Liczby nadrzeczywiste i gry Hackenbusha

Adam Dzedzej

Uniwersytet Gdański

Wola Ducka
25 sierpnia 2018

Liczby naturalne

Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. John von Neumann

Tak proponuje konstruować liczby naturalne:

- $0 = \{\} = \varnothing$,

Liczby naturalne

Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. John von Neumann

Tak proponuje konstruować liczby naturalne:

- $0 = \{\} = \varnothing$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\}$,

Liczby naturalne

Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. John von Neumann

Tak proponuje konstruować liczby naturalne:

- $0 = \{\} = \varnothing$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

Liczby naturalne

Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. John von Neumann

Tak proponuje konstruować liczby naturalne:

- $0 = \{\} = \varnothing$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,

Liczby naturalne

Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. John von Neumann

Tak proponuje konstruować liczby naturalne:

- $0 = \{\} = \varnothing$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
- $n = n - 1 \cup \{n - 1\} = \{0, 1, \ldots, n - 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \ldots, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \ldots\}\}$,

Liczby naturalne

Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them. John von Neumann

Tak proponuje konstruować liczby naturalne:

- $0 = \{\} = \varnothing$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
- $n = n - 1 \cup \{n - 1\} = \{0, 1, \ldots, n - 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \ldots, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \ldots\}\}$,

czyli każda jest zbiorem wszystkich mniejszych.
Można też jak Zermelo $n = \{n - 1\}$.

Liczby porządkowe

i idziemy dalej

- $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

Liczby porządkowe

i idziemy dalej

- $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$,

Liczby porządkowe

i idziemy dalej

- $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$,
- $\omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$,

Liczby porządkowe

i idziemy dalej

- $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$,
- $\omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$,
- $\omega \cdot 3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots\}$,

Liczby porządkowe

i idziemy dalej

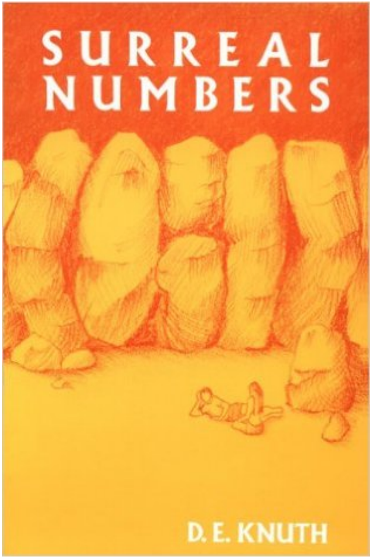
- $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$,
- $\omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$,
- $\omega \cdot 3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots\}$,
- $\omega \cdot \omega = \omega^2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \omega\cdot 2+2, \ldots, \ldots\}$,

Liczby porządkowe

i idziemy dalej

- $\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$,
- $\omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$,
- $\omega \cdot 3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots\}$,
- $\omega \cdot \omega = \omega^2 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \omega\cdot 2+2, \ldots, \ldots\}$,
- $\omega^\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \ldots, \ldots, \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \ldots, \ldots\}$,

Liczby nadrzeczywiste



How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness

Jak pisze Knuth na swojej stronie:

Don't believe anybody who tells you that the publishers are out of stock! The twenty-first printing was made in July 2016.

romans z matematyką

Liczby nadrzeczywiste

- Dzień 0: $\varnothing = \{|\}$,

Liczby nadrzeczywiste

- Dzień 0: $\varnothing = \{|\}$,
- Dzień 1: $-1 = \{|\ 0\} < 0 < \{0\ |\}$,

Liczby nadrzeczywiste

- Dzień 0: $\varnothing = \{|\}$,
- Dzień 1: $-1 = \{|\,0\} < 0 < \{0\,|\}$,
- Dzień 2:

$$
\begin{aligned}
&-2 = \{|\,-1\} = \{|\,-1,0\} = \{|\,-1,1\} = \{|\,-1,0,1\} \\
&< -1 = \{|\,0\} = \{|\,0,1\} \\
&< -\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\} = \{-1 \mid 0,1\} \\
&< 0 = \{|\} = \{-1\,|\} = \{|\,1\} = \{-1 \mid 1\} \\
&< \frac{1}{2} = \{0 \mid 1\} = \{-1,0 \mid 1\} \\
&< 1 = \{0\,|\} = \{-1,0\,|\} \\
&< 2 = \{1\,|\} = \{0,1\,|\} = \{-1,1\,|\} = \{-1,0,1\,|\}
\end{aligned}
$$

Liczby nadrzeczywiste

- Dzień 0: $\varnothing = \{|\}$,
- Dzień 1: $-1 = \{|\, 0\} < 0 < \{0 \,|\}$,
- Dzień 2:

$$\begin{aligned}
-2 &= \{|\, -1\} = \{|\, -1, 0\} = \{|\, -1, 1\} = \{|\, -1, 0, 1\} \\
< -1 &= \{|\, 0\} = \{|\, 0, 1\} \\
< -\frac{1}{2} &= \{-1 \mid 0\} = \{-1 \mid 0, 1\} \\
< 0 &= \{|\} = \{-1 \,|\} = \{|\, 1\} = \{-1 \mid 1\} \\
< \frac{1}{2} &= \{0 \mid 1\} = \{-1, 0 \mid 1\} \\
< 1 &= \{0 \,|\} = \{-1, 0 \,|\} \\
< 2 &= \{1 \,|\} = \{0, 1 \,|\} = \{-1, 1 \,|\} = \{-1, 0, 1 \,|\}
\end{aligned}$$

- itd.

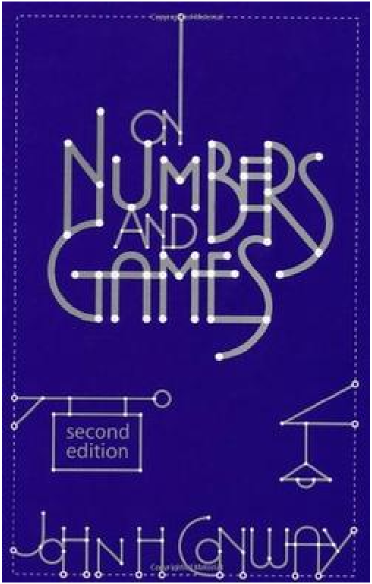
Liczby nadrzeczywiste

Zachowany jest porządek liniowy, a każda liczba ma swoją „datę urodzenia”. W dniach o skończonych numerach dostajemy liczby wymierne diadyczne.

- Dzień ω: pojawiają się wszystkie liczby rzeczywiste i różne inne stwory:
- $\omega = \{0, 1, 2, \dots \mid\}$, $-\omega = \{\mid \dots, -2, -1, 0\}$ — nieskończenie duże
- $1/\omega = \{0 \mid \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ — i nieskończenie małe

Te znaczki mają jak się okazuje sens, gdy się uda zdefiniować działania $+$ i $\cdot$.

Liczby nadrzeczywiste



I am very grateful to Knuth for inventing this name [surreal numbers]—the original of ONAG said "Because of the generality of this Class, we shall simply describe its members as numbers, without adding any restricting adjective." "Surreal Numbers" is much better!
John Horton Conway

Kategoria gier

... You get surreal numbers by playing games. I used to feel guilty in Cambridge that I spent all day playing games, while I was supposed to be doing mathematics. Then, when I discovered surreal numbers, I realized that playing games IS math.
John Horton Conway

Notacja wprowadzona wcześniej dla nowych liczb pochodzi ze świata gier kombiatorycznych.

$$G = \{G^L \mid G^R\}$$

pozycja w grze, to zestaw możliwych pozycji po ruchu **L**ewego gracza i zestaw możliwych pozycji po ruchu p**R**awego gracza. Należy jeszcze ustalić który gracz ma zaczynać.

Gry a liczby

Konstruując twory z niczego można już drugiego dnia zbudować $\{1 \mid 0\}$, które nie jest liczbą.

Definicja. Liczbą (nadrzeczywistą) nazywamy taką grę $\{G^L \mid G^R\}$, że każdy element G^L jest mniejszy od każdego elementu G^R. Porządek $<$ definiujemy razem z grami przez indukcję pozaskończoną.

Dodawanie gier

Aby dodać dwie gry $G = \{G^L \mid G^R\}$ i $H = \{H^L \mid H^R\}$ gracz wybiera, w której z nich ma zagrać i w niej robi ruch, a zatem

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}.$$

Gra $0 = \{|\}$ jest elementem neutralnym tego dodawania.

Możliwe wyniki

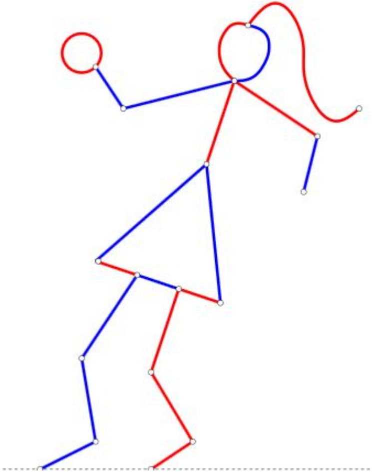
$G = 0$ oznacza, że wygrywa drugi gracz
$G > 0$ oznacza, że wygrywa Lewy gracz
$G < 0$ oznacza, że wygrywa pRawy gracz
$G || 0$ oznacza, że wygrywa pierwszy gracz
przy bezbłędnej grze graczy (każdy chce wygrać)

	$H = 0$	$H > 0$	$H < 0$	$H \| 0$
$G = 0$	$G + H = 0$	$G + H > 0$	$G + H < 0$	$G + H \|\| 0$
$G > 0$	$G + H > 0$	$G + H > 0$	$G + H \textbf{ ? } 0$	$G + H \|\| > 0$
$G < 0$	$G + H < 0$	$G + H \textbf{ ? } 0$	$G + H < 0$	$G + H < \|\| 0$
$G \|\| 0$	$G + H \|\| 0$	$G + H \|\| > 0$	$G + H < \|\| 0$	$G + H \textbf{ ? } 0$

Tablica 1: Możliwe wyniki sumy $G + H$

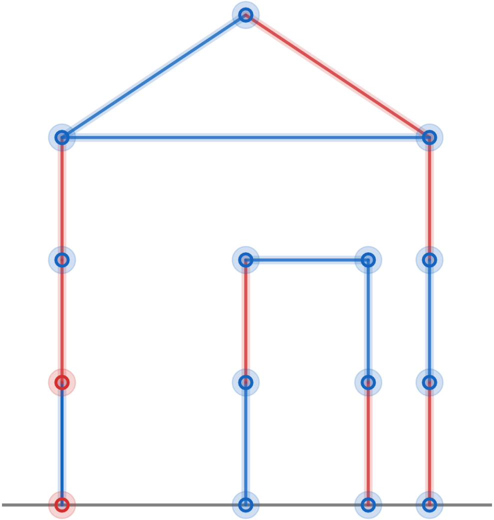
$G + H \textbf{ ? } 0$ oznacza, że wynik może być dowolny.

Hackenbush czerwono-niebieski

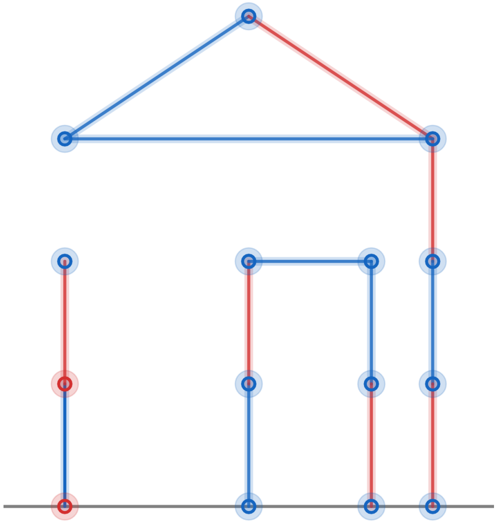


Do gry używany jest obrazek z ramką (podstawką) do której „przyczepione” są wyraźnie odróżnialne czerwone i niebieskie odcinki. Gracze na przemian zmazują po odcinku swojego koloru, przy czym, jeśli jakiś odcinek traci połączenie z ramką, to jest zmazywany.

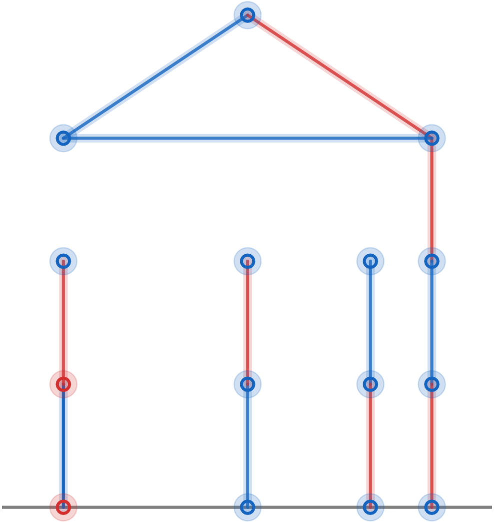
Przykład rozgrywki



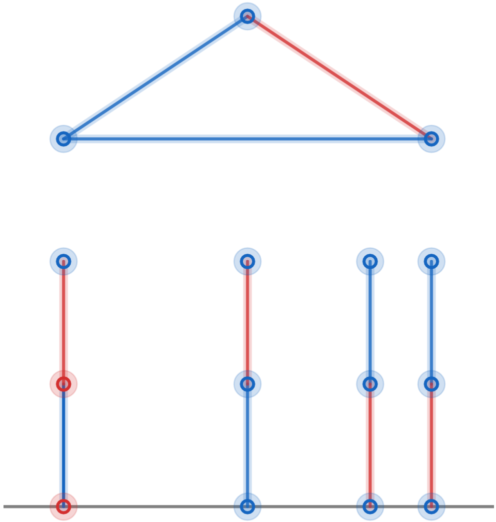
Przykład rozgrywki



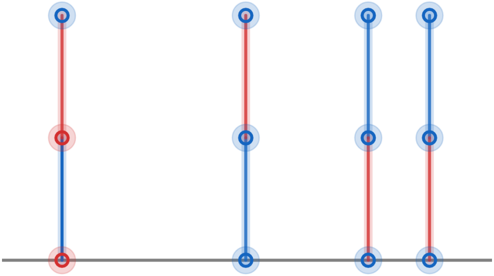
Przykład rozgrywki



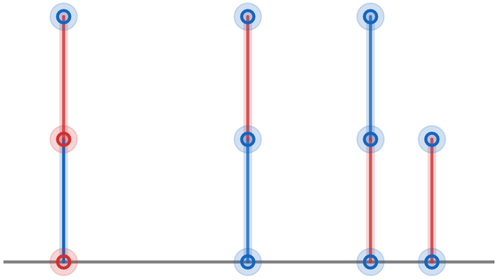
Przykład rozgrywki



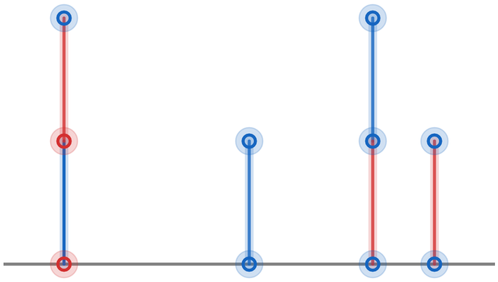
Przykład rozgrywki



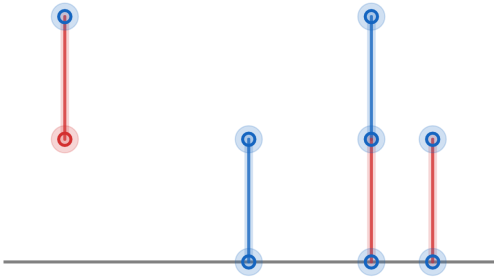
Przykład rozgrywki



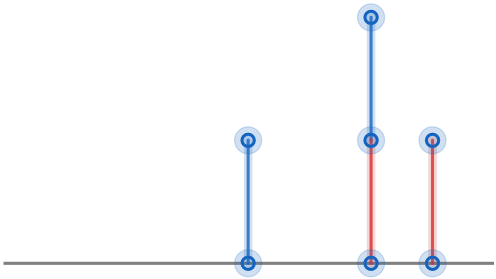
Przykład rozgrywki



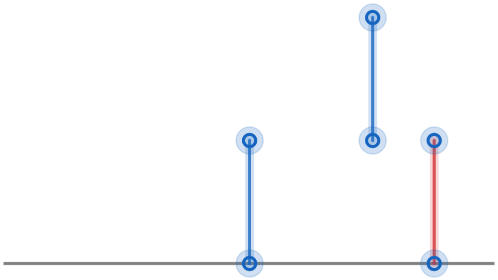
Przykład rozgrywki



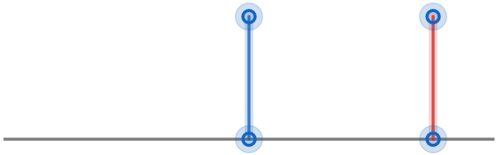
Przykład rozgrywki



Przykład rozgrywki



Przykład rozgrywki

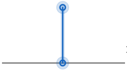


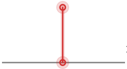
Przykład rozgrywki

Przykład rozgrywki

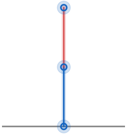
Połówka

Dość łatwo stwierdzić, że

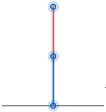
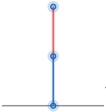
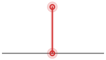
 $= \{0 \mid \} = 1$

 $= \{\mid 0\} = -1$

Obliczmy zatem wartość gry



Robimy to w ten sposób, że analizujemy grę

 $+$  $+$ 

stwierdzając, że zawsze wygra drugi.

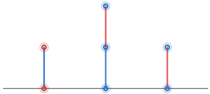
Połówka – analiza

Gdy zaczyna niebieski
zawsze dostaniemy coś takiego:

na co czerwony odpowie tak:

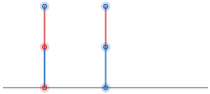
i wygra czerwony.

Gdy zaczyna czerwony
Może tak:



na co niebieski ma odpowiedź:

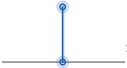
lub tak:

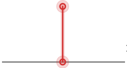


więc wygrywa zawsze niebieski.

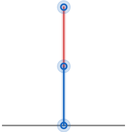
Połówka

Dość łatwo stwierdzić, że

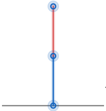
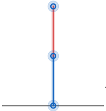
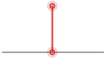
 $= \{0 \mid \} = 1$

 $= \{\mid 0\} = -1$

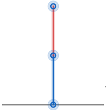
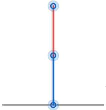
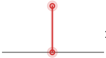
Obliczmy zatem wartość gry



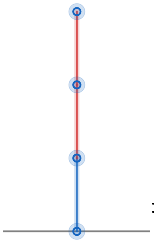
Robimy to w ten sposób, że analizujemy grę

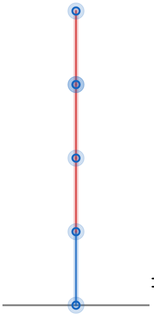
 $+$  $+$ 

stwierdzając, że zawsze wygra drugi.
Można zatem tej grze przypisać wartość 0.

 $+$  $+$  $=0$

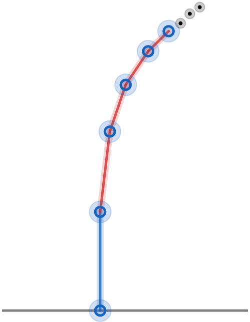
Ćwiartka i inne ułamki

 $= \frac{1}{4}$

 $= \frac{1}{8}$

Jak otrzymać $\frac{1}{3}$?

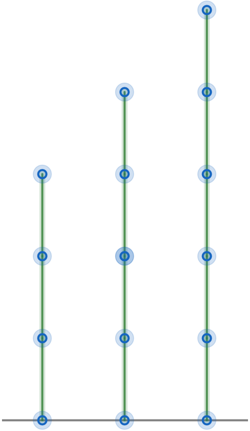
Nieskończenie mała



Zawsze wygra niebieski, więc gra jest dodatnia, ale przewaga niebieskiego jest mniejsza niż dla dowolnej pozycji o skończonej liczbie odcinków.

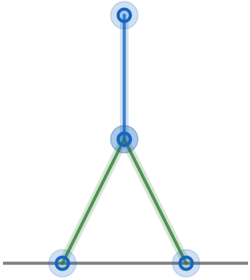
Hackenbush zielony

W tym wariancie gry wszystkie odcinki są zielone i mogą je usuwac obaj gracze. Taka gra jest pewnym uogólnieniem znanej gry NIM np.

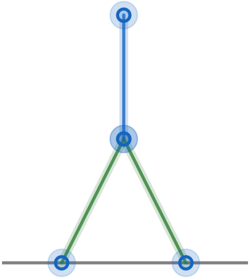
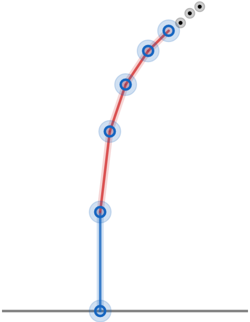


Hackenbush trójkolorowy

Wariant RGB — czerwono-zielono-niebieski jest najmniej zbadany i chciałem pokazać grę (pozycję), która mnie zaskakuje jako zbudowana z trzech jedynie odcinków.



Hackenbush trójkolorowy

$0 <$  $<$ 

Dziękuję za uwagę.