Wiele stron jednostronnej wstęgi

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

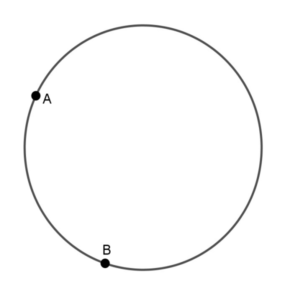
24 VIII 2018

1. Trzy zagadnienia
2. Wstęga Möbiusa na odsiecz!
3. Analogia
4. Rozwiązanie zagadnień
5. Uogólnienia zagadnień
6. I jeszcze o wstędze Möbiusa...

Zagadnienie 1

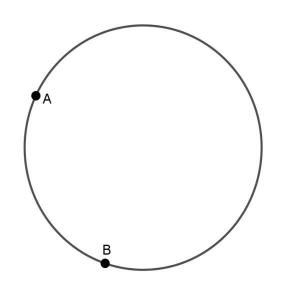
Zagadnienie 1 - głosowanie

Apolonia i Bądzimir umawiają się na brzegu jeziora. Chcemy stworzyć mechanizm „głosowania” ustalający konkretne miejsce randki na podstawie wskazań preferowanych miejsc Apolonii i Bądzimira (każdego z nich osobna) — bez wcześniejszej wiedzy, jakie miejsca oni wskażą.

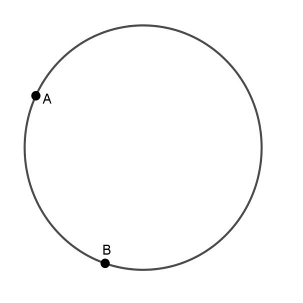


Zagadnienie 1 - głosowanie

Apolonia i Bądzimir umawiają się na brzegu jeziora. Chcemy stworzyć mechanizm „głosowania" ustalający konkretne miejsce randki na podstawie wskazań preferowanych miejsc Apolonii i Bądzimira (każdego z nich osobna) — bez wcześniejszej wiedzy, jakie miejsca oni wskażą.

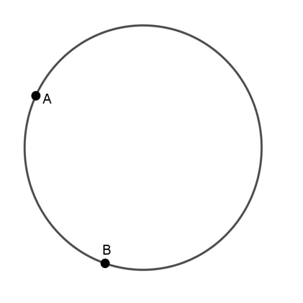


Zagadnienie 1 - doprecyzowanie warunków



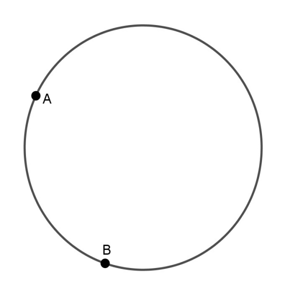
Celem naszym jest zatem skonstruowanie ciągłej funkcji głosowania, której argumentami są propozycje Apolonii i Bądzimira spełniającej następujące warunki:

- Jeśli oboje wskazują ten sam punkt, wynikiem głosowania będzie ten właśnie punkt.
- Nikt z uczestników nie jest forowany: wynik głosowania nie zależy od tego, który z głosów oddała Apolonia, a który Bądzimir.



Celem naszym jest zatem skonstruowanie ciągłej funkcji głosowania, której argumentami są propozycje Apolonii i Bądzimira spełniającej następujące warunki:

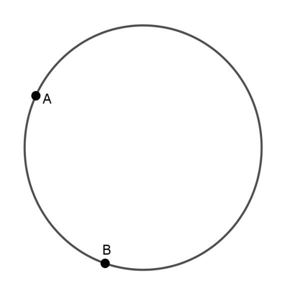
- Jeśli oboje wskazują ten sam punkt, wynikiem głosowania będzie ten właśnie punkt.
- Nikt z uczestników nie jest forowany: wynik głosowania nie zależy od tego, który z głosów oddała Apolonia, a który Bądzimir.



Celem naszym jest zatem skonstruowanie ciągłej funkcji głosowania, której argumentami są propozycje Apolonii i Bądzimira spełniającej następujące warunki:

- Jeśli oboje wskazują ten sam punkt, wynikiem głosowania będzie ten właśnie punkt.
- Nikt z uczestników nie jest forowany: wynik głosowania nie zależy od tego, który z głosów oddała Apolonia, a który Bądzimir.

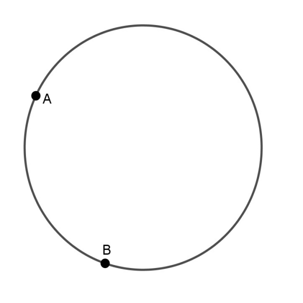
Zagadnienie 1 - doprecyzowanie warunków



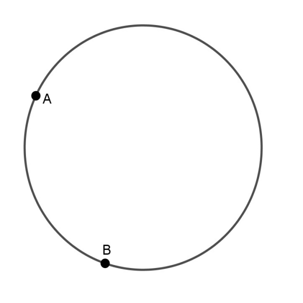
Celem naszym jest zatem skonstruowanie ciągłej funkcji głosowania, której argumentami są propozycje Apolonii i Bądzimira spełniającej następujące warunki:

- Jeśli oboje wskazują ten sam punkt, wynikiem głosowania będzie ten właśnie punkt.
- Nikt z uczestników nie jest forowany: wynik głosowania nie zależy od tego, który z głosów oddała Apolonia, a który Bądzimir.

Zagadnienie 1 - doprecyzowanie warunków

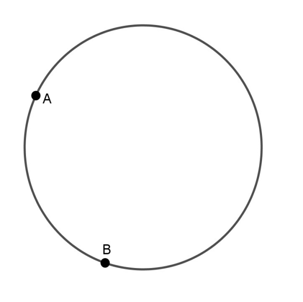


Pierwszy, naturalny pomysł: punkt pośredni między obydwiema propozycjami nie działa, ze względu na brak zdefiniowanego rozwiązania po wybraniu punktów przeciwległych. Czy więc taka funkcja w ogóle istnieje?



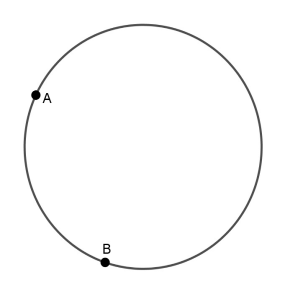
Pierwszy, naturalny pomysł: punkt pośredni między obydwiema propozycjami nie działa, ze względu na brak zdefiniowanego rozwiązania po wybraniu punktów przeciwległych. Czy więc taka funkcja w ogóle istnieje?

Zagadnienie 1 - doprecyzowanie warunków



Pierwszy, naturalny pomysł: punkt pośredni między obydwiema propozycjami nie działa, ze względu na brak zdefiniowanego rozwiązania po wybraniu punktów przeciwległych. Czy więc taka funkcja w ogóle istnieje?

Zagadnienie 1 - doprecyzowanie warunków



Pierwszy, naturalny pomysł: punkt pośredni między obydwiema propozycjami nie działa, ze względu na brak zdefiniowanego rozwiązania po wybraniu punktów przeciwległych. Czy więc taka funkcja w ogóle istnieje?

Od jakiegoś czasu techniki topologiczno-geometryczne stosuje się do badania utworów muzycznych. Po skonstruowaniu przestrzeni możliwych dźwięków i ich zestawów (akordów) można interpretować linie melodyczne jako trajektorie w takiej przestrzeni. Taka interpretacja umożliwia komputerową analizę muzyki i znajduje zastosowanie w opisywaniu charakterystycznych cech utworów muzycznych komponowanych przez danego autora, a w konsekwencji w rozpoznawaniu autorstwa (gdy nie jest ono pewne) lub tworzenie utworów „w stylu" danego kompozytora. Na najprostszym poziomie pozwala wyznaczyć „dopuszczalne" w ramach danej konwencji sekwencje dźwięków i akordów.

Zagadnienie 2 - topologiczna teoria muzyki

Od jakiegoś czasu techniki topologiczno-geometryczne stosuje się do badania utworów muzycznych. Po skonstruowaniu przestrzeni możliwych dźwięków i ich zestawów (akordów) można interpretować linie melodyczne jako trajektorie w takiej przestrzeni. Taka interpretacja umożliwia komputerową analizę muzyki i znajduje zastosowanie w opisywaniu charakterystycznych cech utworów muzycznych komponowanych przez danego autora, a w konsekwencji w rozpoznawaniu autorstwa (gdy nie jest ono pewne) lub tworzenie utworów „w stylu” danego kompozytora. Na najprostszym poziomie pozwala wyznaczyć „dopuszczalne” w ramach danej konwencji sekwencje dźwięków i akordów.

Zagadnienie 2 - topologiczna teoria muzyki

Od jakiegoś czasu techniki topologiczno-geometryczne stosuje się do badania utworów muzycznych. Po skonstruowaniu przestrzeni możliwych dźwięków i ich zestawów (akordów) można interpretować linie melodyczne jako trajektorie w takiej przestrzeni. Taka interpretacja umożliwia komputerową analizę muzyki i znajduje zastosowanie w opisywaniu charakterystycznych cech utworów muzycznych komponowanych przez danego autora, a w konsekwencji w rozpoznawaniu autorstwa (gdy nie jest ono pewne) lub tworzenie utworów „w stylu” danego kompozytora. Na najprostszym poziomie pozwala wyznaczyć „dopuszczalne” w ramach danej konwencji sekwencje dźwięków i akordów.

Zagadnienie 2 - topologiczna teoria muzyki

Od jakiegoś czasu techniki topologiczno-geometryczne stosuje się do badania utworów muzycznych. Po skonstruowaniu przestrzeni możliwych dźwięków i ich zestawów (akordów) można interpretować linie melodyczne jako trajektorie w takiej przestrzeni. Taka interpretacja umożliwia komputerową analizę muzyki i znajduje zastosowanie w opisywaniu charakterystycznych cech utworów muzycznych komponowanych przez danego autora, a w konsekwencji w rozpoznawaniu autorstwa (gdy nie jest ono pewne) lub tworzenie utworów „w stylu" danego kompozytora. Na najprostszym poziomie pozwala wyznaczyć „dopuszczalne" w ramach danej konwencji sekwencje dźwięków i akordów.

Wszelkie teorie muzyki i jej zapisu opierają się na tym, że ludzie odbierają dźwięk w skali logarytmicznej i okresowej: w szczególności, dźwięk o częstotliwości q i dźwięk o częstotliwości $2q$ wydają się być przesunięte o tę samą "odległość" w przestrzeni dźwięków (oktawę) i mają tę samą barwę. Jeśli fundamentalnej częstotliwości dźwięku q przypisze się liczbę rzeczywistą p w następujący sposób:

$$p(q) = 69 + 12\log_2\left(\frac{q}{440}\right),$$

to rezultatem będzie „oś liczbowa dźwięków" ($\mathbb{R}$), w której każda oktawa ma długość 12, półtony (czyli różnice pomiędzy dźwiękami sąsiednich klawiszy fortepianu) mają długość 1, a "środkowe" C jest oznaczone jako 60.

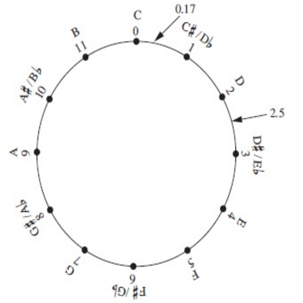
Zagadnienie 2 - topologiczna teoria muzyki

Wszelkie teorie muzyki i jej zapisu opierają się na tym, że ludzie odbierają dźwięk w skali logarytmicznej i okresowej: w szczególności, dźwięk o częstotliwości q i dźwięk o częstotliwości $2q$ wydają się być przesunięte o tę samą "odległość" w przestrzeni dźwięków (oktawę) i mają tę samą barwę. Jeśli fundamentalnej częstotliwości dźwięku q przypisze się liczbę rzeczywistą p w następujący sposób:

$$p(q) = 69 + 12\log_2\left(\frac{q}{440}\right),$$

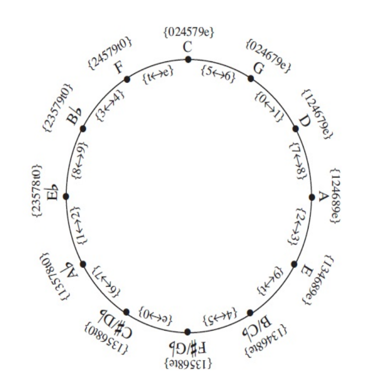
to rezultatem będzie „oś liczbowa dźwięków" ($\mathbb{R}$), w której każda oktawa ma długość 12, półtony (czyli różnice pomiędzy dźwiękami sąsiednich klawiszy fortepianu) mają długość 1, a "środkowe" C jest oznaczone jako 60.

Jako, że barwa dźwięku jest najczęściej ważniejsza niż to, do jakiej oktawy dany dźwięk należy, zamiast całej „osi liczbowej dźwięków” będziemy rozważać „koło dźwięków” $\mathbb{R}/12\mathbb{Z}$. Liczby całkowite na tym kole odpowiadają klasycznej zachodniej literowej notacji muzycznej $C = 0$, $C\sharp = 1, \ldots, A = 9$, $A\sharp = 10 = t$, $B = 11 = e$ (w Polsce nuta B nazywana jest H, ale będę używać międzynarodowej notacji). Jednakże, w ogólnej teorii muzyki rozważamy również dźwięki pośrednie.

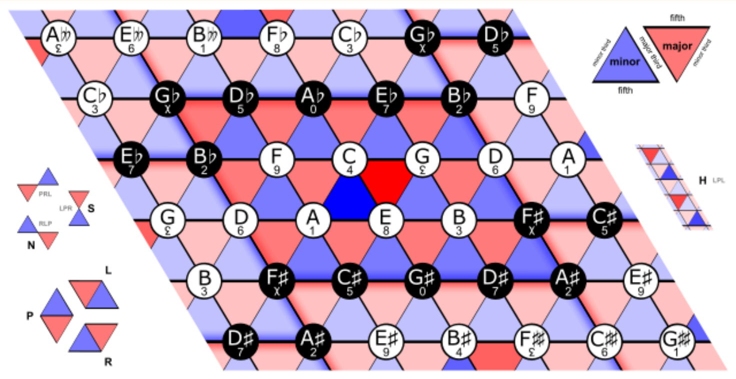


Zagadnienie 2 - topologiczna teoria muzyki

Pierwszym, pochodzącym z lat 20-tych XVIII wieku, przykładem geometrycznej interpretacji elementów teorii muzyki jest tak zwane koło kwintowe, pokazujące związki pomiędzy poszczególnymi tonacjami durowymi:



Leonhard Euler pomagał muzykom opracowywać tzw. *Tonnetz*, czyli graf pokazujący harmonijne przejścia linii melodycznych pomiedzy trójdźwiękami molowymi i durowymi (rysunek z Wikipedii):



Jednakże uporządkowaną topologiczną teorię linii melodycznych stworzyli dopiero w pierwszej dekadzie XXI wieku Clifton Callender, Ian Quinn i Dmitrij Tymoczko. Nie będziemy się zajmować ogólną teorią tylko przyjrzymy się najprostszej sytuacji: na jakiej przestrzeni topologicznej należy badać linie melodyczne oparte na dwudźwiękach, czyli akordach złożonych z (co najwyżej) dwóch dźwięków?

Zagadnienie 2 - dwudźwięki

Jednakże uporządkowaną topologiczną teorię linii melodycznych stworzyli dopiero w pierwszej dekadzie XXI wieku Clifton Callender, Ian Quinn i Dmitrij Tymoczko. Nie będziemy się zajmować ogólną teorią tylko przyjrzymy się najprostszej sytuacji: na jakiej przestrzeni topologicznej należy badać linie melodyczne oparte na dwudźwiękach, czyli akordach złożonych z (co najwyżej) dwóch dźwięków?

Trzecim problemem wartym rozważenia jest wariant hipotezy postawionej w 1911 roku przez Otto Toeplitza:

Square Peg Problem

Każda ciągła krzywa zwyczajna, zamknięta na płaszczyźnie $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ zawiera 4 różne punkty, które są wierzchołkami tego samego kwadratu.

Oczywiście, nie zakładamy, że ten kwadrat musi leżeć wewnątrz obszaru ograniczonego przez tę krzywą.

Zagadnienie 3 - hipoteza Toeplitza

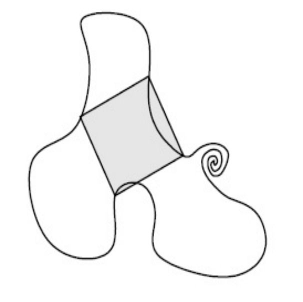
Trzecim problemem wartym rozważenia jest wariant hipotezy postawionej w 1911 roku przez Otto Toeplitza:

Square Peg Problem

Każda ciągła krzywa zwyczajna, zamknięta na płaszczyźnie $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ zawiera 4 różne punkty, które są wierzchołkami tego samego kwadratu.

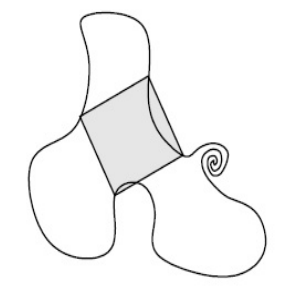
Oczywiście, nie zakładamy, że ten kwadrat musi leżeć wewnątrz obszaru ograniczonego przez tę krzywą.

Zagadnienie 3 - hipoteza Toeplitza



Co ciekawe, w najogólniejszej wersji hipoteza Toeplitza jest problemem otwartym (więcej na ten temat w dalszej części referatu). Natomiast my się zajmiemy pewnym uproszczonym wariantem tej hipotezy.

Zagadnienie 3 - hipoteza Toeplitza



Co ciekawe, w najogólniejszej wersji hipoteza Toeplitza jest problemem otwartym (więcej na ten temat w dalszej części referatu). Natomiast my się zajmiemy pewnym uproszczonym wariantem tej hipotezy.

Zagadnienie 3

Czy każda ciągła krzywa zwyczajna, zamknięta na płaszczyźnie $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ zawiera 4 różne punkty, które są wierzchołkami tego samego **prostokąta**?

Rozwiązanie podał H.Vaughan w 1977 roku.

Zagadnienie 3 - sformułowanie

Zagadnienie 3

Czy każda ciągła krzywa zwyczajna, zamknięta na płaszczyźnie $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ zawiera 4 różne punkty, które są wierzchołkami tego samego **prostokąta**?

Rozwiązanie podał H.Vaughan w 1977 roku.

Gdzie tu analogia?

Podsumujmy przedstawione przed chwilą zagadnienia:

- Pierwsze dotyczy teorii systemów głosowań, drugie – muzyki, trzecie – elementarnej planimetrii.
- Można się domyślać, że w pierwszym przypadku udowodnimy nieistnienie żądanego systemu głosowania, a w trzecim wypadku - istnienie danego prostokąta.
- Ale mimo to, w uzyskaniu informacji o zagadnieniach pomoże nam podobna sztuczka...
- ...która będzie oparta na pewnych własnościach wstęgi Möbiusa.

Gdzie tu analogia?

Podsumujmy przedstawione przed chwilą zagadnienia:

- Pierwsze dotyczy teorii systemów głosowań, drugie – muzyki, trzecie – elementarnej planimetrii.
- Można się domyślać, że w pierwszym przypadku udowodnimy nieistnienie żądanego systemu głosowania, a w trzecim wypadku - istnienie danego prostokąta.
- Ale mimo to, w uzyskaniu informacji o zagadnieniach pomoże nam podobna sztuczka...
- ...która będzie oparta na pewnych własnościach wstęgi Möbiusa.

Gdzie tu analogia?

Podsumujmy przedstawione przed chwilą zagadnienia:

- Pierwsze dotyczy teorii systemów głosowań, drugie – muzyki, trzecie – elementarnej planimetrii.
- Można się domyślać, że w pierwszym przypadku udowodnimy nieistnienie żądanego systemu głosowania, a w trzecim wypadku - istnienie danego prostokąta.
- Ale mimo to, w uzyskaniu informacji o zagadnieniach pomoże nam podobna sztuczka...
- ...która będzie oparta na pewnych własnościach wstęgi Möbiusa.

Podsumujmy przedstawione przed chwilą zagadnienia:

- Pierwsze dotyczy teorii systemów głosowań, drugie – muzyki, trzecie – elementarnej planimetrii.
- Można się domyślać, że w pierwszym przypadku udowodnimy nieistnienie żądanego systemu głosowania, a w trzecim wypadku - istnienie danego prostokąta.
- Ale mimo to, w uzyskaniu informacji o zagadnieniach pomoże nam podobna sztuczka...
- ...która będzie oparta na pewnych własnościach wstęgi Möbiusa.

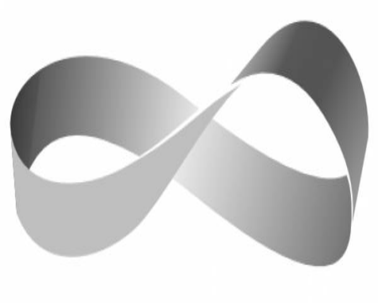
Gdzie tu analogia?

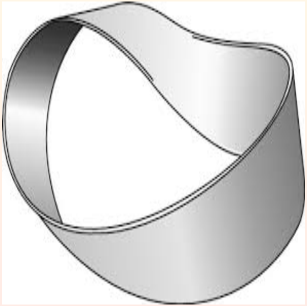
Podsumujmy przedstawione przed chwilą zagadnienia:

- Pierwsze dotyczy teorii systemów głosowań, drugie – muzyki, trzecie – elementarnej planimetrii.
- Można się domyślać, że w pierwszym przypadku udowodnimy nieistnienie żądanego systemu głosowania, a w trzecim wypadku - istnienie danego prostokąta.
- Ale mimo to, w uzyskaniu informacji o zagadnieniach pomoże nam podobna sztuczka...
- ...która będzie oparta na pewnych własnościach wstęgi Möbiusa.

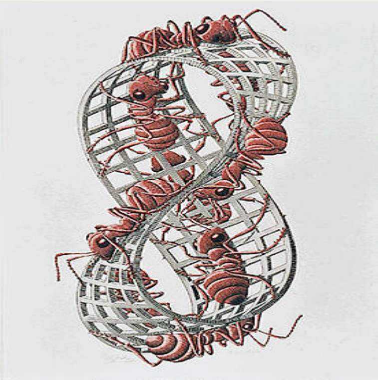
Wstęga Möbiusa

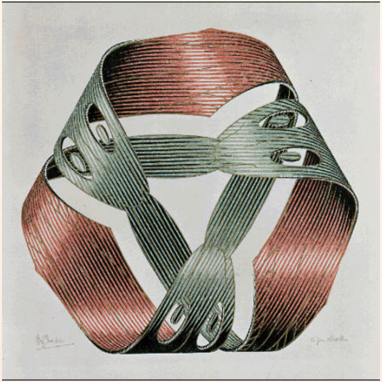
Wszyscy znamy (i kochamy) wstęgę Möbiusa...



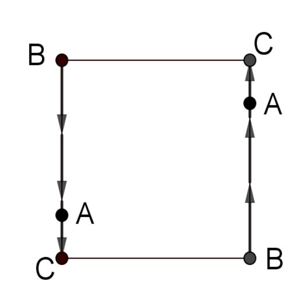


...również w wersji M.C. Eschera,...





...jednak dla nas najwygodniejsza będzie jej następująca forma:



Postać tę interpretujemy jako ilorazową przestrzeń topologiczną

$$M = [0,1]^2 / \sim,$$

gdzie $\sim$ jest relacją sklejającą brzegi: $(0,a) \sim (1, 1-a)$ (kierunek sklejenia wskazują strzałki na obrazku).

Lemat o retrakcji

W rozwiązaniu pierwszego z przedstawionych zagadnień kluczowy będzie następujący lemat dotyczący wstęgi Möbiusa.

Lemat o retrakcji

Nie istnieje retrakcja wstęgi Möbiusa M na jej brzeg ∂M, czyli odwzorowanie $r : M \to \partial M$, takie, że dla każdego $x \in \partial M$ zachodzi: $r(x) = x$.

Dowód wymaga użycia prostych technik topologii algebraicznej.

Lemat o retrakcji

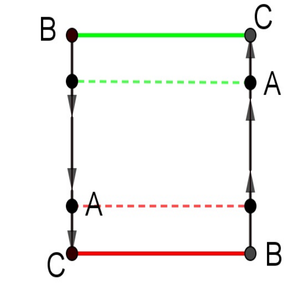
W rozwiązaniu pierwszego z przedstawionych zagadnień kluczowy będzie następujący lemat dotyczący wstęgi Möbiusa.

Lemat o retrakcji

Nie istnieje retrakcja wstęgi Möbiusa M na jej brzeg ∂M, czyli odwzorowanie $r : M \to \partial M$, takie, że dla każdego $x \in \partial M$ zachodzi: $r(x) = x$.

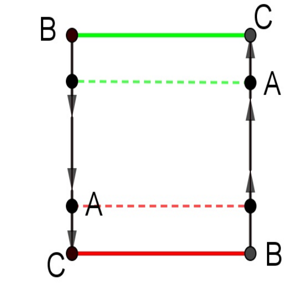
Dowód wymaga użycia prostych technik topologii algebraicznej.

Lemat o retrakcji - szkic dowodu



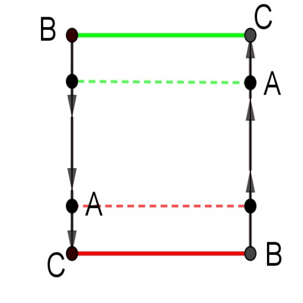
- Grupy podstawowe M i ∂M to $\pi_1(M) = \pi_1(\partial M) = \mathbb{Z}$.
- Zanurzenie $i : \partial M \to M$ generuje odwzorowanie i^* na odpowiednich grupach hopotopii, ale obrazem generatora $\pi_1(\partial M)$ przez i^* jest podwojenie generatora M (obrazek powyżej), czyli $i^*(1) = 2$.
- Jeśli $r : M \to \partial M$ byłoby retrakcją, to $r \circ i = \mathrm{id}_{\partial M}$, czyli $r^* \circ i^* = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, ale $r^* \circ i^*(1) = r^*(2) \neq 1$ - sprzeczność.

Lemat o retrakcji - szkic dowodu

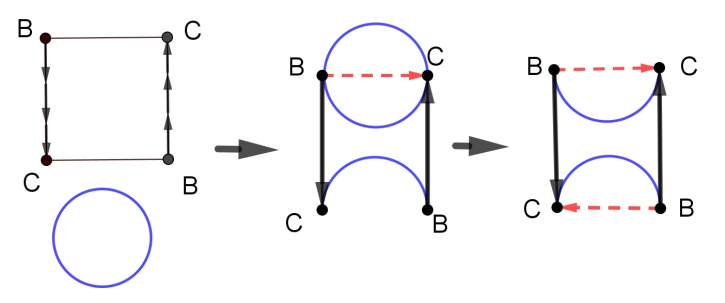


- Grupy podstawowe M i ∂M to $\pi_1(M) = \pi_1(\partial M) = \mathbb{Z}$.
- Zanurzenie $i : \partial M \to M$ generuje odwzorowanie i^* na odpowiednich grupach hopotopii, ale obrazem generatora $\pi_1(\partial M)$ przez i^* jest podwojenie generatora M (obrazek powyżej), czyli $i^*(1) = 2$.
- Jeśli $r : M \to \partial M$ byłoby retrakcją, to $r \circ i = \mathrm{id}_{\partial M}$, czyli $r^* \circ i^* = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, ale $r^* \circ i^*(1) = r^*(2) \neq 1$ - sprzeczność.

Lemat o retrakcji - szkic dowodu



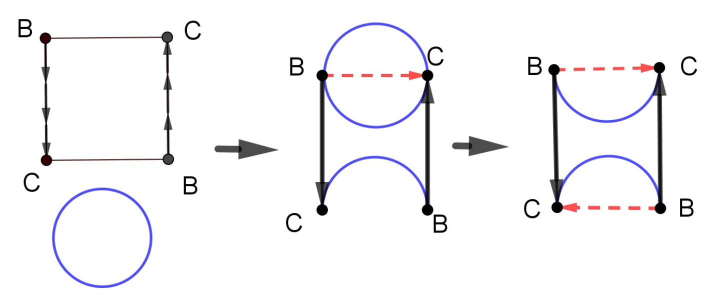
- Grupy podstawowe M i ∂M to $\pi_1(M) = \pi_1(\partial M) = \mathbb{Z}$.
- Zanurzenie $i : \partial M \to M$ generuje odwzorowanie i^* na odpowiednich grupach hopotopii, ale obrazem generatora $\pi_1(\partial M)$ przez i^* jest podwojenie generatora M (obrazek powyżej), czyli $i^*(1) = 2$.
- Jeśli $r : M \to \partial M$ byłoby retrakcją, to $r \circ i = \mathrm{id}_{\partial M}$, czyli $r^* \circ i^* = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, ale $r^* \circ i^*(1) = r^*(2) \neq 1$ - sprzeczność.



Dodatkowo będziemy potrzebować dwóch informacji:

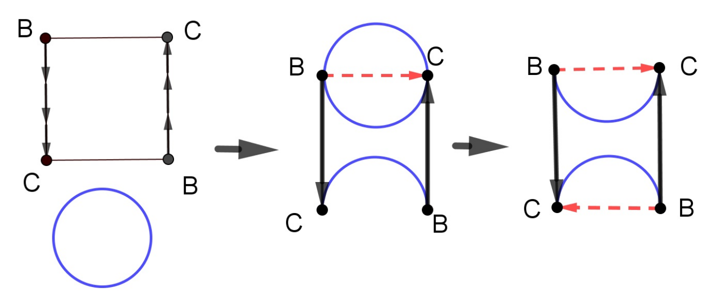
- Wstęga Möbiusa z doklejonym wzdłuż brzegu dwuwymiarowym kołem tworzy przestrzeń rzutową RP^2 (rysunek powyżej).
- RP^2 nie jest zanurzalna w $\mathbb{R}^3$ tj. nie istnieje homeomorfizm na obraz z RP^2 do $\mathbb{R}^3$.

Wstęga Möbiusa i RP^2



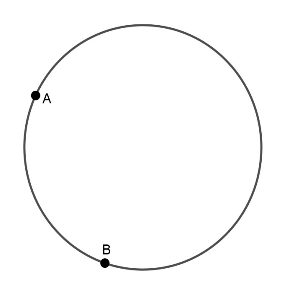
Dodatkowo będziemy potrzebować dwóch informacji:

- Wstęga Möbiusa z doklejonym wzdłuż brzegu dwuwymiarowym kołem tworzy przestrzeń rzutową RP^2 (rysunek powyżej).
- RP^2 nie jest zanurzalna w $\mathbb{R}^3$ tj. nie istnieje homeomorfizm na obraz z RP^2 do $\mathbb{R}^3$.



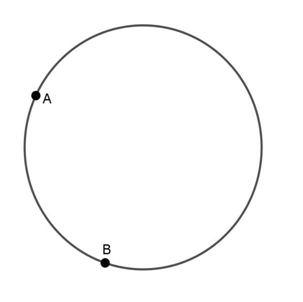
Dodatkowo będziemy potrzebować dwóch informacji:

- Wstęga Möbiusa z doklejonym wzdłuż brzegu dwuwymiarowym kołem tworzy przestrzeń rzutową RP^2 (rysunek powyżej).
- RP^2 nie jest zanurzalna w $\mathbb{R}^3$ tj. nie istnieje homeomorfizm na obraz z RP^2 do $\mathbb{R}^3$.



Celem naszym jest skonstruowanie funkcji głosowania $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ spełniającej warunki symetryczności (tj. $f(a, b) = f(b, a)$) oraz jednomyślności ($f(a, a) = a$).

Zagadnienie 1 - uściślenie



Celem naszym jest skonstruowanie funkcji głosowania $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ spełniającej warunki symetryczności (tj. $f(a, b) = f(b, a)$) oraz jednomyślności ($f(a, a) = a$).

Zagadnienie 1 - uściślenie

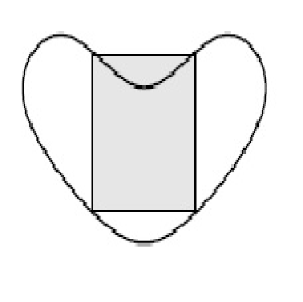
- $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$; $f(a, b) = f(b, a)$; $f(a, a) = a$
- Ze względu na warunek symetryczności funkcję tę zatem wystarczy zdefiniować na zbiorze par nieuporządkowanych $X = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}$. Istnienie funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{S}^1$ takiej, że $f(\{a, a\}) = a$ jest równoważne istnieniu szukanego systemu głosowania.

Zagadnienie 1 - uściślenie

- $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$; $f(a,b) = f(b,a)$; $f(a,a) = a$
- Ze względu na warunek symetryczności funkcję tę zatem wystarczy zdefiniować na zbiorze par nieuporządkowanych $X = \{\{a,b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}$. Istnienie funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{S}^1$ takiej, że $f(\{a,a\}) = a$ jest równoważne istnieniu szukanego systemu głosowania.

Skoro przestrzeń pojedynczych dźwięków utożsamiliśmy z $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/12\mathbb{Z}$, to przestrzeń dwudźwięków można utożsamić z tym samym zbiorem par nieuporządkowanych $X = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}$.

Zagadnienie 3 - uściślenie



Czy każda ciągła krzywa zwyczajna, zamknięta na płaszczyźnie $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ zawiera 4 różne punkty, które są wierzchołkami tego samego **prostokąta**?

Najpierw, przypomnijmy znaną ze szkoły własność prostokąta: jego przekątne są równej długości i przecinają się dokładnie w połowie swojej długości. To stwierdzenie można odwrócić: jeśli mamy dwa odcinki równej długości: $\overline{ac}$ i $\overline{bd}$, które przecinają się dokładnie w połowie, to punkty a, b, c, d tworzą prostokąt. Dlatego poszukiwanie prostokąta wpisanego w zadaną krzywą jest równoważne poszukiwaniu dwóch różnych (**nieuporządkowanych!**) par punktów o równych odległościach i tym samym punkcie pośrednim.

Najpierw, przypomnijmy znaną ze szkoły własność prostokąta: jego przekątne są równej długości i przecinają się dokładnie w połowie swojej długości. To stwierdzenie można odwrócić: jeśli mamy dwa odcinki równej długości: $\overline{ac}$ i $\overline{bd}$, które przecinają się dokładnie w połowie, to punkty a, b, c, d tworzą prostokąt. Dlatego poszukiwanie prostokąta wpisanego w zadaną krzywą jest równoważne poszukiwaniu dwóch różnych (**nieuporządkowanych**!) par punktów o równych odległościach i tym samym punkcie pośrednim.

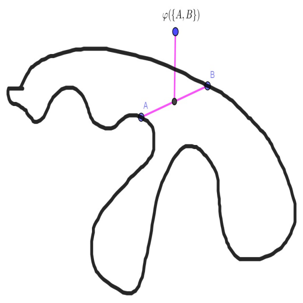
Zagadnienie 3 - uściślenie

Najpierw, przypomnijmy znaną ze szkoły własność prostokąta: jego przekątne są równej długości i przecinają się dokładnie w połowie swojej długości. To stwierdzenie można odwrócić: jeśli mamy dwa odcinki równej długości: $\overline{ac}$ i $\overline{bd}$, które przecinają się dokładnie w połowie, to punkty a, b, c, d tworzą prostokąt. Dlatego poszukiwanie prostokąta wpisanego w zadaną krzywą jest równoważne poszukiwaniu dwóch różnych (**nieuporządkowanych**!) par punktów o równych odległościach i tym samym punkcie pośrednim.

Zagadnienie 3 - uściślenie

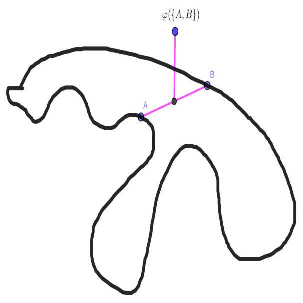
Niech $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadaną krzywą. Rozważmy funkcję φ przypisującą nieuporządkowanej parze punktów leżących na tej krzywej punkt z przestrzeni $\mathbb{R}^3$, którego pierwsze dwie współrzędne są równe punktowi leżącemu pośrodku odcinka łączącego tę parę punktów, a trzecia współrzędna jest równa długości tego odcinka, czyli dla $x, y \in \gamma(\mathbb{S}^1)$:

$$\varphi(\{x, y\} = (\frac{x+y}{2}, ||x-y||).$$



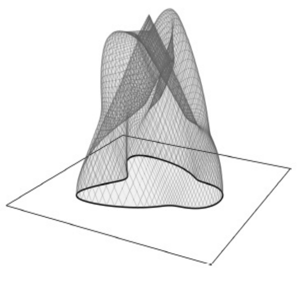
Niech $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadaną krzywą. Rozważmy funkcję φ przypisującą nieuporządkowanej parze punktów leżących na tej krzywej punkt z przestrzeni $\mathbb{R}^3$, którego pierwsze dwie współrzędne są równe punktowi leżącemu pośrodku odcinka łączącego tę parę punktów, a trzecia współrzędna jest równa długości tego odcinka, czyli dla $x, y \in \gamma(\mathbb{S}^1)$:

$$\varphi(\{x, y\} = (\frac{x+y}{2}, ||x-y||).$$



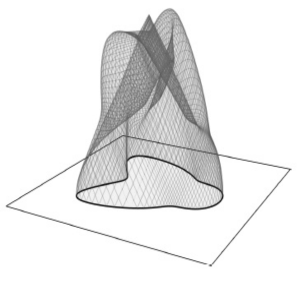
$$\varphi(\{x, y\} = (\frac{x+y}{2}, ||x-y||).$$

Funkcja φ jest ciągła, a jej obraz wygląda mniej więcej tak:

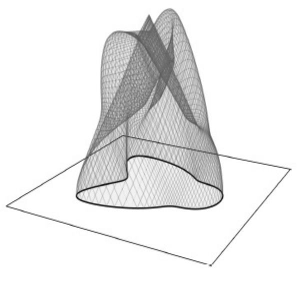


$$\varphi(\{x,y\} = (\frac{x+y}{2}, ||x-y||).$$

Funkcja φ jest ciągła, a jej obraz wygląda mniej więcej tak:

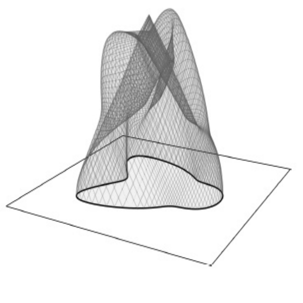


Zagadnienie 3 - uściślenie



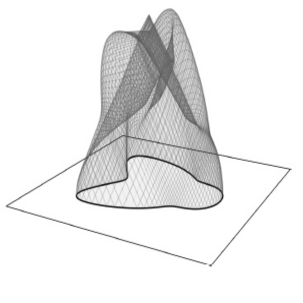
- Funkcja φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy prostokąt wpisany w krzywą γ nie istnieje.
- Różnowartościowość funkcji φ jest równoważna temu, że φ jest homeomorfizmem pomiędzy zbiorami $\tilde{X} = \{\{a, b\} : a, b \in \gamma(\mathbb{S}^1)\}$, a jej obrazem $\varphi(\tilde{X})$ przedstawionym powyżej.
- Dla każdego punktu $x \in \gamma(\mathbb{S}^1)$ $\varphi(\{x, x\}) = (x, 0)$.

Zagadnienie 3 - uściślenie



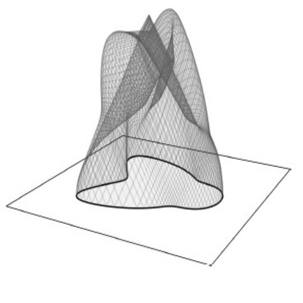
- Funkcja φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy prostokąt wpisany w krzywą γ nie istnieje.
- Różnowartościowość funkcji φ jest równoważna temu, że φ jest homeomorfizmem pomiędzy zbiorami $\tilde{X} = \{\{a, b\} : a, b \in \gamma(\mathbb{S}^1)\}$, a jej obrazem $\varphi(\tilde{X})$ przedstawionym powyżej.
- Dla każdego punktu $x \in \gamma(\mathbb{S}^1)$ $\varphi(\{x, x\}) = (x, 0)$.

Zagadnienie 3 - uściślenie

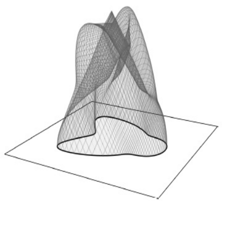


- Funkcja φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy prostokąt wpisany w krzywą γ nie istnieje.
- Różnowartościowość funkcji φ jest równoważna temu, że φ jest homeomorfizmem pomiędzy zbiorami $\tilde{X} = \{\{a, b\} : a, b \in \gamma(\mathbb{S}^1)\}$, a jej obrazem $\varphi(\tilde{X})$ przedstawionym powyżej.
- Dla każdego punktu $x \in \gamma(\mathbb{S}^1)$ $\varphi(\{x, x\}) = (x, 0)$.

Zagadnienie 3 - uściślenie



- Funkcja φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy prostokąt wpisany w krzywą γ nie istnieje.
- Różnowartościowość funkcji φ jest równoważna temu, że φ jest homeomorfizmem pomiędzy zbiorami $\tilde{X} = \{\{a, b\} : a, b \in \gamma(\mathbb{S}^1)\}$, a jej obrazem $\varphi(\tilde{X})$ przedstawionym powyżej.
- Dla każdego punktu $x \in \gamma(\mathbb{S}^1)$ $\varphi(\{x, x\}) = (x, 0)$.



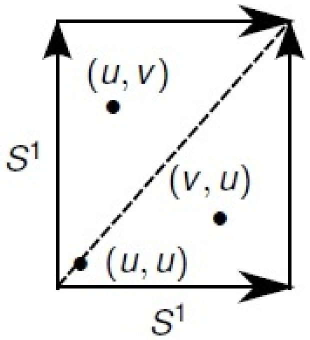
- Różnowartościowość funkcji φ jest równoważna temu, że φ jest homeomorfizmem pomiędzy zbiorami $\tilde{X} = \{\{a, b\} : a, b \in \gamma(\mathbb{S}^1)\}$, a jej obrazem $\varphi(\tilde{X})$ przedstawionym powyżej.
- Dla każdego punktu x należącego do krzywej $\varphi(\{x, x\}) = (x, 0)$.
- Odwzorowanie $\tilde{\gamma} : X \to \tilde{X}$ takie, że $\tilde{\gamma}(\{a, b\}) = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$ jest homeomorfizmem, tak jak i odwzorowanie $g = \varphi \circ \tilde{\gamma} : X \to \varphi(\tilde{X})$ (jeśli φ jest homeomorfizmem).

Podsumowując, sprawdziliśmy wszystkie trzy zagadnienia do badania pewnych własności zbioru

$$X = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}.$$

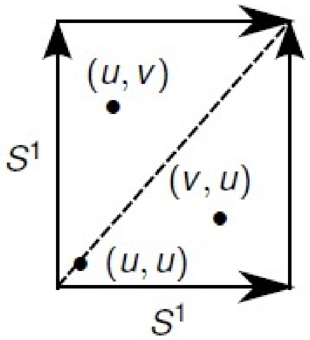
Tajemniczy zbiór X

Rozważmy, czym właściwie jest zbiór $X = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}$. Zacznijmy od zbioru par uporządkowanych $S_1 \times S_1$:



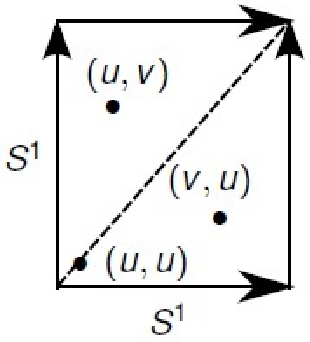
Zbiór X powstaje z $S_1 \times S_1$ przez „złożenie go na pół”, czyli utożsamienie punktów (u, v) i (v, u). Na linii przerywanej znajdują się punkty postaci (u, u).

Rozważmy, czym właściwie jest zbiór $X = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}$. Zacznijmy od zbioru par uporządkowanych $S_1 \times S_1$:

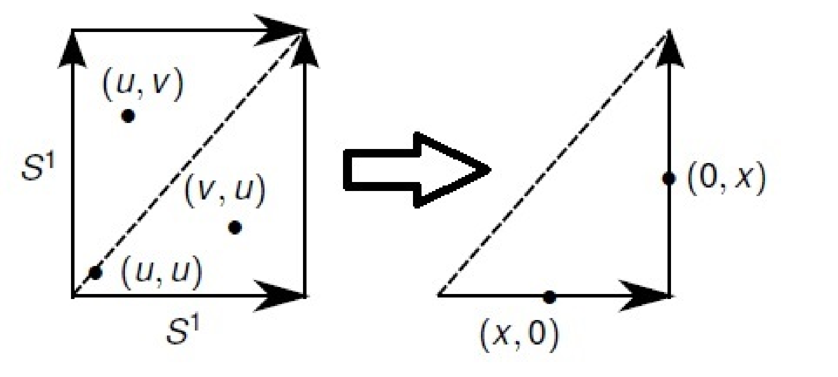


Zbiór X powstaje z $S_1 \times S_1$ przez „złożenie go na pół”, czyli utożsamienie punktów (u, v) i (v, u). Na linii przerywanej znajdują się punkty postaci (u, u).

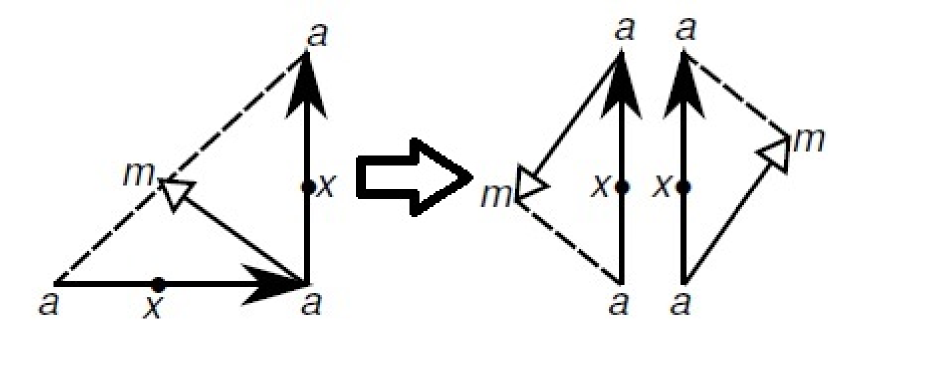
Rozważmy, czym właściwie jest zbiór $X = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}$. Zacznijmy od zbioru par uporządkowanych $S_1 \times S_1$:



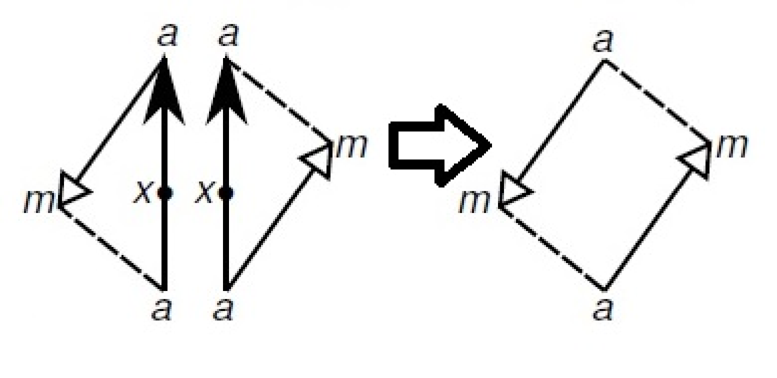
Zbiór X powstaje z $S_1 \times S_1$ przez „złożenie go na pół”, czyli utożsamienie punktów (u, v) i (v, u). Na linii przerywanej znajdują się punkty postaci (u, u).



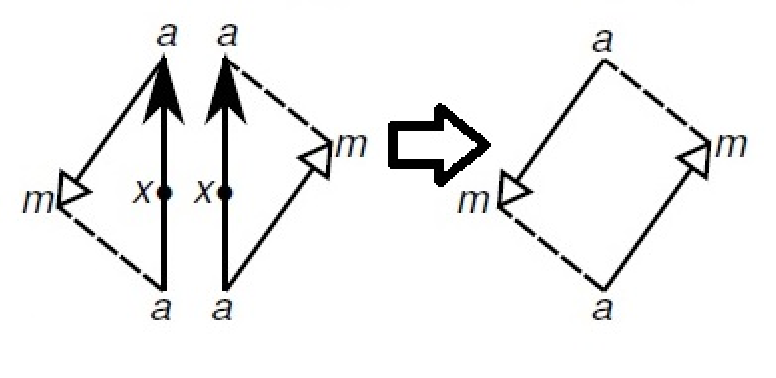
Ten zbiór byłby dość prosty do analizy, gdyby nie to dziwne sklejenie dwóch „przyprostokątnych". Jednak można sobie z tym poradzić...



... rozcinając trójkąt wzdłuż wektora m...



... i sklejając ponownie. Okazuje się, że zbiór $X = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}$ jest w rzeczywistości zakamuflowaną wstęgą Möbiusa, której brzeg odpowiada zbiorowi elementów typu $\{u, u\}$.



... i sklejając ponownie. Okazuje się, że zbiór $X = \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{S}^1\}$ jest w rzeczywistości zakamuflowaną wstęgą Möbiusa, której brzeg odpowiada zbiorowi elementów typu $\{u, u\}$.

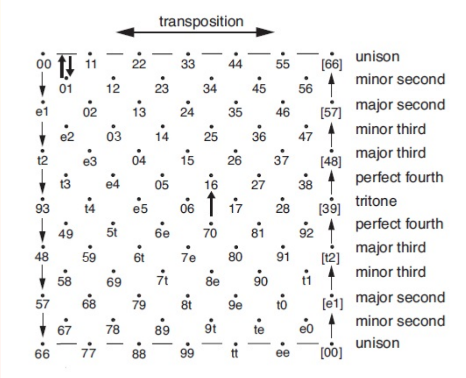
Zagadnienie 1 - rozwiązanie

W zagadnieniu pierwszym szukaliśmy $f : X \to \mathbb{S}^1$; $f(\{a, a\}) = a$.

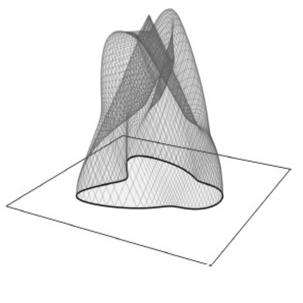
Niech $\Delta : \mathbb{S}^1 \ni x \to \{x, x\} \in \partial X = \partial M$. Gdyby system głosowania f istniał to funkcja $\Delta \circ f$ byłaby retrakcją wstęgi Möbiusa na jej brzeg — sprzeczność.

W zagadnieniu pierwszym szukaliśmy $f : X \to \mathbb{S}^1$; $f(\{a, a\}) = a$. Niech $\Delta : \mathbb{S}^1 \ni x \to \{x, x\} \in \partial X = \partial M$. Gdyby system głosowania f istniał to funkcja $\Delta \circ f$ byłaby retrakcją wstęgi Möbiusa na jej brzeg — sprzeczność.

Przestrzenią dwudźwięków jest po prostu wstęga Möbiusa.

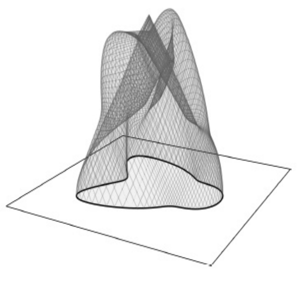


Udowodniliśmy, że nieistnienie prostokąta wpisanego w krzywą γ jest równoważne istnieniu zanurzenia g zbioru X w przestrzeń $\mathbb{R}^3$, które dla $x \in \partial X$ spełnia warunek $g(\{x, x\}) = (\gamma(x), 0)$, a dla $x \in int\ X$ ostatnia współrzędna jest dodatnia:



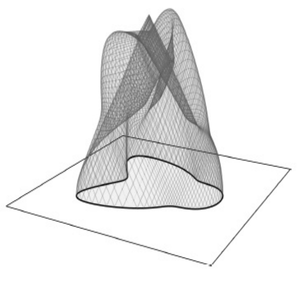
Zagadnienie 3 - rozwiązanie

Udowodniliśmy, że nieistnienie prostokąta wpisanego w krzywą γ jest równoważne istnieniu zanurzenia g zbioru X w przestrzeń $\mathbb{R}^3$, które dla $x \in \partial X$ spełnia warunek $g(\{x, x\}) = (\gamma(x), 0)$, a dla $x \in int\ X$ ostatnia współrzędna jest dodatnia:



Dodatkowo, korzystając z twierdzenia Schönfliesa, homeomorfizm $(\gamma, 0) : \mathbb{S}^1 \to \gamma(\mathbb{S}^1) \times \{0\}$ można przedłużyć do homeomorfizmu: $\gamma^* : \overline{\mathbb{D}^2} \to D^2(\gamma) \times \{0\}$, gdzie przez $D^2(\gamma)$ oznaczam domknięty obszar ograniczony przez krzywą γ.

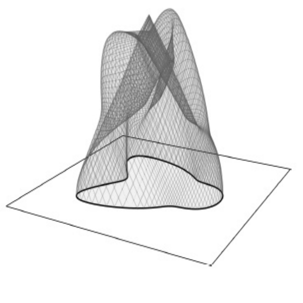
Zagadnienie 3 - rozwiązanie



Teraz odwzorowanie f zadane na zbiorze X ze zbiorem $\overline{\mathbb{D}^2}$ doklejonym do brzegu w sposób następujący:

$$f(a) = \begin{cases} g(a), & \text{dla } a \in X \\ \gamma^*(a), & \text{dla } a \in \mathbb{D}^2 \end{cases}$$

jest ciągłe, ze względu na warunek $g(\{x,x\}) = (\gamma(x), 0)$ dla $x \in \partial X$, i jest różnowartościowe, gdyż takie są odwzorowania g i γ^*, a obrazy tych odwzorowań są rozłączne.

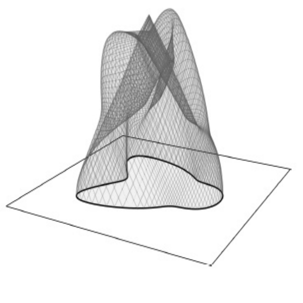


Teraz odwzorowanie f zadane na zbiorze X ze zbiorem $\overline{\mathbb{D}^2}$ doklejonym do brzegu w sposób następujący:

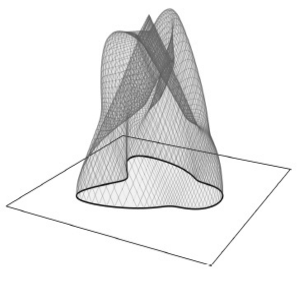
$$f(a) = \begin{cases} g(a), & \text{dla } a \in X \\ \gamma^*(a), & \text{dla } a \in \mathbb{D}^2 \end{cases}$$

jest ciągłe, ze względu na warunek $g(\{x,x\}) = (\gamma(x), 0)$ dla $x \in \partial X$, i jest różnowartościowe, gdyż takie są odwzorowania g i γ^*, a obrazy tych odwzorowań są rozłączne.

Zagadnienie 3 - rozwiązanie



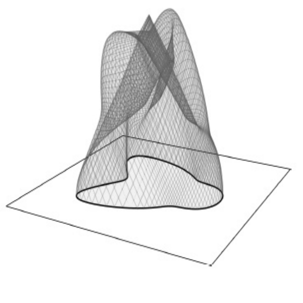
Skoro tak, funkcja f, jako ciągła i różnowartościowa, jest zanurzeniem zbioru X ze zbiorem $\overline{\mathbb{D}^2}$ doklejonym do brzegu w $\mathbb{R}^3$. Ale X jest wstęgą Möbiusa, więc X ze zbiorem $\overline{\mathbb{D}^2}$ doklejonym do brzegu jest przestrzenią rzutową RP^2, która nie może mieć zanurzenia w $\mathbb{R}^3$ - sprzeczność.
A zatem, prostokąt wpisany w krzywą γ musi istnieć.



Skoro tak, funkcja f, jako ciągła i różnowartościowa, jest zanurzeniem zbioru X ze zbiorem $\overline{\mathbb{D}^2}$ doklejonym do brzegu w $\mathbb{R}^3$. Ale X jest wstęgą Möbiusa, więc X ze zbiorem $\overline{\mathbb{D}^2}$ doklejonym do brzegu jest przestrzenią rzutową RP^2, która nie może mieć zanurzenia w $\mathbb{R}^3$ - sprzeczność.

A zatem, prostokąt wpisany w krzywą γ musi istnieć.

Zagadnienie 3 - rozwiązanie



Skoro tak, funkcja f, jako ciągła i różnowartościowa, jest zanurzeniem zbioru X ze zbiorem $\overline{\mathbb{D}^2}$ doklejonym do brzegu w $\mathbb{R}^3$. Ale X jest wstęgą Möbiusa, więc X ze zbiorem $\overline{\mathbb{D}^2}$ doklejonym do brzegu jest przestrzenią rzutową RP^2, która nie może mieć zanurzenia w $\mathbb{R}^3$ - sprzeczność.
A zatem, prostokąt wpisany w krzywą γ musi istnieć.

Zagadnienie 1 - teoria głosowań

Klasyczne zagadnienie teorii głosowań

Dany jest skończony zbiór X – zbiór opcji oraz n – liczba głosujących. Preferencją nazywamy liniowy porządek na zbiorze X (ew. dopuszczający równości). Poszukujemy systemu głosowania: funkcji F, która dowolnemu układowi preferencji głosujących przyporządkowuje jedną „preferencję grupy” i spełnia pewne „logiczne” założenia.

Twierdzenie Arrowa

- (Niezależność od opcji nieistotnych) Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w wyniku musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Np. jeśli grupa ma wybierać pomiędzy opcjami A i B, dla wyniku nie jest istotne, czy któryś z głosujących stawia opcję C powyżej dwu pierwszych, czy nie.
- (Monotoniczność) Jeśli wyborca zmieni preferencje podnosząc ranking jednej z opcji, wynik musi albo zwiększyć ranking tej opcji, albo pozostawić go na tym samym miejscu, nie może go zaś obniżyć.
- (Suwerenność) Każdy wynik powinien być możliwy do osiągnięcia przez pewną kombinację głosów. Wykluczamy więc procedury, w których pewne rozstrzygnięcia są niemożliwe niezależnie od woli wyborców.

Twierdzenie Arrowa, 1951

Istnieje dokładnie jeden system głosowania F, spełniający te warunki. Jest to... rzutowanie na jedną ze współrzędnych, czyli dyktatura.

- (Niezależność od opcji nieistotnych) Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w wyniku musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Np. jeśli grupa ma wybierać pomiędzy opcjami A i B, dla wyniku nie jest istotne, czy któryś z głosujących stawia opcję C powyżej dwu pierwszych, czy nie.
- (Monotoniczność) Jeśli wyborca zmieni preferencje podnosząc ranking jednej z opcji, wynik musi albo zwiększyć ranking tej opcji, albo pozostawić go na tym samym miejscu, nie może go zaś obniżyć.
- (Suwerenność) Każdy wynik powinien być możliwy do osiągnięcia przez pewną kombinację głosów. Wykluczamy więc procedury, w których pewne rozstrzygnięcia są niemożliwe niezależnie od woli wyborców.

Twierdzenie Arrowa, 1951

Istnieje dokładnie jeden system głosowania F, spełniający te warunki. Jest to... rzutowanie na jedną ze współrzędnych, czyli dyktatura.

Twierdzenie Arrowa

- (Niezależność od opcji nieistotnych) Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w wyniku musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Np. jeśli grupa ma wybierać pomiędzy opcjami A i B, dla wyniku nie jest istotne, czy któryś z głosujących stawia opcję C powyżej dwu pierwszych, czy nie.
- (Monotoniczność) Jeśli wyborca zmieni preferencje podnosząc ranking jednej z opcji, wynik musi albo zwiększyć ranking tej opcji, albo pozostawić go na tym samym miejscu, nie może go zaś obniżyć.
- (Suwerenność) Każdy wynik powinien być możliwy do osiągnięcia przez pewną kombinację głosów. Wykluczamy więc procedury, w których pewne rozstrzygnięcia są niemożliwe niezależnie od woli wyborców.

Twierdzenie Arrowa, 1951

Istnieje dokładnie jeden system głosowania F, spełniający te warunki. Jest to... rzutowanie na jedną ze współrzędnych, czyli dyktatura.

Twierdzenie Arrowa

- (Niezależność od opcji nieistotnych) Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w wyniku musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Np. jeśli grupa ma wybierać pomiędzy opcjami A i B, dla wyniku nie jest istotne, czy któryś z głosujących stawia opcję C powyżej dwu pierwszych, czy nie.
- (Monotoniczność) Jeśli wyborca zmieni preferencje podnosząc ranking jednej z opcji, wynik musi albo zwiększyć ranking tej opcji, albo pozostawić go na tym samym miejscu, nie może go zaś obniżyć.
- (Suwerenność) Każdy wynik powinien być możliwy do osiągnięcia przez pewną kombinację głosów. Wykluczamy więc procedury, w których pewne rozstrzygnięcia są niemożliwe niezależnie od woli wyborców.

Twierdzenie Arrowa, 1951

Istnieje dokładnie jeden system głosowania F, spełniający te warunki. Jest to... rzutowanie na jedną ze współrzędnych, czyli dyktatura.

- (Niezależność od opcji nieistotnych) Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w wyniku musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Np. jeśli grupa ma wybierać pomiędzy opcjami A i B, dla wyniku nie jest istotne, czy któryś z głosujących stawia opcję C powyżej dwu pierwszych, czy nie.
- (Monotoniczność) Jeśli wyborca zmieni preferencje podnosząc ranking jednej z opcji, wynik musi albo zwiększyć ranking tej opcji, albo pozostawić go na tym samym miejscu, nie może go zaś obniżyć.
- (Suwerenność) Każdy wynik powinien być możliwy do osiągnięcia przez pewną kombinację głosów. Wykluczamy więc procedury, w których pewne rozstrzygnięcia są niemożliwe niezależnie od woli wyborców.

Twierdzenie Arrowa, 1951

Istnieje dokładnie jeden system głosowania F, spełniający te warunki. Jest to... rzutowanie na jedną ze współrzędnych, czyli dyktatura.

Twierdzenie Arrowa

- (Niezależność od opcji nieistotnych) Jeśli ograniczymy zakres opcji do dowolnego podzbioru, względna kolejność opcji w wyniku musi pozostać taka sama jak w pełnym zbiorze. Np. jeśli grupa ma wybierać pomiędzy opcjami A i B, dla wyniku nie jest istotne, czy któryś z głosujących stawia opcję C powyżej dwu pierwszych, czy nie.
- (Monotoniczność) Jeśli wyborca zmieni preferencje podnosząc ranking jednej z opcji, wynik musi albo zwiększyć ranking tej opcji, albo pozostawić go na tym samym miejscu, nie może go zaś obniżyć.
- (Suwerenność) Każdy wynik powinien być możliwy do osiągnięcia przez pewną kombinację głosów. Wykluczamy więc procedury, w których pewne rozstrzygnięcia są niemożliwe niezależnie od woli wyborców.

Twierdzenie Arrowa, 1951

Istnieje dokładnie jeden system głosowania F, spełniający te warunki. Jest to... rzutowanie na jedną ze współrzędnych, czyli dyktatura.

W topologicznej teorii głosowań (z której wynikają wszystkie wyniki teorii klasycznej) najsłynniejszym wynikiem jest poniższe twierdzenie:

Twierdzenie (Chichilnisky, Heal; Eckmann)

Jeśli przestrzeń możliwych rezultatów głosowania jest spójnym CW-kompleksem (uogólnionym wielościanem) złożonym ze skończonej ilości komórek, to istnienie systemu głosowania spełaniającego aksjomaty symetrii i jednomyślności dla dowolnej liczby wybroców jest równoważne ściągalności P.

Square Peg Problem

Każda ciągła krzywa zwyczajna, zamknięta na płaszczyźnie $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ zawiera 4 różne punkty, które są wierzchołkami tego samego kwadratu.

Hipoteza ta ciągle nie jest rozstrzygnięta w tej formie, ale istnieje wiele wyników częściowych sprawiających, że nie są znane rozwiązania tylko w „przypadkach patologicznych”. Na kolejnym slajdzie, kilka przykładowych wyników.

Hipoteza Toeplitza

Square Peg Problem

Każda ciągła krzywa zwyczajna, zamknięta na płaszczyźnie $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ zawiera 4 różne punkty, które są wierzchołkami tego samego kwadratu.

Hipoteza ta ciągle nie jest rozstrzygnięta w tej formie, ale istnieje wiele wyników częściowych sprawiających, że nie są znane rozwiązania tylko w „przypadkach patologicznych". Na kolejnym slajdzie, kilka przykładowych wyników.

Hipoteza Toeplitza

- W 1917 Emch udowodnił hipotezę Toeplitza dla krzywych kawałkami analitycznych.
- Schnirelman w 1927 z poprawką Guggenheima w 1965 udowodnił ją dla krzywych o ograniczonej krzywiźnie.
- Christiansen 1950 - krzywe wypukłe.
- Cantarella, Denne, McCleary 2014 - na krzywych klasy C^1 liczba takich kwadratów jest nieparzysta lub nieskończona.
- Tao 2017 - dla krzywych kawałkami Lipschitzowskich o małej stałej Lipschitza.

- W 1917 Emch udowodnił hipotezę Toeplitza dla krzywych kawałkami analitycznych.
- Schnirelman w 1927 z poprawką Guggenheima w 1965 udowodnił ją dla krzywych o ograniczonej krzywiźnie.
- Christiansen 1950 - krzywe wypukłe.
- Cantarella, Denne, McCleary 2014 - na krzywych klasy C^1 liczba takich kwadratów jest nieparzysta lub nieskończona.
- Tao 2017 - dla krzywych kawałkami Lipschitzowskich o małej stałej Lipschitza.

Hipoteza Toeplitza

- W 1917 Emch udowodnił hipotezę Toeplitza dla krzywych kawałkami analitycznych.
- Schnirelman w 1927 z poprawką Guggenheima w 1965 udowodnił ją dla krzywych o ograniczonej krzywiźnie.
- Christiansen 1950 - krzywe wypukłe.
- Cantarella, Denne, McCleary 2014 - na krzywych klasy C^1 liczba takich kwadratów jest nieparzysta lub nieskończona.
- Tao 2017 - dla krzywych kawałkami Lipschitzowskich o małej stałej Lipschitza.

Hipoteza Toeplitza

- W 1917 Emch udowodnił hipotezę Toeplitza dla krzywych kawałkami analitycznych.
- Schnirelman w 1927 z poprawką Guggenheima w 1965 udowodnił ją dla krzywych o ograniczonej krzywiźnie.
- Christiansen 1950 - krzywe wypukłe.
- Cantarella, Denne, McCleary 2014 - na krzywych klasy $\mathcal{C}^1$ liczba takich kwadratów jest nieparzysta lub nieskończona.
- Tao 2017 - dla krzywych kawałkami Lipschitzowskich o małej stałej Lipschitza.

Hipoteza Toeplitza

- W 1917 Emch udowodnił hipotezę Toeplitza dla krzywych kawałkami analitycznych.
- Schnirelman w 1927 z poprawką Guggenheima w 1965 udowodnił ją dla krzywych o ograniczonej krzywiźnie.
- Christiansen 1950 - krzywe wypukłe.
- Cantarella, Denne, McCleary 2014 - na krzywych klasy $\mathcal{C}^1$ liczba takich kwadratów jest nieparzysta lub nieskończona.
- Tao 2017 - dla krzywych kawałkami Lipschitzowskich o małej stałej Lipschitza.

Hipoteza Toeplitza

- W 1917 Emch udowodnił hipotezę Toeplitza dla krzywych kawałkami analitycznych.
- Schnirelman w 1927 z poprawką Guggenheima w 1965 udowodnił ją dla krzywych o ograniczonej krzywiźnie.
- Christiansen 1950 - krzywe wypukłe.
- Cantarella, Denne, McCleary 2014 - na krzywych klasy $\mathcal{C}^1$ liczba takich kwadratów jest nieparzysta lub nieskończona.
- Tao 2017 - dla krzywych kawałkami Lipschitzowskich o małej stałej Lipschitza.

Twierdzenie o wpisywaniu trójkątów (Nielsen)

Dla dowolnego trójkąta T, w każdą ciągłą krzywą zwyczajną, zamkniętą na płaszczyźnie można wpisać nieskończenie wiele trójkątów podobnych do T. Ponadto, miejsca, w których mogą się znajdować wierzchołki takich trójkątów tworzą zbiory gęste na tej krzywej.

Możliwość wpisania w daną krzywą prostokąta o zadanej proporcji boków jest zagadnieniem otwartym, nawet w przypadku krzywych klasy C^∞. Podobnie jest w wypadku innych czworokątów, które można wpisać w okrąg.

Twierdzenie o wpisywaniu trójkątów (Nielsen)

Dla dowolnego trójkąta T, w każdą ciągłą krzywą zwyczajną, zamkniętą na płaszczyźnie można wpisać nieskończenie wiele trójkątów podobnych do T. Ponadto, miejsca, w których mogą się znajdować wierzchołki takich trójkątów tworzą zbiory gęste na tej krzywej.

Możliwość wpisania w daną krzywą prostokąta o zadanej proporcji boków jest zagadnieniem otwartym, nawet w przypadku krzywych klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Podobnie jest w wypadku innych czworokątów, które można wpisać w okrąg.

Twierdzenie o wpisywaniu trójkątów (Nielsen)

Dla dowolnego trójkąta T, w każdą ciągłą krzywą zwyczajną, zamkniętą na płaszczyźnie można wpisać nieskończenie wiele trójkątów podobnych do T. Ponadto, miejsca, w których mogą się znajdować wierzchołki takich trójkątów tworzą zbiory gęste na tej krzywej.

Możliwość wpisania w daną krzywą prostokąta o zadanej proporcji boków jest zagadnieniem otwartym, nawet w przypadku krzywych klasy $\mathcal{C}^\infty$. Podobnie jest w wypadku innych czworokątów, które można wpisać w okrąg.

Odpowiednik hipotezy Toeplitza jest fałszywy dla n-kątów przy $n > 4$. Dla odpowiednika więcej niż 2-wymiarowego zagadnienia Toeplitza, najciekawsze twierdzenie jakie znalazłem brzmi tak:

Twierdzenie o wpisywaniu hipeośmiościanów (Makaev, Karasev)

Niech m będzie liczbą nieparzystą, p - liczbą pierwszą, a $n = p^m$. Wtedy w każde gładkie zanurzenie $\Gamma : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ zawiera wierzchołki regularnego hiperośmiościanu, czyli obiektu podobnego do zbioru $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \ldots + |x_n| = 1\}$

Co ciekawe, twierdzenie nie działa dla hipersześcianów (kostek), nawet dla $n = 3$.

Odpowiednik hipotezy Toeplitza jest fałszywy dla n-kątów przy $n > 4$. Dla odpowiednika więcej niż 2-wymiarowego zagadnienia Toeplitza, najciekawsze twierdzenie jakie znalazłem brzmi tak:

Twierdzenie o wpisywaniu hipeośmiościanów (Makaev, Karasev)

Niech m będzie liczbą nieparzystą, p - liczbą pierwszą, a $n = p^m$. Wtedy w każde gładkie zanurzenie $\Gamma : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ zawiera wierzchołki regularnego hiperośmiościanu, czyli obiektu podobnego do zbioru $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \ldots + |x_n| = 1\}$

Co ciekawe, twierdzenie nie działa dla hipersześcianów (kostek), nawet dla $n = 3$.

Jeśli przez wpisanie zbioru S w uogólniony wielościan P rozumiemy, że S zawarte jest w zbiorze ograniczonym przez P i każda „uogólniona ściana” P ma z S punkt wspólny, to można uzyskać twierdzenie

Twierdzenie o wpisywaniu w kostki (Kakutani, Yamabe, Yujobo)

Każdy zwarty, wypukły zbiór o niepustym wnętrzu może być wpisany w n-wymiarowy hipersześcian (kostkę).

Praktyczne tworzenie wstęgi Möbiusa

Jeśli w praktyce chcemy stworzyć wstęgę Möbiusa z materiału, który można zginać w sposób „gładki”, ale nie rozciągać (np. z papieru), to warto pamiętać, że stosunek dłuższego boku prostokąta, z którego tę wstęgę tworzymy, do krótszego, musi wynosić co najmniej $\sqrt{3}$. Jeśli koniecznie chcemy skonstruować taką wstęgę z szerszego prostokąta, musimy zacząć od zrobienia z prostokąta węższej „harmonijki”.

Bardziej szczegółowe badania nad możliwością tworzenia wstęg Möbiusa z różnych materiałów, oraz nad wewnętrznymi napięciami, jakim taka wstęga podlega opublikowali w Nature: Materials w 2007 roku Starostin i van der Heijden.

Praktyczne tworzenie wstęgi Möbiusa

Jeśli w praktyce chcemy stworzyć wstęgę Möbiusa z materiału, który można zginać w sposób „gładki”, ale nie rozciągać (np. z papieru), to warto pamiętać, że stosunek dłuższego boku prostokąta, z którego tę wstęgę tworzymy, do krótszego, musi wynosić co najmniej $\sqrt{3}$. Jeśli koniecznie chcemy skonstruować taką wstęgę z szerszego prostokąta, musimy zacząć od zrobienia z prostokąta węższej „harmonijki”.

Bardziej szczegółowe badania nad możliwością tworzenia wstęg Möbiusa z różnych materiałów, oraz nad wewnętrznymi napięciami, jakim taka wstęga podlega opublikowali w Nature: Materials w 2007 roku Starostin i van der Heijden.

Praktyczne tworzenie wstęgi Möbiusa

Jeśli w praktyce chcemy stworzyć wstęgę Möbiusa z materiału, który można zginać w sposób „gładki”, ale nie rozciągać (np. z papieru), to warto pamiętać, że stosunek dłuższego boku prostokąta, z którego tę wstęgę tworzymy, do krótszego, musi wynosić co najmniej $\sqrt{3}$. Jeśli koniecznie chcemy skonstruować taką wstęgę z szerszego prostokąta, musimy zacząć od zrobienia z prostokąta węższej „harmonijki”.
Bardziej szczegółowe badania nad możliwością tworzenia wstęg Möbiusa z różnych materiałów, oraz nad wewnętrznymi napięciami, jakim taka wstęga podlega opublikowali w Nature: Materials w 2007 roku Starostin i van der Heijden.

Zastosowania technologiczne wstęgi Möbiusa

Takie badania nie są czysto abstrakcyjną fanaberią: stworzone z różnych materiałów wstęgi Möbiusa przydają się w praktyce. W szczególności, długie pasy w przekaźnikach taśmowych (taśmociągach) są często formowane w kształt wstęgi Möbiusa. Niektóre takie pasy są naprawdę długie (do 20 km), więc równomierne zużycie całej powierzchni (a nie tylko jej połowy, jak w wypadku powierzchni dwustronnych) prowadzi do sporych oszczędności.

Inne technologiczne zastosowania są na razie albo przeszłością (taśmy w maszynach do pisania) lub przyszłością (rezystory bezindukcyjne).

Takie badania nie są czysto abstrakcyjną fanaberią: stworzone z różnych materiałów wstęgi Möbiusa przydają się w praktyce. W szczególności, długie pasy w przekaźnikach taśmowych (taśmociągach) są często formowane w kształt wstęgi Möbiusa. Niektóre takie pasy są naprawdę długie (do 20 km), więc równomierne zużycie całej powierzchni (a nie tylko jej połowy, jak w wypadku powierzchni dwustronnych) prowadzi do sporych oszczędności.

Inne technologiczne zastosowania są na razie albo przeszłością (taśmy w maszynach do pisania) lub przyszłością (rezystory bezindukcyjne).

Zastosowania technologiczne wstęgi Möbiusa

Takie badania nie są czysto abstrakcyjną fanaberią: stworzone z różnych materiałów wstęgi Möbiusa przydają się w praktyce. W szczególności, długie pasy w przekaźnikach taśmowych (taśmociągach) są często formowane w kształt wstęgi Möbiusa. Niektóre takie pasy są naprawdę długie (do 20 km), więc równomierne zużycie całej powierzchni (a nie tylko jej połowy, jak w wypadku powierzchni dwustronnych) prowadzi do sporych oszczędności.

Inne technologiczne zastosowania są na razie albo przeszłością (taśmy w maszynach do pisania) lub przyszłością (rezystory bezindukcyjne).

Zastosowania technologiczne wstęgi Möbiusa

Takie badania nie są czysto abstrakcyjną fanaberią: stworzone z różnych materiałów wstęgi Möbiusa przydają się w praktyce. W szczególności, długie pasy w przekaźnikach taśmowych (taśmociągach) są często formowane w kształt wstęgi Möbiusa. Niektóre takie pasy są naprawdę długie (do 20 km), więc równomierne zużycie całej powierzchni (a nie tylko jej połowy, jak w wypadku powierzchni dwustronnych) prowadzi do sporych oszczędności.
Inne technologiczne zastosowania są na razie albo przeszłością (taśmy w maszynach do pisania) lub przyszłością (rezystory bezindukcyjne).

Ciekawostka - wstęgi medalowe

Wstęgi na których wieszane są medale (np. na igrzyskach olimpijskich) są najczęściej wykonane w kształcie wstęgi Möbiusa, co pozawala na większą stabilność zawieszonych medali (mają większą tendencję do opierania się o ciało zamiast obracania wokół własnej osi, gdy medalista się poruszy).

Ciekawostka - wstęga Möbiusa w naturze

Wyciąg z afrykańskiej rośliny *Oldenlandia affinis* był używany ziołoleczniczo w celu zmniejszenia ryzyka wystąpienia komplikacji przy porodach. Podczas badania substancji aktywnej w nim zawartej - białka Kalata B1, okazało się, że białko to zawiera strukturę odpowiadającą wstędze Möbiusa.

Zastosowania, o których lepiej nie wspominać

- Rozcinanie bułek - *A mathematician explains the best way to cut a bagel*
- „Topologia” lacanowska

- Rozcinanie bułek - *A mathematician explains the best way to cut a bagel*
- „Topologia” lacanowska

Zastosowania, o których lepiej nie wspominać

- Rozcinanie bułek - *A mathematician explains the best way to cut a bagel*
- „Topologia” lacanowska

- Muzyka - *J.S. Bach - Crab Canon on a Möbius Strip*
- Bajka - *Wind and Mr. Ug*
- „Magiczne” sztuczki z rozcinaniem (np. afgańskie wstęgi).

Walory rozrywkowe

- Muzyka - *J.S. Bach - Crab Canon on a Möbius Strip*
- Bajka - *Wind and Mr. Ug*
- „Magiczne" sztuczki z rozcinaniem (np. afgańskie wstęgi).

Walory rozrywkowe

- Muzyka - *J.S. Bach - Crab Canon on a Möbius Strip*
- Bajka - *Wind and Mr. Ug*
- „Magiczne" sztuczki z rozcinaniem (np. afgańskie wstęgi).

Walory rozrywkowe

- Muzyka - *J.S. Bach - Crab Canon on a Möbius Strip*
- Bajka - *Wind and Mr. Ug*
- „Magiczne” sztuczki z rozcinaniem (np. afgańskie wstęgi).

Dziękuję za uwagę.