- (twierdzenie Bapata - wersja słaba) Jeśli funkcja L spełnia warunek: $v \in \Delta^n_i \cap V_T$ pociąga $L_k(v) \neq i$, $i, k \in [n+1]$. Istnieje wtedy taki sympleks $\sigma \in T$, funkcja $h : [n+1] \to vert(\sigma)$ oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\{L_{\pi_i}(h(i)) : i \in [n+1]\} = [n+1]$.
- Wtedy
    (a) istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, permutacja π zbioru $[n+1]$ oraz funkcja $h : [n+1] \to vert(\sigma)$, że $\#\{L_{\pi_i}(h(i)) : i \in [n+1]\} = n+1$, lub

Triangulacje dowolne

Niech T będzie dowolną triangulacją sympleksu Δ^n z wierzchołkami V_T, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dana jest funkcja $(L_1, \ldots, L_{n+1}) = L : V_T \to [n+1]^{n+1}$.

- (twierdzenie Bapata - wersja słaba) Jeśli funkcja L spełnia warunek: $v \in \Delta^n_i \cap V_T$ pociąga $L_k(v) \neq i$, $i, k \in [n+1]$. Istnieje wtedy taki sympleks $\sigma \in T$, funkcja $h : [n+1] \to vert(\sigma)$ oraz permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\{L_{\pi_i}(h(i)) : i \in [n+1]\} = [n+1]$.
- Wtedy
  - (a) istnieje taki sympleks $\sigma \in T$, permutacja π zbioru $[n+1]$ oraz funkcja $h : [n+1] \to vert(\sigma)$, że $\#\{L_{\pi_i}(h(i)) : i \in [n+1]\} = n+1$, lub
  - (b) istnieją takie ciągi $v^1, v^2, \ldots, v^q \in V_T$ oraz $j_1, \ldots, j_q \in [n+1]$, $q \in \mathbb{N}$, że $L_{j_1}(v^1) = \ldots = L_{j_q}(v^q)$, przy czym albo $\langle v^j, v^{j+1} \rangle$ jest krawędzią pewnego sympleksu z triangulacji T, albo $v^j = v^{j+1}$, $j \in [q-1]$, oraz dla każdego $i \in [n+1]$ istnieje taki indeks $j \in [q]$, że $v^j \in \Delta^n_i$. Ponadto $j_k \neq j_{k+1}$, $k \in [q-1]$.

Pokrycia sympleksu

- (lemat Gale'a [3]) Dla $i \in [n+1]$ oznaczmy przez $C^i = \{C^i_j \subset \Delta^n : j \in [n+1]\}$ takie pokrycie domknięte (otwarte) sympleksu Δ^n, że $\left\langle e^j : j \in S \right\rangle \subset \bigcup_{j \in S} C^i_j$ dla $S \subset [n+1]$. Wtedy istnieje taka permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\bigcap_{i \in [n+1]} C^i_{\pi_i} \neq \emptyset$.

Pokrycia sympleksu

- (lemat Gale'a [3]) Dla $i \in [n+1]$ oznaczmy przez $C^i = \{C^i_j \subset \Delta^n : j \in [n+1]\}$ takie pokrycie domknięte (otwarte) sympleksu Δ^n, że $\left\langle e^j : j \in S \right\rangle \subset \bigcup_{j\in S} C^i_j$ dla $S \subset [n+1]$. Wtedy istnieje taka permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\bigcap_{i\in[n+1]} C^i_{\pi_i} \neq \emptyset$.
- Niech U_i, $i \in [n+1]$, będzie otwartym (domkniętym) pokryciem sympleksu Δ^n, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

Pokrycia sympleksu

- (lemat Gale'a [3]) Dla $i \in [n+1]$ oznaczmy przez $C^i = \{C^i_j \subset \Delta^n : j \in [n+1]\}$ takie pokrycie domknięte (otwarte) sympleksu Δ^n, że $\left\langle e^j : j \in S \right\rangle \subset \bigcup_{j \in S} C^i_j$ dla $S \subset [n+1]$. Wtedy istnieje taka permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\bigcap_{i \in [n+1]} C^i_{\pi_i} \neq \emptyset$.
- Niech U_i, $i \in [n+1]$, będzie otwartym (domkniętym) pokryciem sympleksu Δ^n, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy
  (a) $\bigcap_{i \in [n+1]} U_i \neq \emptyset$ lub

Pokrycia sympleksu

- (lemat Gale'a [3]) Dla $i \in [n+1]$ oznaczmy przez $C^i = \{C^i_j \subset \Delta^n : j \in [n+1]\}$ takie pokrycie domknięte (otwarte) sympleksu Δ^n, że $\left\langle e^j : j \in S \right\rangle \subset \bigcup_{j \in S} C^i_j$ dla $S \subset [n+1]$. Wtedy istnieje taka permutacja π zbioru $[n+1]$, że $\bigcap_{i \in [n+1]} C^i_{\pi_i} \neq \emptyset$.
- Niech U_i, $i \in [n+1]$, będzie otwartym (domkniętym) pokryciem sympleksu Δ^n, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy
  (a) $\bigcap_{i \in [n+1]} U_i \neq \emptyset$ lub
  (b) istnieje $i \in [n+1]$ oraz domknięty spójny zbiór $F \subset U_i$ łączący ściany sympleksu Δ^n, tj. $F \cap \Delta^n_j \neq \emptyset$, $j \in [n+1]$.

Literatura

[1] R.B. Bapat, *A constructive proof of a permutation-based generalization of Sperner's lemma*, Mathematical Programming 44, 1989, 113–120

[2] R.B. Bapat, *Sperner's Lemma with Multiple Labels*, w: Modeling, computation and optimization (red. S.K. Neogy, A.K. Das, R.B. Bapat), World Scientific, 2009

[3] D. Gale, *Equilibrium in a Discrete Exchange Economy with Money*, International Journal of Game Theory 13, 1984, 61–64

[4] F. Su, *Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division*, Amererican Mathematical Monthly 106, 1999, 930–942