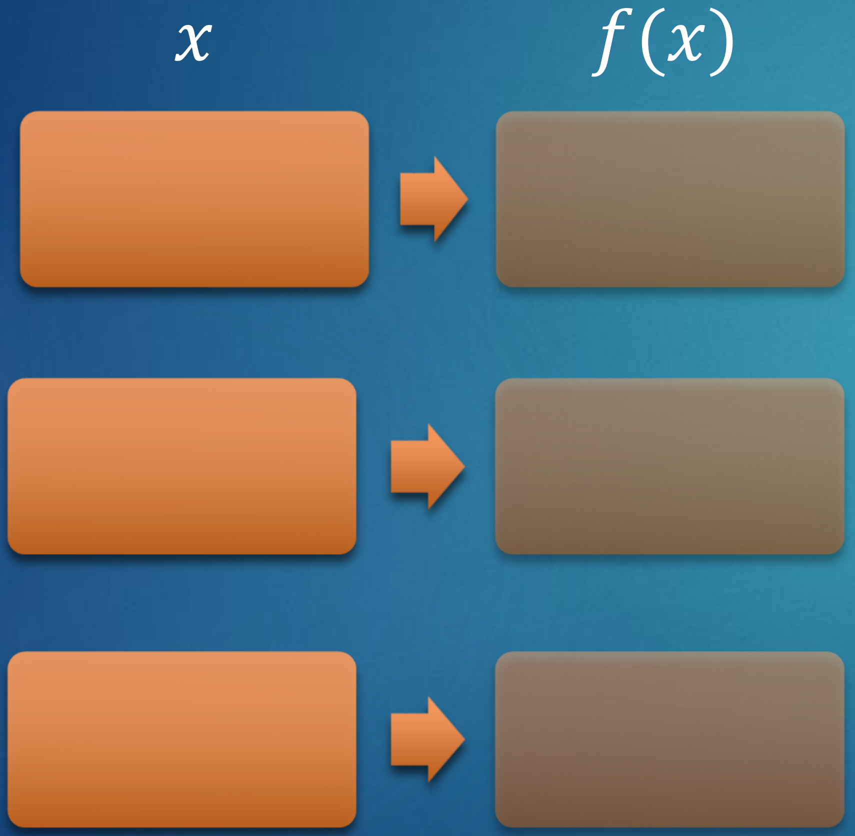
ITERACJE

czyli o tym jak rosną fraktale

MAGDALENA NOWAK
UNIWERSYTET JANA KOCHANOWSKIEGO W KIELCACH

Iterowanie



Iterowanie

x		$f(x)$
1	→	2
3	→	6
5	→	10

Iterowanie

x		$f(x)$
1	$\rightarrow$	2
3	$\rightarrow$	6
5	$\rightarrow$	10

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

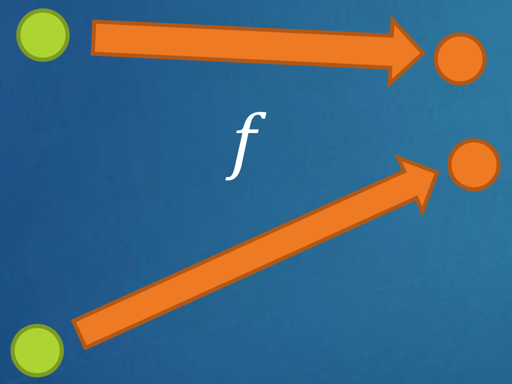
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$

Iterowanie

x	$f(x)$
1	2
3	6
5	10

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

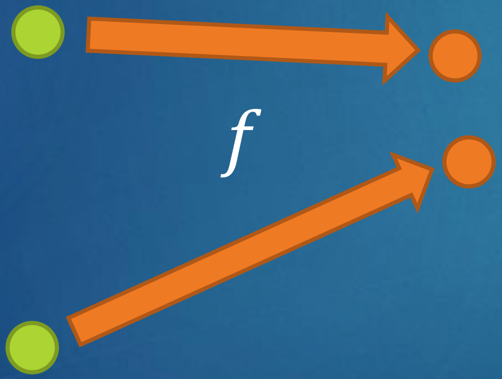
1 → 2 → 4 → 8



f

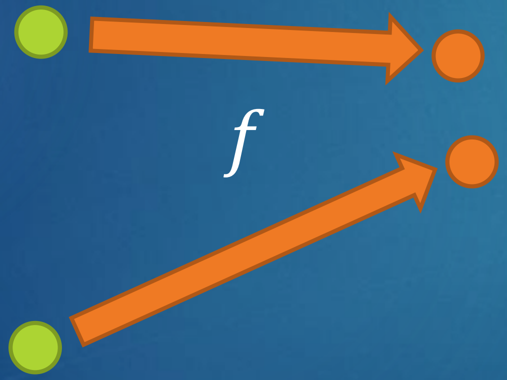
Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Funkcja zwężająca f na przestrzeni zupełnej ma dokładnie jeden punkt stały. Jest on granicą dowolnego ciągu postaci $x_{n+1} = f(x_n)$.



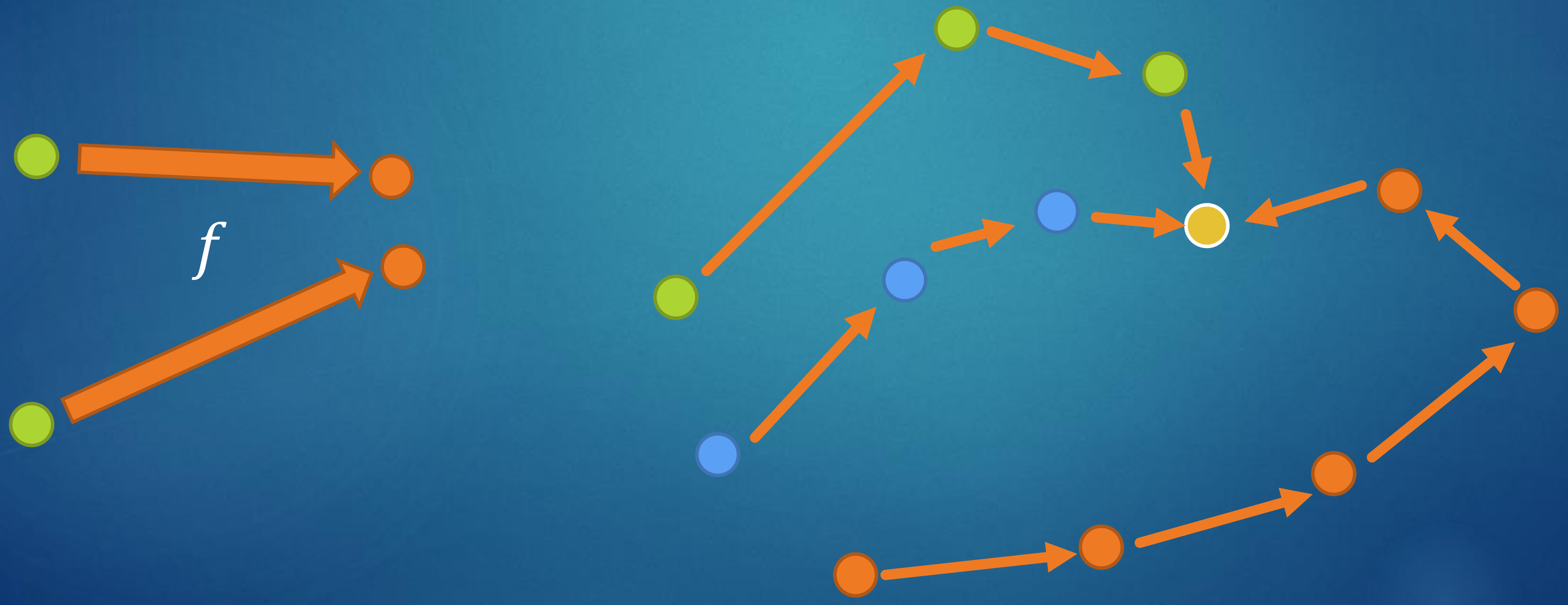
Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Funkcja zwężająca f na przestrzeni zupełnej ma dokładnie jeden punkt stały. Jest on granicą dowolnego ciągu postaci $x_{n+1} = f(x_n)$.



Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Funkcja zwężająca f na przestrzeni zupełnej ma dokładnie jeden punkt stały. Jest on granicą dowolnego ciągu postaci $x_{n+1} = f(x_n)$.



IFS

ITEROWANE UKŁADY FUNKCYJNE

Iterowane układy funkcyjne

IFS: $f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje zwężające

Iterowane układy funkcyjne

IFS: $f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje zwężające

A – zwarty podzbiór przestrzeni

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A)$$

Iterowane układy funkcyjne

IFS: $f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje zwężające

A – zwarty podzbiór przestrzeni

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \cdots \cup f_n(A)$$

Iterowane układy funkcyjne

IFS: $f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje zwężające

A – zwarty podzbiór przestrzeni

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A)$$

Atraktor IFS:

$$F(A) = A$$

$$f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = A$$

Iterowane układy funkcyjne

IFS: $f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje zwężające

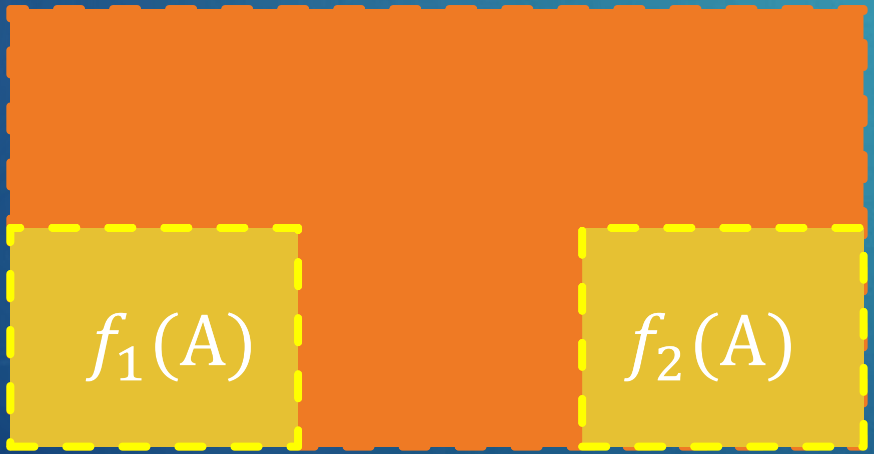
A – zwarty podzbiór przestrzeni

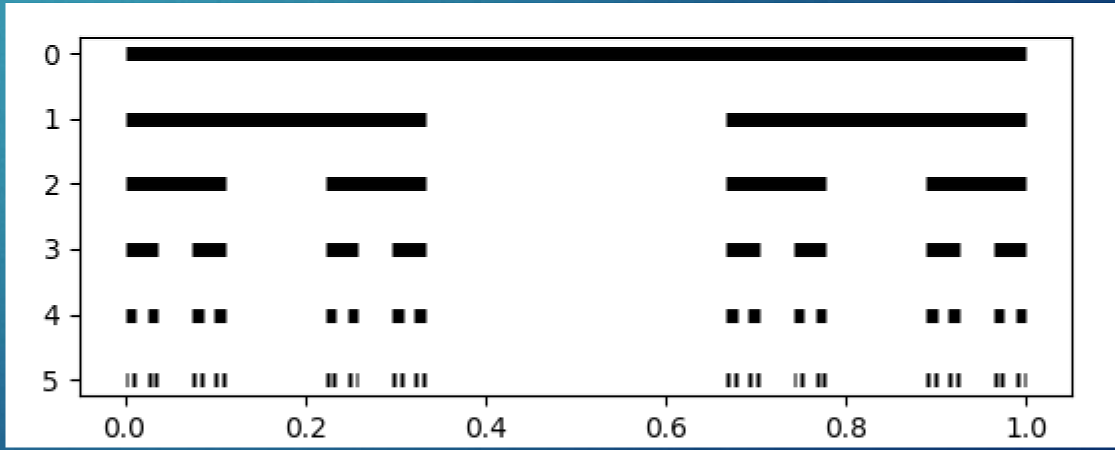
$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A)$$

Atraktor IFS:

$$F(A) = A$$

$$f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = A$$



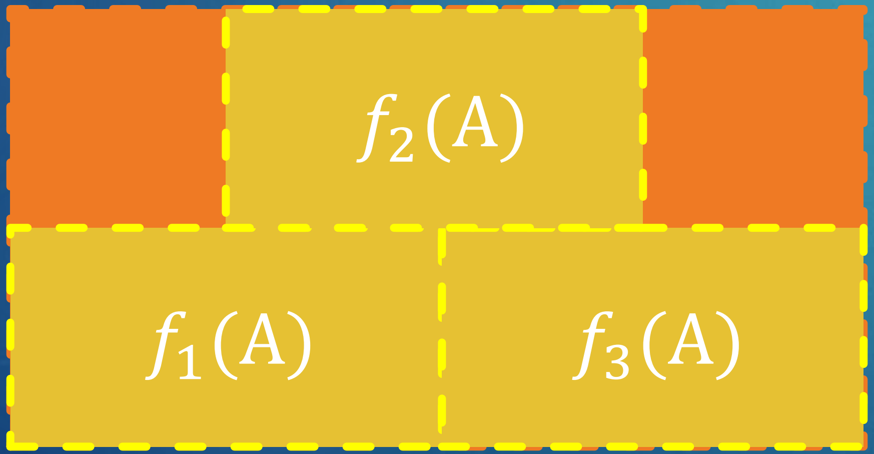


Iterowane układy funkcyjne

IFS: $f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje zwężające

A – zwarty podzbiór przestrzeni

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A)$$



Atraktor IFS:

$$F(A) = A$$

$$f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A) = A$$

Iterowane układy funkcyjne

IFS: $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - funkcje zwężające

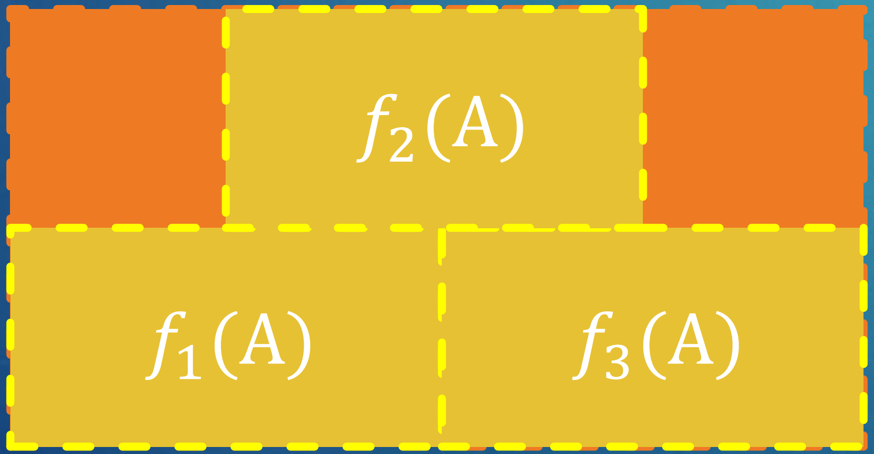
A – zwarty podzbiór przestrzeni

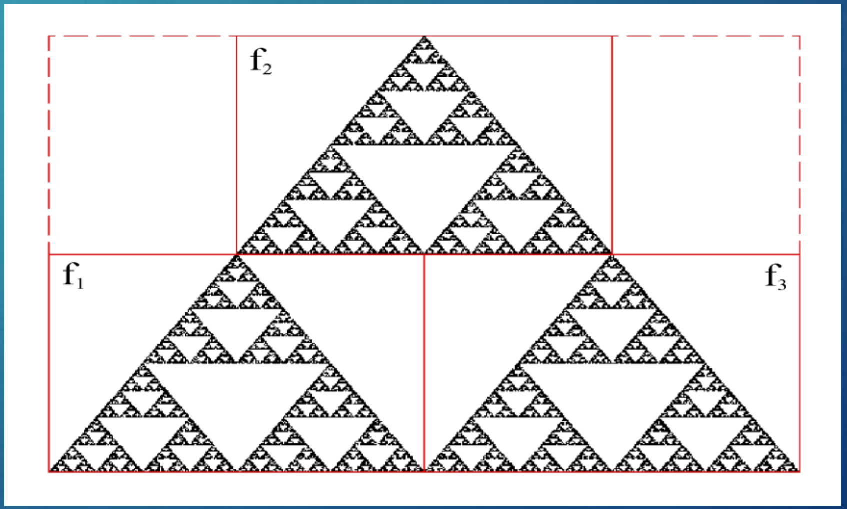
$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \cdots \cup f_n(A)$$

Atraktor IFS:

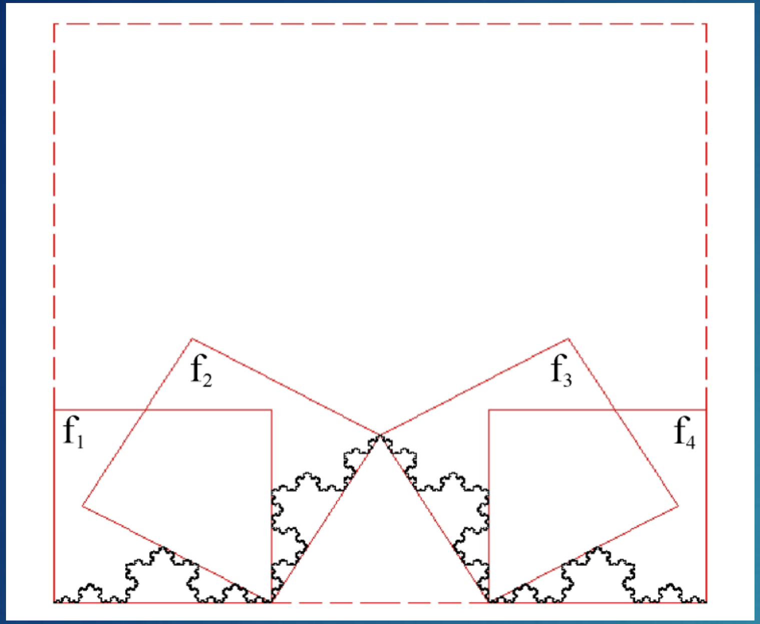
$$F(A) = A$$

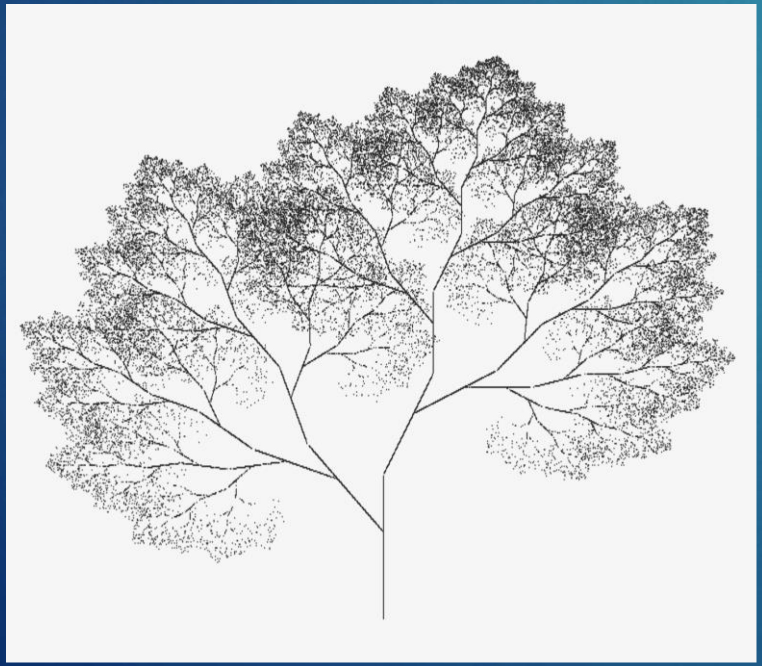
$$f_1(A) \cup f_2(A) \cup \cdots \cup f_n(A) = A$$

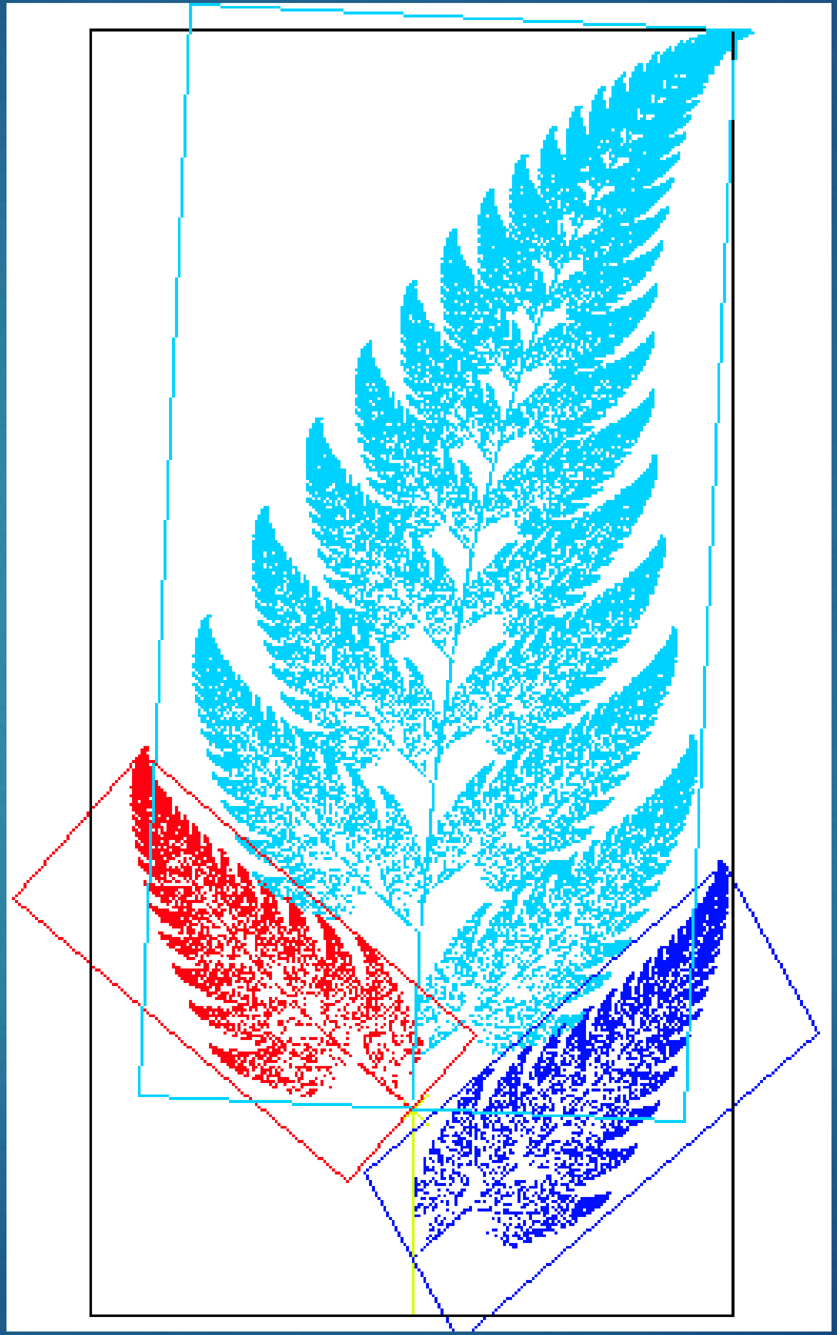


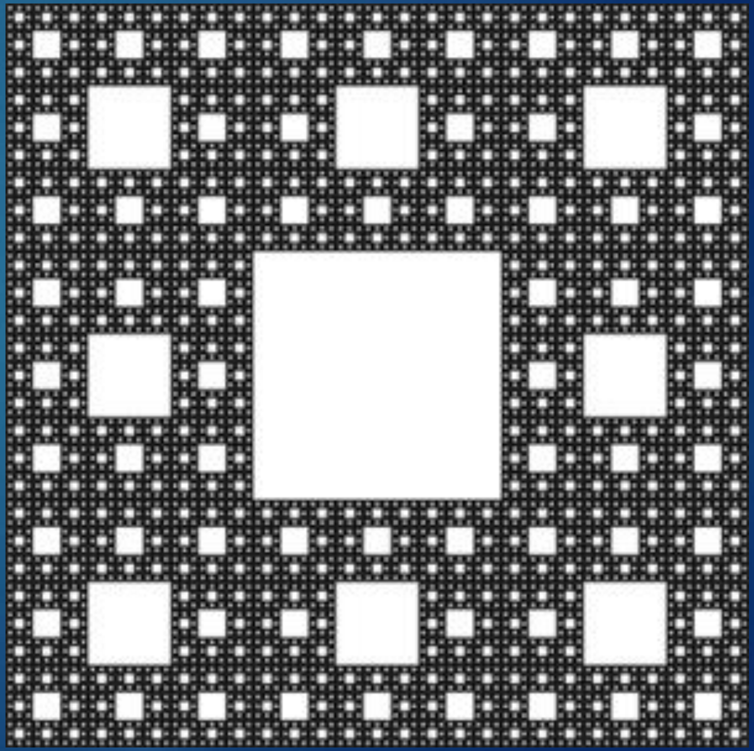


Samopodobne fraktale









Analogie

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Funkcja zwężająca f na przestrzeni zupełnej ma dokładnie jeden punkt stały. Jest on granicą dowolnego ciągu postaci $x_{n+1} = f(x_n)$.

Twierdzenie o istnieniu atraktora

Każdy IFS na przestrzeni zupełnej ma dokładnie jeden atraktor. Jest on granicą dowolnego ciągu postaci $A_{n+1} = F(A_n)$.

Analogie

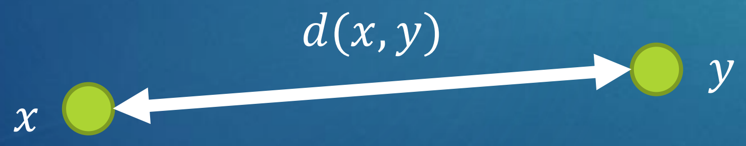
Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Funkcja zwężająca f na przestrzeni zupełnej ma dokładnie jeden punkt stały. Jest on granicą dowolnego ciągu postaci $x_{n+1} = f(x_n)$.

Twierdzenie o istnieniu atraktora

Każdy IFS na przestrzeni zupełnej ma dokładnie jeden atraktor. Jest on granicą dowolnego ciągu postaci $A_{n+1} = F(A_n)$.

Metryka

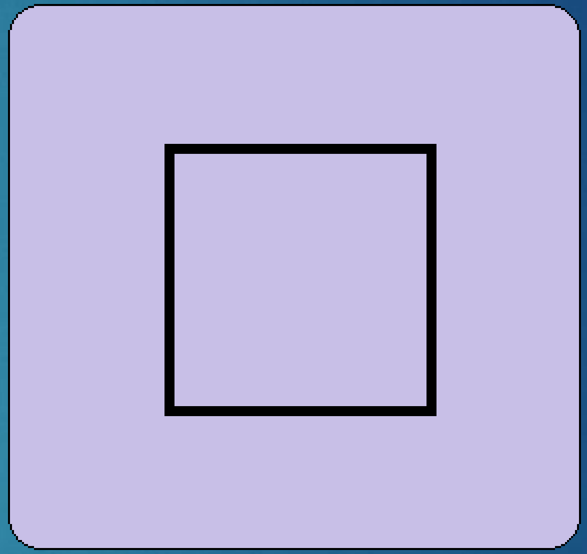


Metryka Hausdorffa

Metryka Hausdorffa

$$A_\delta = \bigcup_{a \in A} K(a, \delta)$$

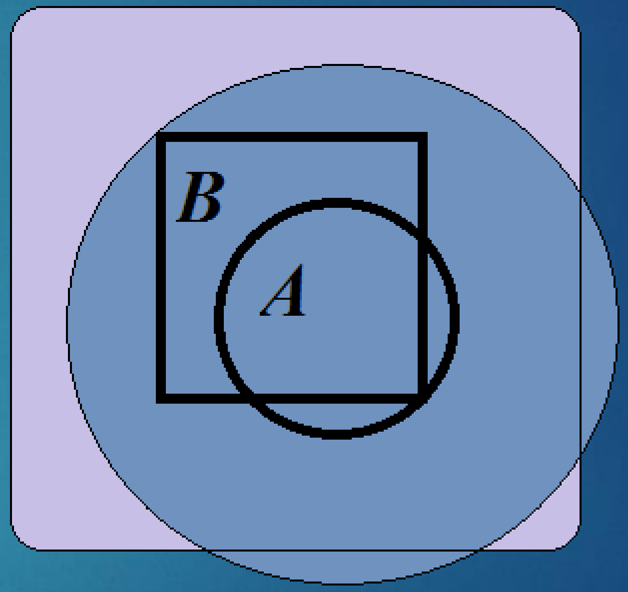
$$d_H(A, B) = \inf\{\delta : B \subset A_\delta, A \subset B_\delta\}$$

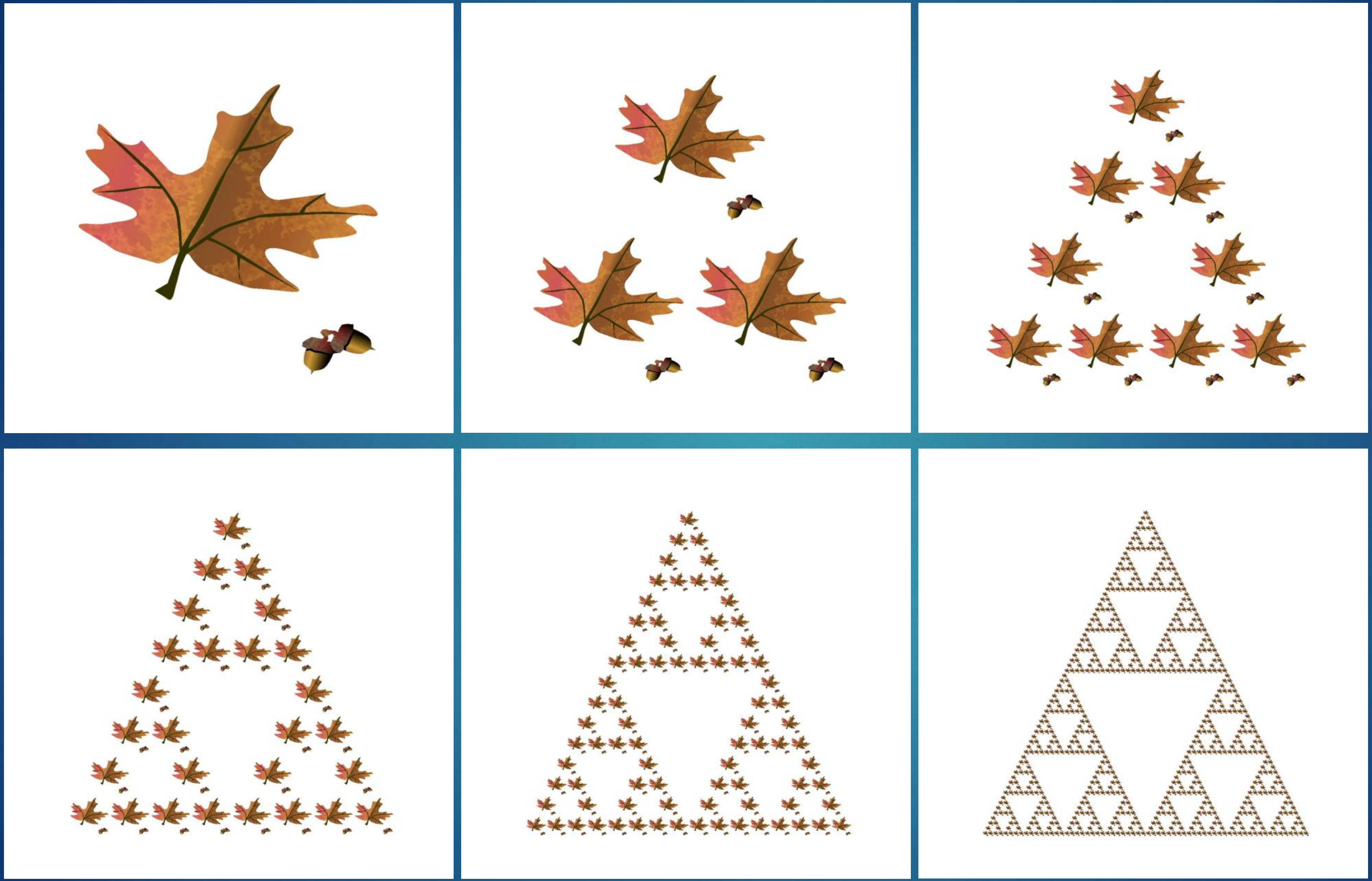


Metryka Hausdorffa

$$A_\delta = \bigcup_{a \in A} K(a, \delta)$$

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta : B \subset A_\delta, A \subset B_\delta\}$$





Nieważny jest obraz początkowy

Inne analogie

IFS

X - przestrzeń metryczna

$f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje zwężające (kontrakcje)

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha \cdot d(x, y)$$

Słaby IFS

X - przestrzeń metryczna

$f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje nierozszerzające (słabe kontrakcje)

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$$

Topologiczny IFS

X - przestrzeń topologiczna Hausdorffa

$f_1, f_2, \dots, f_n$ - funkcje ciągłe takie, że dla dowolnego pokrycia otwartego przestrzeni X istnieje taka liczba m, że dla dowolnych $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_m}$ obraz $f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_m}(X)$ zawiera się w jakimś zbiorze z pokrycia

Inne analogie

IFS	Słaby IFS	Topologiczny IFS
X - przestrzeń metryczna	X - przestrzeń metryczna	X - przestrzeń topologiczna Hausdorffa
$f_1, f_2, \ldots, f_n$ - funkcje zwężające (kontrakcje) $d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x,y)$	$f_1, f_2, \ldots, f_n$ - funkcje nierozszerzające (słabe kontrakcje) $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$	$f_1, f_2, \ldots, f_n$ - funkcje ciągłe takie, że dla dowolnego pokrycia otwartego przestrzeni X istnieje taka liczba m, że dla dowolnych $f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_m}$ obraz $f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_m}(X)$ zawiera się w jakimś zbiorze z pokrycia
Warunek wystarczający na istnienie atraktora		
Gdy X **jest zupełna** to istnieje jedyny atraktor.	Gdy X **jest zwarta** to istnieje jedyny atraktor.	Gdy **dla każdego zwartego** $\mathrm{K} \subset X$ **istnieje zwarty** $\mathrm{H} \supset \mathrm{K}$ **taki, że** $F(H) \subset H$ to w X istnieje jedyny atraktor.

L-systemy

SYSTEMY LINDENMAYERA

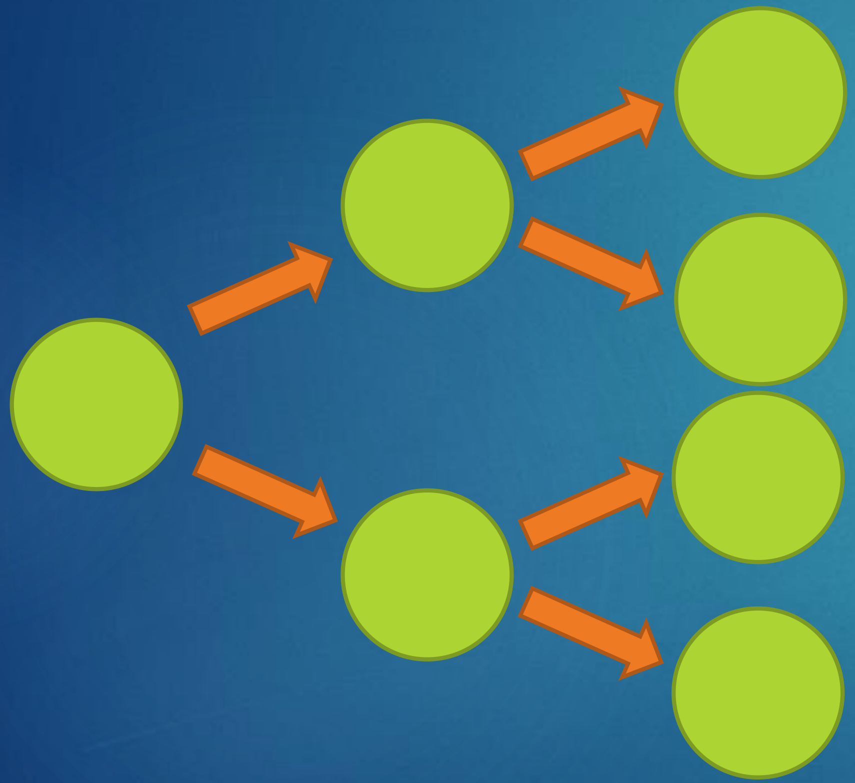
Aristrid Lindenmayer (1925-1989)

Rozwój organizmu może […] być rozpatrywany jako wykonywanie „programu rozwoju” znajdującego się w zapłodnionym jaju.

Aristid Lindenmayer, Grzegorz Rozenberg

Wzrost i rozmnażanie

Mitoza



Rozgałęzienia

- Źródło: www.wrota-swietokrzyskie.pl

Nić glonu sinicy z gatunku *Anabaena catenula*

L-system: Algi

Zmienne: A, B

Aksjomat: A

Reguły:

$$B \rightarrow A$$
$$A \rightarrow AB$$

L-system: Algi

Zmienne: A, B

Aksjomat: A

Reguły:

$$B \rightarrow A$$
$$A \rightarrow AB$$

Iteracje:

A
AB
ABA
$ABAAB$
$ABAABABA$
$ABAABABAABAAB$
$ABAABABAABAABABAABABA$
…

L-system: Algi

Zmienne: A, B

Aksjomat: A

Reguły:

$$B \rightarrow A$$
$$A \rightarrow AB$$

Iteracje:

A
AB
ABA
$ABAAB$
$ABAABABA$
$ABAABABAABAAB$
$ABAABABAABAABABAABABA$
…

1. Alfabet (zmienne i stałe)
2. Aksjomat
3. Reguły produkcji

L-system: Algi

Zmienne: A, B

Aksjomat: A

Reguły:

$$B \to A$$
$$A \to AB$$

Iteracje:

A
AB
ABA
$ABAAB$
$ABAABABA$
$ABAABABAABAAB$
$ABAABABAABAABABAABABA$
…

1. Alfabet (zmienne i stałe)
2. Aksjomat
3. Reguły produkcji

L-systemy

- Kontekstowe
- Bezkontekstowe

L-systemy

- Deterministyczne
- Stochastyczne

L-system:

Zmienne: A, B

Aksjomat: A

Reguły:

$$B \rightarrow BBB$$
$$A \rightarrow ABA$$

Iteracje:

$$A$$
$$ABA$$
$$ABABBBABA$$

L-system:

Zmienne: A, B

Aksjomat: A

Reguły:

$$B \rightarrow BBB$$
$$A \rightarrow ABA$$

Iteracje:

$$A$$
$$ABA$$
$$ABABBBABA$$
$$ABABBBABABBBBBBBBBABABBBABA$$
$$ABABBBABABBBBBBBBBABABBBABABBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBABABBBABABBBBBBBBBABABBBABA$$

L-system:

Zmienne: A, B

Aksjomat: A

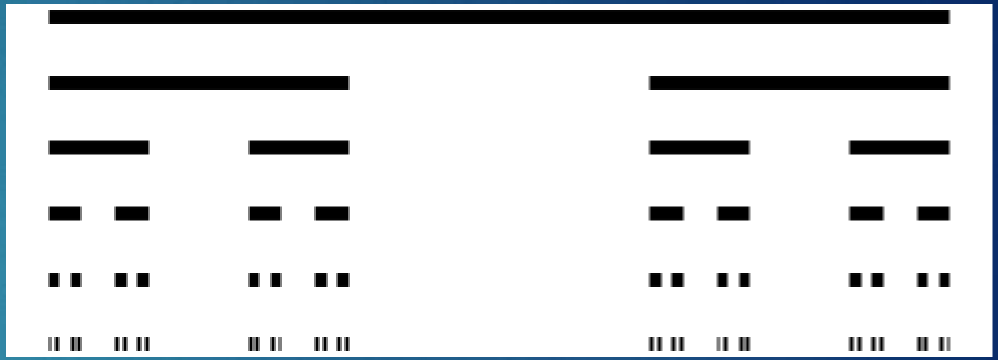
Reguły:

$$B \rightarrow BBB$$
$$A \rightarrow ABA$$

Iteracje:

$$A$$
$$ABA$$
$$ABABBBABA$$
$$ABABBBABABBBBBBBBBABABBBABA$$
$$ABABBBABABBBBBBBBBABABBBABABBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBABABBBABABBBBBBBBBABABBBABA$$

L-system: Zbiór Cantora



Zmienne: A, B

Aksjomat: A

Reguły:

$$B \rightarrow BBB$$
$$A \rightarrow ABA$$

Iteracje:

$$A$$
$$ABA$$
$$ABABBBABA$$
$$ABABBBABABBBBBBBBBABABBBABA$$
$$ABABBBABABBBBBBBBBABABBBABABBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBABABBBABABBBBBBBBBABABBBABA$$

L-system: Krzywa Kocha

Zmienne: F

Stałe: $+, -$

Aksjomat: F

Reguły:

$$F \rightarrow F + F - -F + F$$

Iteracje:

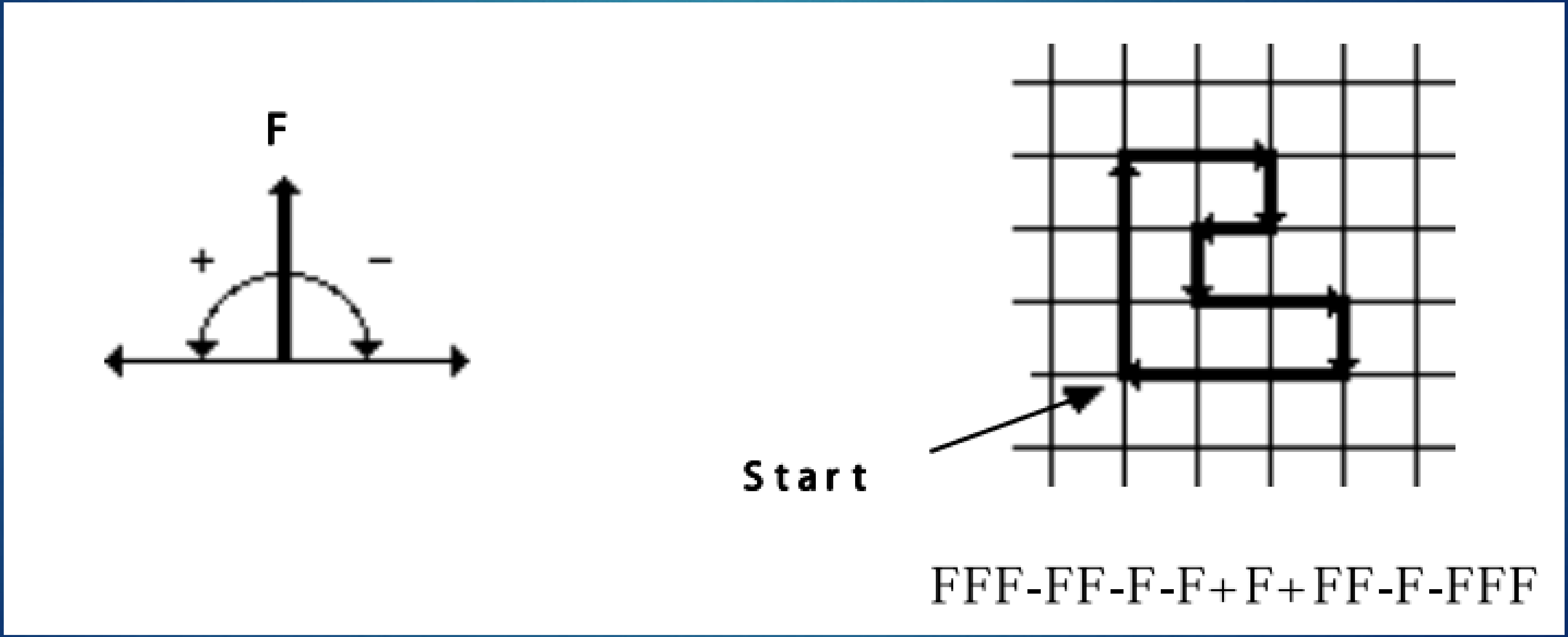
$$F$$

$$F + F - -F + F$$

$$F + F - -F + F + F + F - -F + F - -F + F - -F + F + F + F - -F + F$$

$$\ldots$$

Interpretacja w grafice żółwia



L-system: Krzywa Kocha

Zmienne: F

Stałe: $+, -$

Kąt: 45°

Aksjomat: $- -F$

Reguły:

$$F \rightarrow F + F - -F + F$$

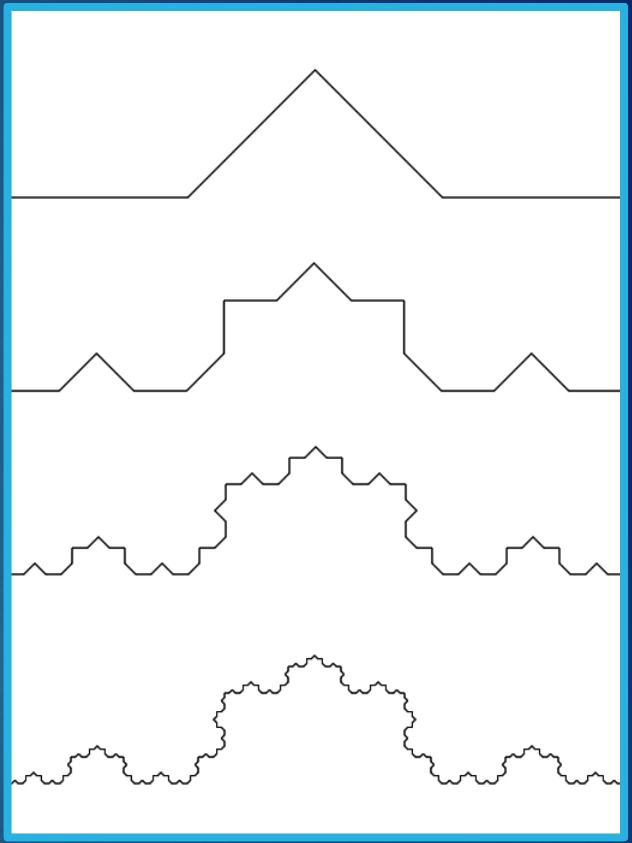
Iteracje:

$$- -F$$

$$- -F + F - -F + F$$

$$- -F + F - -F + F +F + F - -F + F - -F + F - -F + F + F + F - -F + F$$

$$\ldots$$



L-system: Drzewo binarne

Zmienne: F, X

Stałe: $+, -, [,]$

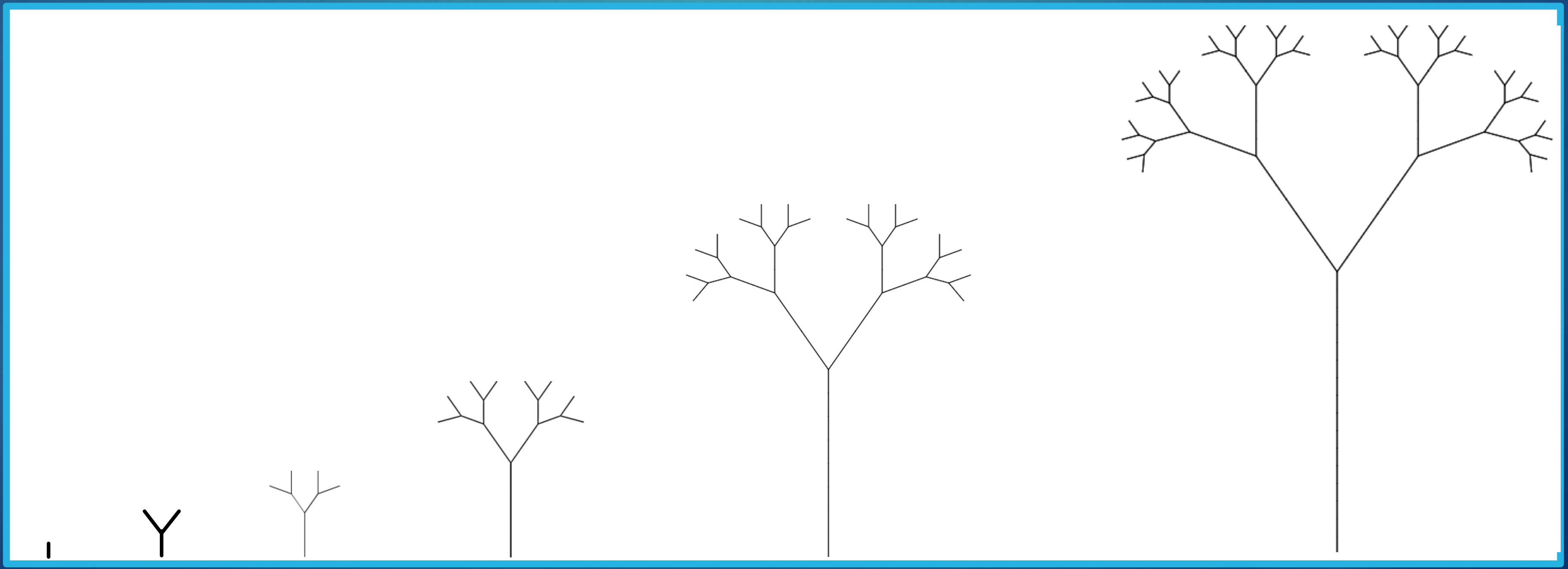
Kąt: $35°$

Aksjomat: X

Reguły:
$$F \to FF$$
$$X \to F[+X] - X$$

Iteracje:

$$X$$
$$F[+X] - X$$
$$FF[+F[+X] - X] - F[+X] - X$$
$$FF[+FF[+F[+X] -] - F[+X] - X] - FF[+F[+X] - X] - F[+X] - X$$
$$\ldots$$



L-system: Smok Heighwaya

Zmienne: X, Y

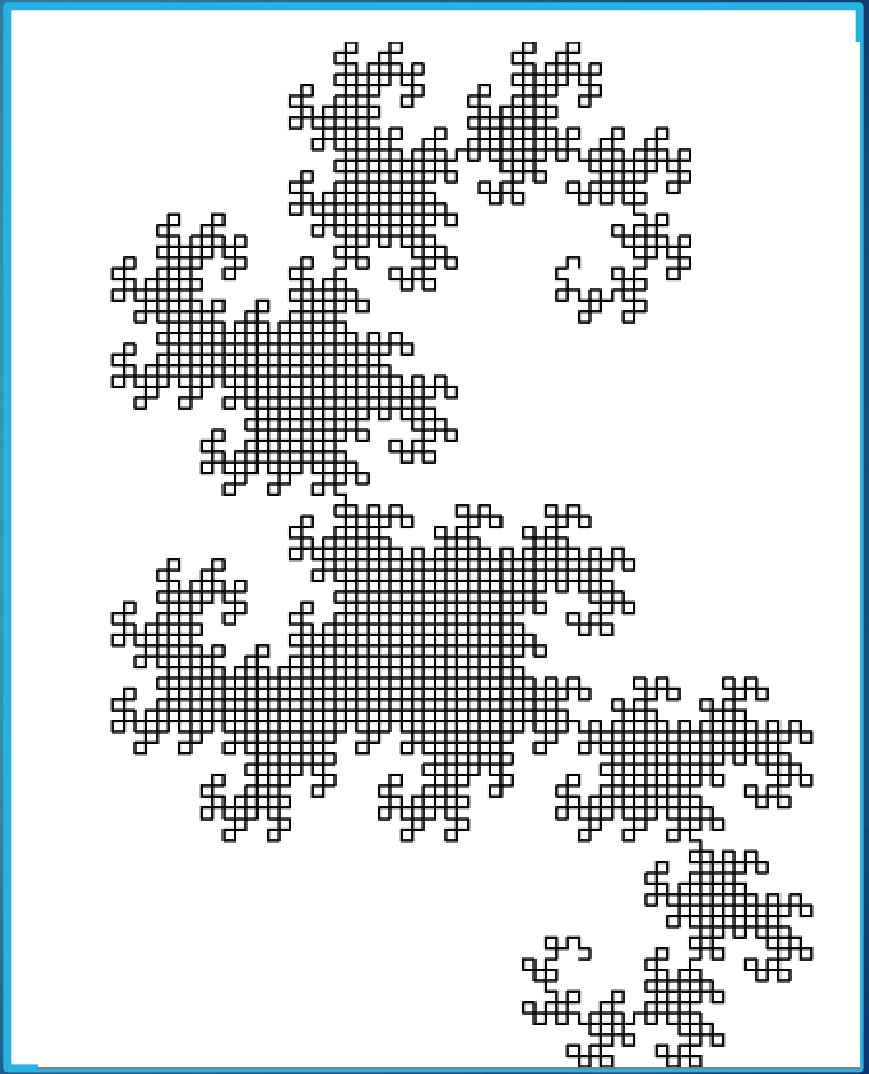
Stałe: $+, -, F$

Kąt: 90°

Aksjomat: FX

Reguły: $X \rightarrow X + YF$

$$Y \rightarrow FX - Y$$



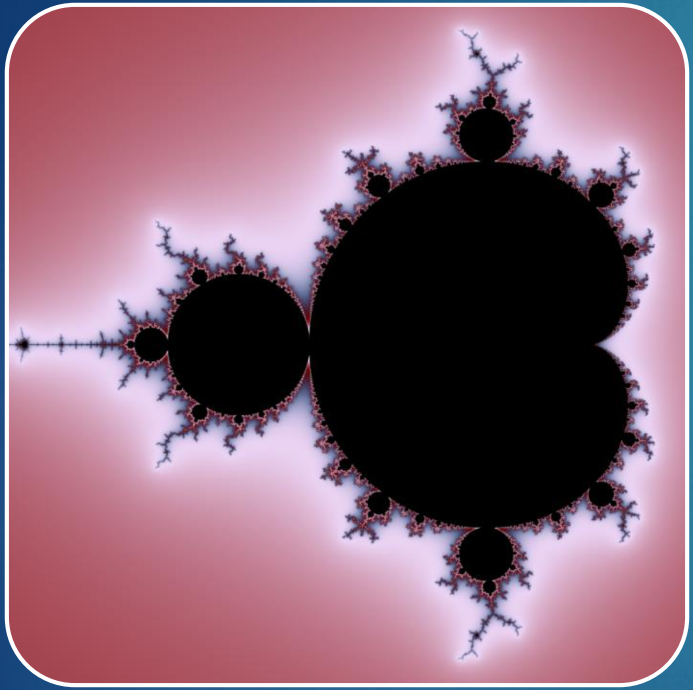
Inne:

- http://www.kevs3d.co.uk/dev/lsystems/#

Algorytmy oparte na iteracjach

ZBIÓR MANDELBROTA, ZBIORY JULII, FRAKTALE NEWTONA

Zbiór Mandelbrota



$z_0 = 0$
c - zmienny

Zbiór Mandelbrota powstaje dzięki rozważaniu na płaszczyźnie zespolonej orbity zera dla odwzorowania

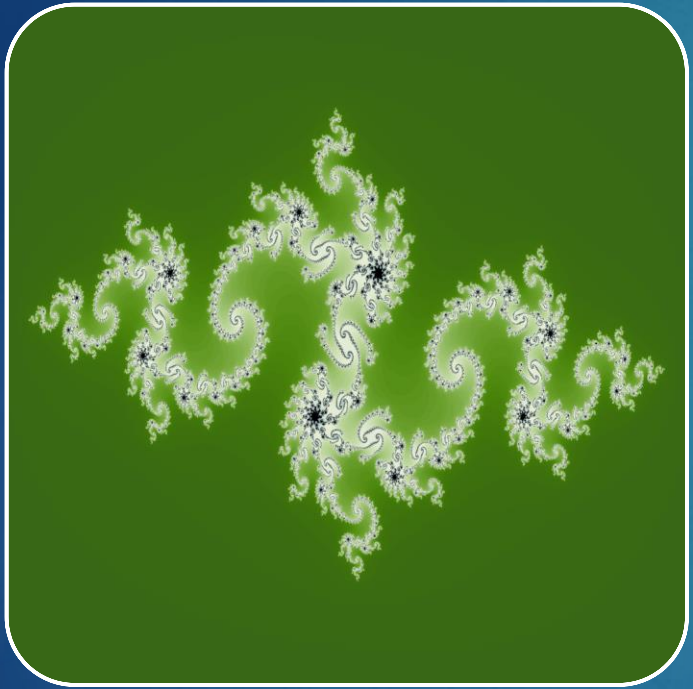
$$f_c(x) = x^2 + c,$$

zależnego od zespolonego parametru c.

$$z_0 = 0 \qquad z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

W zależności od wartości parametru c ciąg $\{z_0, z_1, z_2, \ldots\}$ może być ograniczony lub zbieżny do nieskończoności. Zbiór Mandelbrota na płaszczyźnie zespolonej zawiera te parametry, dla których orbita zera pozostaje ograniczona.

Zbiory Julii



Zbiory Julii tworzone są również przez rozważanie ciągu

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

ale o innym wyrazie początkowym. Do zbioru Julii o parametrze c należą punkty z_0 których orbity dla funkcji $f_c(x) = x^2 + c$ są ograniczone.

c - ustalony
z_0- zmienny

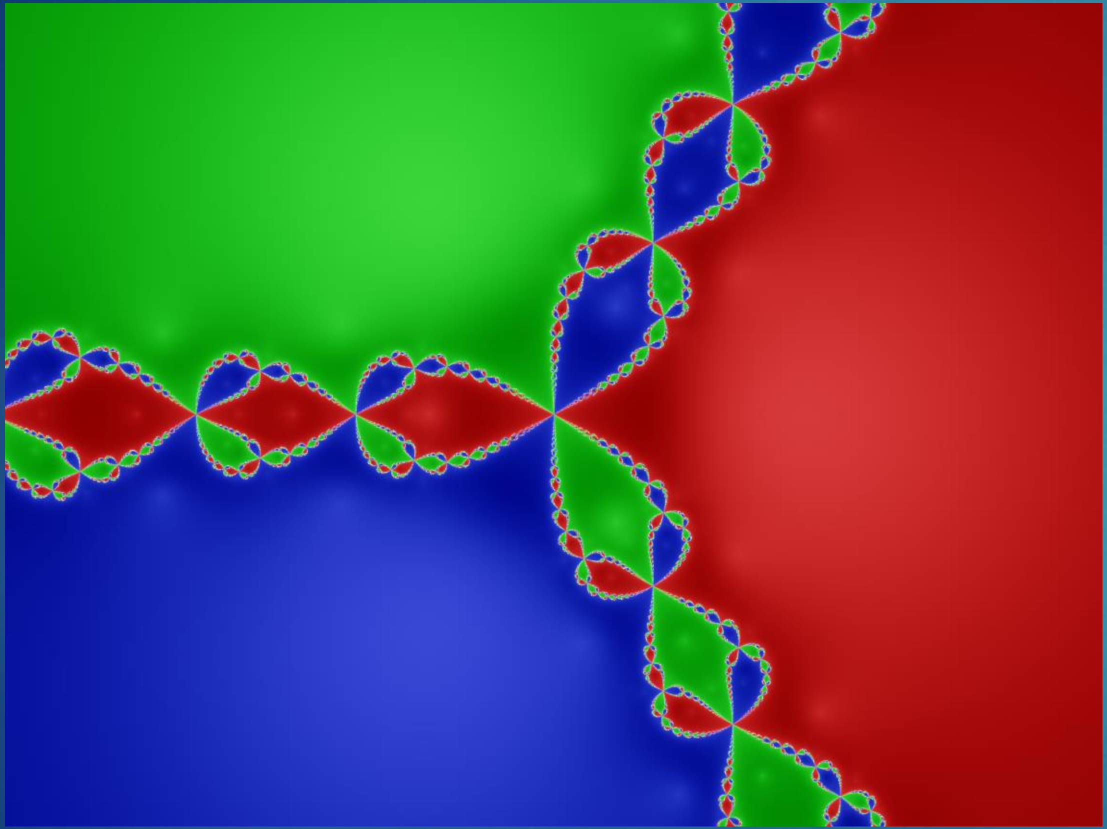
Fraktale Newtona

Fraktal Newtona powstaje przez badanie tzw. basenów przyciągania pierwiastków równania

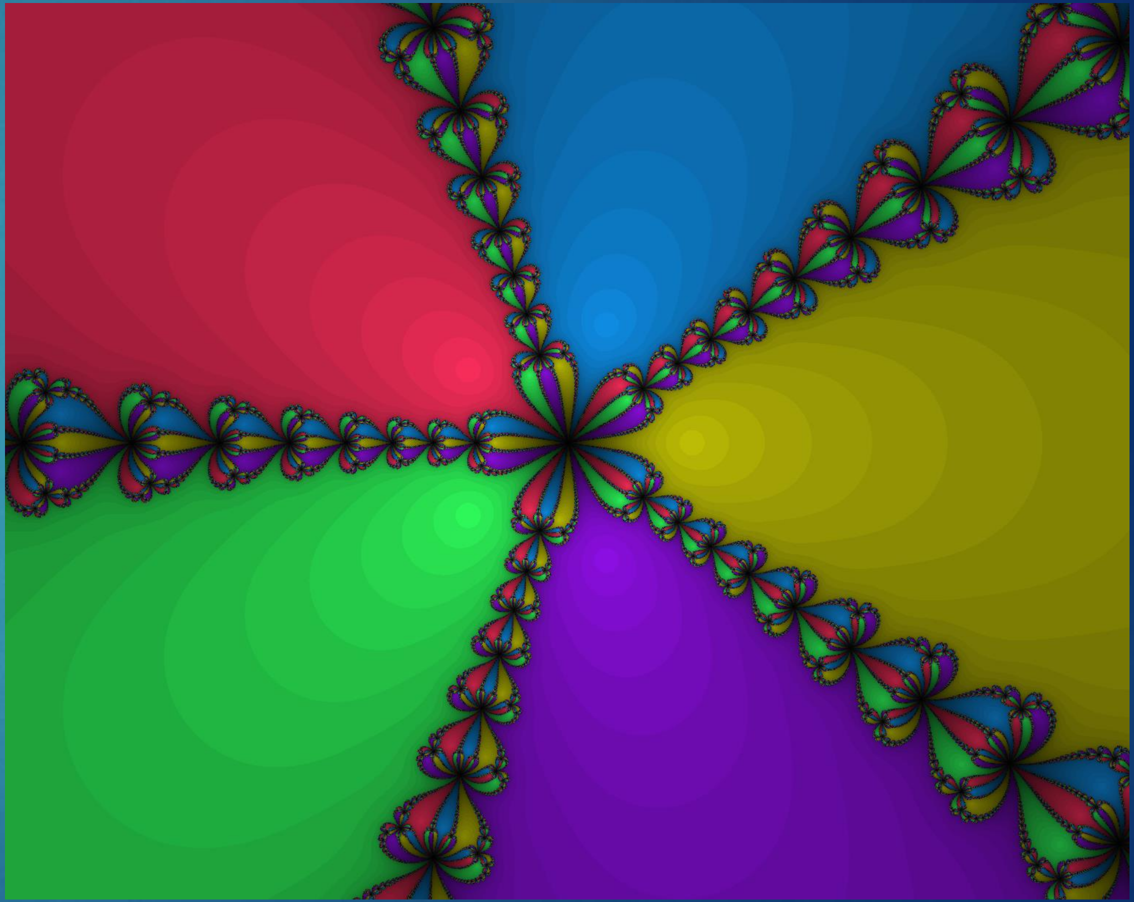
$$z^n = 1.$$

Wyodrębnia on na płaszczyźnie zespolonej te punkty, które podczas stosowania metody Newtona (iteracyjnej metody wyznaczania pierwiastka funkcji) nie zbliżają się do żadnego z pierwiastków równania.

$p(z) = z^3 - 1$



$p(z) = z^5 - 1$

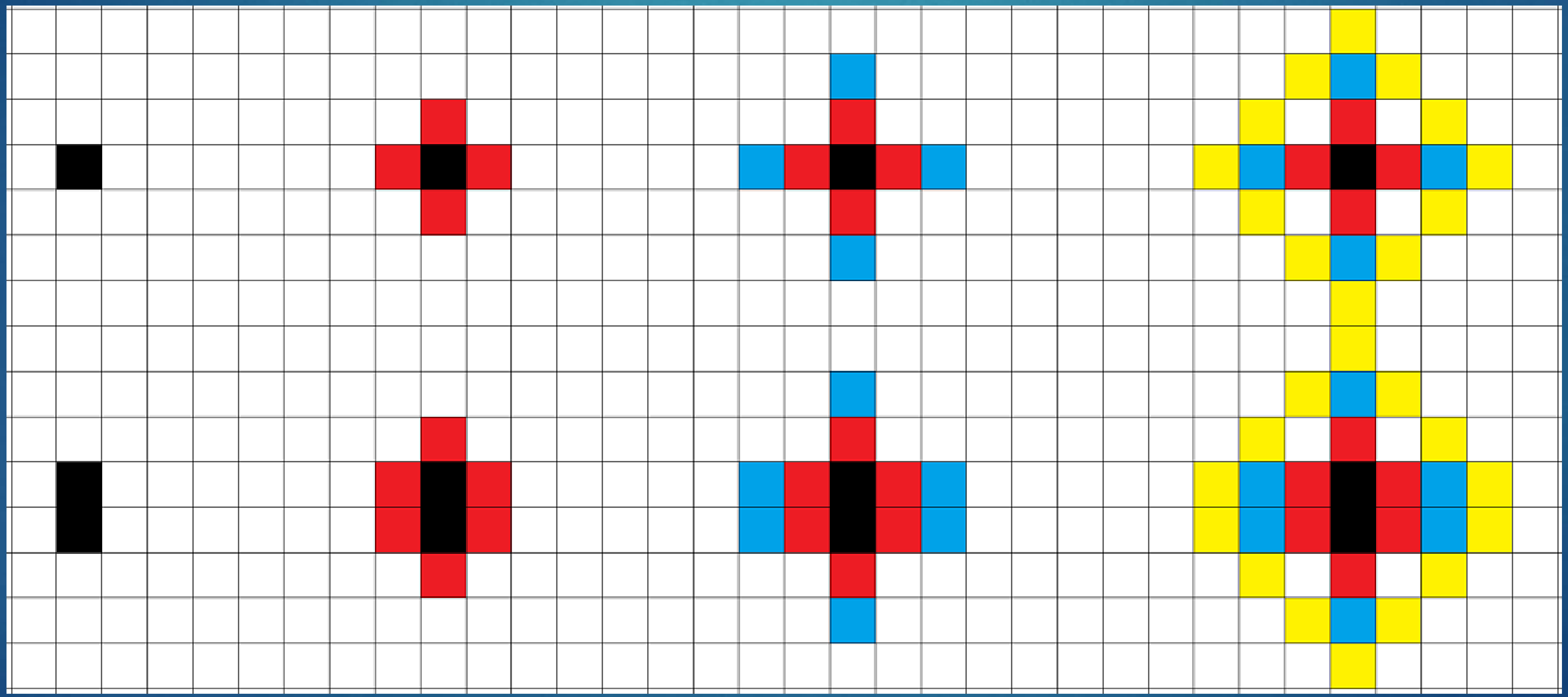


Rysunek fraktalny

PROSTE ZASADY + ITERACJE = SKOMPLIKOWANA MOZAIKA

Zasada:

Zamaluj kwadraty dotykające **tylko jednym bokiem** do kwadratów narysowanych w poprzednich iteracjach



Dziękuję z uwagę