Liczby zespolone w geometrii

Antoni Augustynowicz, Uniwersytet Gdański

Ducka Wola, 24-28 sierpnia 2018

Analogia zespolona

Ulubiona analogia BB

Każde podobieństwo płaszczyzny bez zmiany orientacji jest analogią przekształcenia $z \mapsto az + b$, a ze zmianą orientacji przekształcenia $z \mapsto a\bar{z} + b$.

Jeżeli $|a| = 1$, to mamy do czynienia z izometrią.

sześciokąt równokątny o kolejnych bokach a, b, c, d, e, f

Jeżeli oś rzeczywista jest równoległa do boku a oraz $u = e^{i\pi/3}$, to

$a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 = 0$ oraz $1 + u^3 = 0$. Stąd

$$(a - d) + (b - e)u + (c - f)u^2 = 0, \quad 1 - u + u^2 = 0,$$

zatem

$$a - d = -(b - e) = c - f$$

i jest to warunek równoważny istnieniu takiego sześciokąta.

Ciało zespolone : płaszczyzna kartezjańska z mnożeniem punktów

Twierdzenie 1.

$$ab \| cd \;\Leftrightarrow\; \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}},$$

a, b, c współliniowe $\Leftrightarrow$ $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}}$,

$$ab \perp cd \;\Leftrightarrow\; \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}},$$

$\varphi = \measuredangle acb \;\Leftrightarrow\; \frac{c-b}{|c-b|} = e^{i\varphi}\frac{c-a}{|c-a|}$

Twierdzenie 2.

$|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

Załóżmy, że $|a| = |b| = 1$, wtedy

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab, \qquad \bar{c} = \frac{a+b-c}{ab}, \text{ jeżeli } C \in AB,$$

styczne do okręgu jednostkowego w a i b przecinają się w $\frac{2ab}{a+b}$,

ab i cd ($|c| = |d| = 1$) przecinają się w $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$,

jeżeli p leży na prostej ab, $|c| = 1$, to

$$pc \perp ab \;\Leftrightarrow\; p = \frac{1}{2}(a+b+c-ab\bar{c}).$$

Twierdzenie 3.

Czworokąt wpisany w okrąg

Punkty a, b, c, d leżą na okręgu $\iff$

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$$

Podobieństwo trójkątów

Trójkąty abc i pqr są podobne i jednakowo zorientowane $\iff$

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{p-r}{q-r}$$

Twierdzenie 4.

1) Punkt c dzieli segment ab w stosunku $\lambda \neq -1$

$\iff \quad c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$

2) t jest środkiem ciężkości trójkąta abc

$\iff \quad t = \frac{a+b+c}{3}$

3) Jeżeli h jest ortocentrum, a s środkiem okręgu opisanego na trójkącie abc, to

$$h + 2s = a + b + c$$

Przykład 1.

S - środek okręgu opisanego, H - ortocentrum trójkąta ABC.

Niech Q będzie takie, że S jest środkiem odcinka HQ, a T_1, T_2, T_3 niech będą środkami ciężkości odpowiednio trójkątów BCQ, CAQ, ABQ. Należy pokazać, że

$$AT_1 = BT_2 = CT_3 = 4R/3,$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego.

Załóżmy, że okrąg opisany jest jednostkowy, wtedy z Tw. 4

$$|a| = |b| = |c| = 1, \; s = 0, \; h = a + b + c, \; h + q = 0,$$

$$t_1 = \frac{b + c + q}{3} = -\frac{a}{3}, \quad a - t_1 = \frac{4}{3}a, \; itd.$$

Przykład 2.

$A_0A_1 \dots A_6$ jest 7-kątem foremnym. Chcemy pokazać, że

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}$$

Bok wielokąta z wierzchołka widać pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

Niech okrąg opisany będzie jednostkowy. Oznaczmy $\omega = e^{i\alpha}$, $\epsilon = \omega^2$, wtedy dla $a_0 = 1$ mamy $a_k = \epsilon^k$.

Niech $A'_k \in A_0A_3$, $|a'_k - 1| = |a_k - 1|$ $(k = 1, 2)$, wtedy ze współliniowości wynika, że należy pokazać

$$\frac{1}{a'_1 - 1} = \frac{1}{a'_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1}.$$

Ponieważ $a'_k = (a_k - 1)\omega^{3-k} + 1$, powyższe sprawdza się bez większego trudu.

Przykład 3.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o średnicy AC. Proste AB i CD przecinają się w punkcie M, a proste styczne do okręgu w punktach B i D przecinają się w punkcie N. Wieści niosą, że $MN \perp AC$.

Przyjmijmy rozważany okrąg jako jednostkowy, wtedy $c = -a$.

Z Twierdzenia 2 mamy

$n = \frac{2bd}{b+d}$, $m = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd} = \frac{2bd+ad-ab}{b+d}$, stąd

$$m - n = \frac{a(d-b)}{b+d}, \quad \bar{m} - \bar{n} = \frac{b-d}{a(b+d)},$$

zatem $\frac{m-n}{\bar{m}-\bar{n}} = -a^2 = -\frac{a-c}{\bar{a}-\bar{c}}$. Twierdzenie 1 pokazuje, że to nie są plotki.

Przykład 4 (prosta Simsona)

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg, na którym leży punkt D.

Punkty X, Y, Z są przecięciami prostych przechodzących przez D z prostymi zawierającymi boki trójkąta i do nich prostopadłych. Podobno punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

Niech $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$. Z Twierdzenia 2 mamy

$x = \frac{1}{2}(b + c + d - bc\bar{d})$ itd.

$\frac{x-y}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{abc}{d}$ itd., zatem

$$\frac{x-y}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{x-z}{\bar{x}-\bar{z}}$$

Twierdzenie 1 kończy rozważania.

Przykład 5.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

Punkty K, L, M, N są środkami odpowiednio boków AB, BC, CD, DA, a punkty H_1, H_2, H_3, H_4 są ortocentrami odpowiednio trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN. Jest przypuszczenie, że czworokąt $H_1H_2H_3H_4$ jest równoległobokiem.

Ponieważ $KH_1 \perp AN$, to

$\frac{k-h_1}{\bar{k}-\bar{h}_1} = -\frac{a-n}{\bar{a}-\bar{n}} = -\frac{a-d}{\bar{a}-\bar{d}} = ad$, zatem $\bar{h}_1 = \frac{\bar{k}ad-k+h_1}{ad}$.
Podobnie $NH_1 \perp AK$, co daje $\bar{h}_1 = \frac{\bar{n}ab-n+h_1}{ab}$.
Powyższe oraz $k = \frac{a+b}{2}$ itd. daje $h_1 = \frac{2a+b+d}{2}$.
Analogicznie $h_2 = \frac{2b+c+a}{2}$ itd. W konsekwencji $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$.
To oznacza poprawność przypuszczenia, ponieważ środki przekątnych H_1H_3 i H_2H_4 pokrywają się.

Fakt może przydatny

Ostatnie Twierdzenie.

Jeżeli okrąg jednostkowy jest styczny w p, q, r odpowiednio do bc, ca, ab, to środkiem okręgu opisanego jest

$$\frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

Ostatni przykład.

Niech S będzie środkiem okręgu opisanego, a Z wpisanego w trójkąt ABC. Jeżeli K jest środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach w punktach styczności okręgu wpisanego z bokami trójkąta ABC, to punkty S, Z, K są współliniowe.

Jeżeli okrąg wpisany jest jednostkowy,
to $z = 0$, s jest jak wyżej, a $k = \frac{p+q+r}{3}$.
Trochę rachunków, ale łatwo pokazać, że $\frac{s}{\bar{s}} = \frac{k}{\bar{k}}$

Bibliografia

Marko Radovanović,

[1] *Complex Numbers in Geometry*, The IMO Compendium Group, Olympiad Training Materials, www.imomath.com

[2] Sugestie przyjaciół i zasłyszane plotki.

Problem otwarty (dla prelegenta)

duża czekolada za rozwiązanie

Z punktu znajdującego się wewnątrz okręgu wychodzą promienie i odbijają się od tegoż okręgu zgodnie z prawami fizyki. Jakie jest miejsce geometryczne tych promieni po przebyciu drogi długości równej średnicy okręgu ?

Wyszedł mi taki wzór na te miejsca w kole jednostkowym

$$z = e^{i\alpha}\left(1 + e^{i\alpha}\frac{|a - e^{i\alpha}|(2 - |a - e^{i\alpha}|)}{a - e^{i\alpha}}\right),$$

gdzie $a \in (0, 1)$ jest punktem startowym.
Trzeba opisać tą krzywą ludzkim językiem.

Nieznane analogie liczbowe

1) Co to są pierwiastki zespolone ?
2) Jak dodać dwie siódemki, aby otrzymać tuzin ?
3) Dlaczego 6:9=głowa ?
4) Ile razy większa połowa jest większa od mniejszej połowy ?
5) Co jest większe : ja czy jeden ?
6) Ile to jest dziesięć piętnastu ?
7) Czy podwojenie liczby nieparzystej może dzielić się przez 4 ?

DZIĘKUJĘ ZA CIERPLIWĄ UWAGĘ
ORAZ UWAŻNĄ CIERPLIWOŚĆ