Globalna odwracalność odwzorowań: od prostej rzeczywistej do przestrzeni Banacha

Marek Galewski

Politechnika Łódzka

27 sierpnia, 2018

Zarys zagadnienia

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że $f^{'}(x) \neq 0$

Zarys zagadnienia

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że $f^{'}(x) \neq 0$
- f jest funkcją ściśle monotoniczna

Zarys zagadnienia

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że $f^{'}(x) \neq 0$
- f jest funkcją ściśle monotoniczna
- f jest odwracalana oraz $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Zarys zagadnienia

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że $f^{'}(x) \neq 0$
- f jest funkcją ściśle monotoniczna
- f jest odwracalana oraz $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
- Jednak może się zdarzyć iż $f_1(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$; $f_1(x) = arctg(x)$. Z kolei dla $f_2(x) = x^3 + x$ mamy $f_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Zarys zagadnienia

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^1 taka, że $f^{'}(x) \neq 0$
- f jest funkcją ściśle monotoniczna
- f jest odwracalana oraz $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
- Jednak może się zdarzyć iż $f_1(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$; $f_1(x) = arctg(x)$. Z kolei dla $f_2(x) = x^3 + x$ mamy $f_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- *Kiedy równanie $f(x) = y$, gdzie $y \in \mathbb{R}$ jest (dowolnie) ustalone, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 taka, że $f^{'}(x) \neq 0$ posiada jednoznaczne rozwiązanie?*

Jak to rozwiązać?

Połóżmy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ przestrzeń Banacha z naturalną normą $|\cdot|$)

$$g(x) = \frac{1}{2} |f(x) - y|^2 .$$

Widzimy, że

$$g^{'}(x) = (f(x) - y) f^{'}(x) .$$

Założenie $f^{'}(x) \neq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ *oznacza, że pochodna w każdym punkcie jest izomorfizmem, czyli gwaratnuje odwracalność (w każdym punkcie) pochodnej, rozumianej jako odwzorowanie liniowe i ciągłe.* Zatem korzystając z **Reguły Fermata** punkt krytyczny x_0 funkcjonału g (skoro $f^{'}(x_0) \neq 0$) jest rozwiązaniem równania:

$$f(x_0) - y = 0.$$

Koercytywność (zwartość)

$f : E \to \mathbb{R}$, *gdzie* E *- przestrzeń Banacha, jest korecytywny, jeżeli*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Funkcja $h_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

jest koercytywna.Z drugiej strony $h_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$$

nie jest koercytywna, gdyż $h_2(x, x) = 0$.

Twierdzenie Weierstrassa-Kamień węgielny optymalizacji

Funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ *jest półciągły z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $\alpha \in \mathbb{R}$ *zbiór*

$$S^{\alpha} = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$$

jest domknięty.

Półciągość rozważamy dlatego, iż interesuje nas jedynie poszukiwanie argumentów mininum. Zauważmy, że dla funkcjonału koercytywnego f zbiory S^{α} przy dowolnym α są ograniczone.

Twierdzenie Weierstrassa dla funkcji koercytywnej półciągłej z dołu. *Załóżmy, że* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *jest półciągła z dołu oraz korecytywna. Wówczas* f *posiada co najmniej jeden argument minimum.*

Kluczowe twierdzenie - punkt wyjścia do analogii

Twierdzenie. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 taką, że $f'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz taką, że funkcja $x \to \frac{1}{2}|f(x)|^2$ jest koercytywna na $\mathbb{R}$. Wtedy $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest również klasy C^1 oraz $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (czyli f jest globalnie odwracalna).*

Dowód. Pokażemy najpierw, że $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $y \in \mathbb{R}$. Skoro funkcjonał $x \to \frac{1}{2}|f(x)|^2$ jest koercytywny na $\mathbb{R}$, to również funkcjonał g dany wzorem

$$g(x) = \frac{1}{2}|f(x) - y|^2 = \frac{1}{2}(f(x) - y)^2, \; x \in \mathbb{R},$$

jest koercytywny. Zatem, ze wspominanego wyżej Twierdzenia Weierstrassa, posiada argument minimum, oznaczany przez x_0, spełniający równanie $f(x_0) = y$.

Dowód- czyli jak bez "trudu" uogólniać dalej (chowając szczegóły)

Wykażemy teraz jednozanczność argumentu minimum. Przypuśćmy, że dla pewnego $y \in \mathbb{R}$ istnieją dwa różne argumenty minimum $x_1 \neq x_2$. Wtedy $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Funkcja g nie jest oczywiście stale równa zeru na odcinku $[x_1, x_2]$, stąd ma we wnętrzu tego przedziału argument maksimum v taki, że $g(v) > 0$. Ponadto, $g^{'}(v) = 0$, czyli $f(v) - y = 0$. Ale to oznacza, że $g(v) = 0$, więc $g(v) = 0$ i otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

Obserwacja (Jean Mawhin): twierdzenie Rolle'a to 1szy mountain pass.

Przypadek przestrzeni wielowymiarowej (skończenie)

Twierdzenie Couranta *(Skończenie wymiarowy lemat o przełęczy górskiej) Przypuśćmy, że funkcjonał* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *klasy* C^1 *jest korecytywny i posiada dwa różne argumenty minimum lokalnego* x_1 *oraz* x_2. *Wówczas funkcjonał* f *posiada trzeci punkt krytyczny* x_3 *różny od* x_1 *oraz* x_2, *i taki, który nie jest argumentem minimum lokalnego. Dokładniej w każdym otoczeniu punktu* x_3, *istniej* x *taki, że* $f(x) < f(x_3)$.

Twierdzenie Hadamarda. *Załóżmy, że* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *jest odwzorowaniem klasy* C^1 *takim, że*
(i) $\det f'(x) \neq 0$ *dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}^n$,
(ii) $\|f(x)\| \to \infty$, *jeżeli* $\|x\| \to \infty$.
Wtedy $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, f *jest odwracalny oraz* f^{-1} jest *odwzorowaniem klasy* C^1.

Przestrzenie nieskończonego wymiaru: jak szukać analogii

Problemy na które natrafiamy są następującego rodzaju:

- (1) *jak poprawnie zdefiniować funkcjonał* g?
- (2) *jak zapewnić istnienie argumentu minimum dla* g *(przy ustalonym* y)?
- (3) *jak wykazać jednoznaczność rozwiązań?*
- (4) *jakie są wyniki dotyczące lokalnej odwracalności (czym zastąpić* $\det f^{'}(x) \neq 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}^n$*)?*

Dyfeomorfizm

Odwzorowanie $f : X \to Y$ *klasy* C^1 *nazywamy dyfeomorfizmem jeżeli jest bijekcją (tj. iniekcją czyli odwzorowaniem różnowartościowym oraz suriekcją, czyli odwzorowaniem "na") oraz odwzorowanie odwrotne* $f^{-1} : Y \to X$ *jest również klasy* C^1.

Z *Twierdzenia o funkcji odwrotnej* wiadomo, że odwzorowanie $f : X \to Y$ takie, ze dla każdego $x \in X$ pochodna (czyli odwzorowanie liniowe i ciągłe) jest odwzorowaniem "na" tzn. $f'(x)X = Y$ oraz odwracalnym, tzn. istnieje stała $\alpha_x > 0$ taka, że

$$\left\|f'(x)h\right\| \geq \alpha_x \left\|h\right\| \text{ dla wszystkich } h \in X$$

jest lokalnym dyfeomorfizmem klasy C^1; $f'(x) \in Isom\,(X, Y)$.

Analogia tw. Weierstrassa w p. Banacha

Warunek Palais-Smale: $f : E \to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalny w sensie Fréchete'a;* f *spełnia warunek Palais-Smale'a jeśli z każdego ciągu* (x_n) *takiego, że*
(i) $(f(x_n))$ *jest ograniczony, oraz*
(ii) $f'(x_n) \to 0$, tzn. $\|f'(x_n)\|_{E^*} \to 0$
można wybrać podciąg (normowo) zbieżny.

Twierdzenie o istnienie argumentu minimum dla funkcjonału klasy C^1. *Załóżmy, że* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ *spełnia warunek (PS) oraz że* f *jest ograniczony z dołu. Wtedy zadanie (P) posiada rozwiązanie, czyli istnieje punkt* x_0*, taki, że* $f(x_0) = \inf_{x \in E} f(x)$.

Zbiór punktów krytycznych (analogia z prostą)

Twierdzenie o naturze zbioru punktów krytycznych (Pucci-Serrin).
Załóżmy, że $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ *spełnia warunek (PS) oraz, że każdy punkt krytyczny funkcjonału* f *jest argumentem minimum lokalnego.Wówczas jest on argumentem minimum globalnego oraz zbiór argumentów minimum jest spójny.*

Wynik ogólny

Twierdzenie o globalnym dyfeomorfizmie w przestrzeniach Banacha.
X, Y przestrzenie Banacha. Załóżmy, że $f \in C^1(X;Y)$ jest odwzorowaniem klasy , $\eta \in C^1(Y;\mathbb{R}_+)$ oraz
(a1) $(\eta(x) = 0 \iff x = 0)$ oraz $\left(\eta^{'}(x) = 0 \iff x = 0\right)$;
(a2) dla każdego $y \in Y$ funkcjonał $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$\varphi(x) = \eta(f(x) - y)$$

spełnia warunek Palais-Smale'a;
(a3) $f'(x) \in Isom(X, Y)$ dla każdego $x \in X$.
Wówczas f jest dyfeomorfizmem.

Jak to dalej ugólnić (i wykorzystać)

- funkcje (lokalnie lipschitzowskie)

Jak to dalej ugólnić (i wykorzystać)

- funkcje (lokalnie lipschitzowskie)
- mniej restrykcyjne lokalne warunki odwracalności

Jak to dalej ugólnić (i wykorzystać)

- funkcje (lokalnie lipschitzowskie)
- mniej restrykcyjne lokalne warunki odwracalności
- funkcje z punktami osobliwymi - powrót do scieżek górskich zamiast gotowych narzędzi

Jak to dalej ugólnić (i wykorzystać)

- funkcje (lokalnie lipschitzowskie)
- mniej restrykcyjne lokalne warunki odwracalności
- funkcje z punktami osobliwymi - powrót do scieżek górskich zamiast gotowych narzędzi
- równania całkowy (Volterry i Urysohna), zagadnienia brzegowe dla równań eliptycznych - tu ciekawostka: wyniki są równoważne zastosowaniu bezpośredniej met. rach. war. (dla rów. zwyczajnych).