Nieprzechodniość w porządkach zmiennych losowych

Andrzej Komisarski

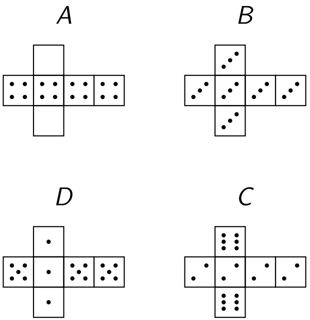
andkom@math.uni.lodz.pl

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Łódzki

LVII Szkoła Matematyki Poglądowej
26–30 stycznia 2018 r.
Wola Ducka

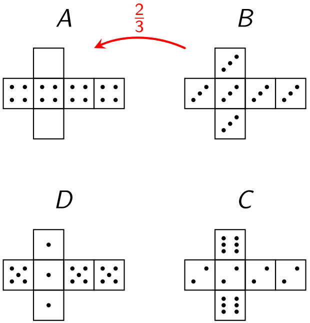
Kostki Efrona

W roku 1970 Martin Gardner opisał w dziale matematycznym *Mathematical Games* czasopisma *Scientific American* kostki do gry, odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona.



Kostki Efrona

W roku 1970 Martin Gardner opisał w dziale matematycznym *Mathematical Games* czasopisma *Scientific American* kostki do gry, odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona.

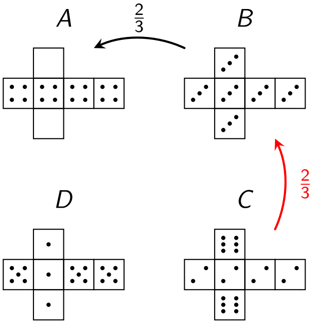


Rzucając tymi kostkami:

• z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce A, niż na B

Kostki Efrona

W roku 1970 Martin Gardner opisał w dziale matematycznym *Mathematical Games* czasopisma *Scientific American* kostki do gry, odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona.



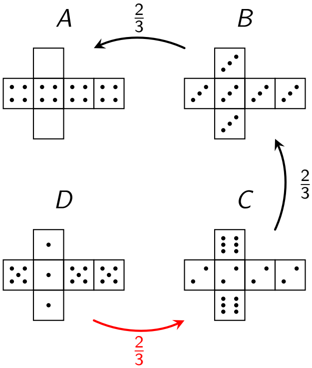
Rzucając tymi kostkami:

• z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce A, niż na B

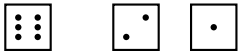
• z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na B, niż na C

Kostki Efrona

W roku 1970 Martin Gardner opisał w dziale matematycznym *Mathematical Games* czasopisma *Scientific American* kostki do gry, odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona.



$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$



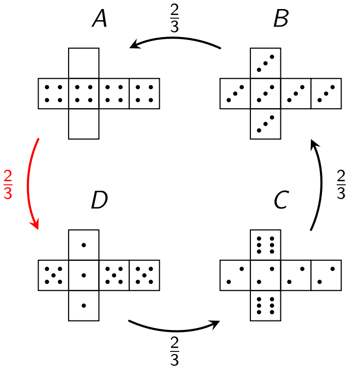
Rzucając tymi kostkami:

• z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce A, niż na B

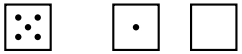
• z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na B, niż na C

• z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce C, niż na D

W roku 1970 Martin Gardner opisał w dziale matematycznym *Mathematical Games* czasopisma *Scientific American* kostki do gry, odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

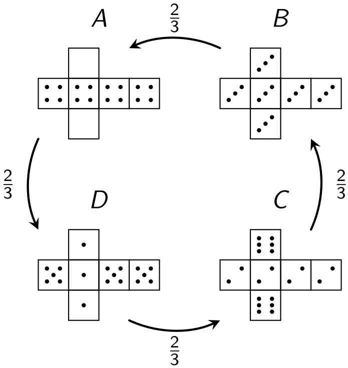


Rzucając tymi kostkami:

- z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce A, niż na B
- z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na B, niż na C
- z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce C, niż na D
- z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na D, niż na A

Kostki Efrona

W roku 1970 Martin Gardner opisał w dziale matematycznym *Mathematical Games* czasopisma *Scientific American* kostki do gry, odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona.



Rzucając tymi kostkami:

- z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce A, niż na B
- z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na B, niż na C
- z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce C, niż na D
- z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na D, niż na A

Wśród tych czterech kostek nie ma najlepszej!
Relacja między kostkami polegająca na byciu lepszą jest nieprzechodnia!

Trochę historii i powiązań

Podobne przykłady były znane już wcześniej. Najstarszy to chyba przykład H. Steinhausa i S. Trybuły z roku 1959:
Istnieją trzy niezależne zmienne losowe X, Y, Z takie, że $P(X < Y) > \frac{1}{2}$, $P(Y < Z) > \frac{1}{2}$ oraz $P(Z < X) > \frac{1}{2}$.

Paradoksy tego typu mają znaczenie w innych naukach, m.in. w ekonomii — np. w kontekście modeli użyteczności losowej (*Random Utility Models*) w mikroekonomicznej teorii wyboru i w socjologii — np. w teorii wyboru społecznego (*Social Choice Theory*).

Główny problem

Rozważmy dwuosobową grę związaną z kostkami Efrona:
Pierwszy gracz wybiera jedną z kostek A, B, C, D, drugi wybiera jedną z pozostałych, a następnie obaj rzucają wybranymi kostkami. Wygrywa ten, który uzyska więcej oczek.
Lepiej być drugim graczem: wygrywa się z p-stwem $\frac{2}{3}$.

Główny problem

Rozważmy dwuosobową grę związaną z kostkami Efrona:
Pierwszy gracz wybiera jedną z kostek A, B, C, D, drugi wybiera jedną z pozostałych, a następnie obaj rzucają wybranymi kostkami. Wygrywa ten, który uzyska więcej oczek.
Lepiej być drugim graczem: wygrywa się z p-stwem $\frac{2}{3}$.

A co by było, gdybyśmy mieli więcej przyrządów do losowania (niekoniecznie kostek)? Jak duże może być prawdopodobieństwo wygranej gracza drugiego, dla n przyrządów losujących?

Główny problem

Rozważmy dwuosobową grę związaną z kostkami Efrona:
Pierwszy gracz wybiera jedną z kostek A, B, C, D, drugi wybiera jedną z pozostałych, a następnie obaj rzucają wybranymi kostkami.
Wygrywa ten, który uzyska więcej oczek.
Lepiej być drugim graczem: wygrywa się z p-stwem $\frac{2}{3}$.

A co by było, gdybyśmy mieli więcej przyrządów do losowania (niekoniecznie kostek)? Jak duże może być prawdopodobieństwo wygranej gracza drugiego, dla n przyrządów losujących?

Niech

$$\pi_n = \sup \min_{1 \leqslant k \leqslant n} P(X_{k-1} < X_k),$$

gdzie $X_0 = X_n$ oraz supremum przebiega wszystkie układy $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ niezależnych zmiennych losowych.
Co można powiedzieć o π_n?

Co wiadomo o π_n?

Fragment pracy S. Trybuły z roku 1965:

n	π_n	n	π_n	n	π_n
3	0,61803	12	0,73870	21	0,74567
4	0,66667	13	0,74011	22	0,74601
5	0,69202	14	0,74126	23	0,74631
6	0,71688	15	0,74228	24	0,74658
7	0,72361	16	0,74304	25	0,74683
8	0,72844	17	0,74373	26	0,74704
9	0,73205	18	0,74432	27	0,74724
10	0,73481	19	0,74483	28	0,74741
11	0,73698	20	0,74528	29	0,74757
				30	0,74772

THEOREM 4. *Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent random variables and let*

$$\xi_i = P(X_i < X_{i+1}) \quad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad \xi_n = P(X_n < X_1),$$

$$\pi_n = \sup\min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

where supremum is taken over the set of all random variables $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Then

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{n(n+4)} \leqslant \pi_n < \frac{3}{4}.$$

Co wiadomo o π_n?

Fragment pracy Z. Usiskina z roku 1964:

THE VOTING PARADOX 861

TABLE 1

n	$g_n(b)$	Lower Approx.	b_n	Upper Approx.
3	$b^2 + b - 1$	$7/16 = .4375$	$(5^{\frac{1}{2}} - 1)/2 = .61803\cdots$	$5/8 = .6250$
4	$3b^2 - 2b$	$5/8 = .6250$	$2/3 = .66666\cdots$	$27/40 = .6750$
5	$b^3 + 3b^2 - 4b + 1$	$95/144 = .6597$	$.6944\cdots$	$7/10 = .7000$
6	$4b^3 - 2b^2 - 2b + 1$	$11/16 = .6875$	$2^{\frac{1}{2}}/2 = .70710\cdots$	$5/7 = .7143$
7	$b^4 + 6b^3 - 9b^2 + 3b$	$279/400 = .6975$		$81/112 = .7234$
8	$5b^4 - 9b^2 + 6b - 1$	$17/24 = .7083$		$35/48 = .7292$
9	$b^5 + 10b^4 - 15b^3 + 3b^2 + 3b - 1$	$559/784 = .7130$		$11/15 = .7333$
10	$6b^5 + 5b^4 - 24b^3 + 18b^2 - 4b$	$23/32 = .7188$	$3^{\frac{1}{2}} - 1 = .73205\cdots$	$81/110 = .7364$
20		$53/72 = .7361$		$209/280 = .7467$
25		$6255/8464 = .7390$		$243/325 = .7477$
30		$143/192 = .7448$		$637/850 = .7494$

Co wiadomo o π_n?

Fragment pracy Z. Usiskina z roku 1964:

4. Approximations to $b(n)$. Rough lower and upper bounds were constructed for $b(n)$ in Theorem 3. They are

$$\text{for } n \text{ odd:} \quad (3n^2 - 2n + 1)/4n^2 \leqq b(n) < \tfrac{3}{4}$$

$$\text{for } n \text{ even:} \quad (3n - 2)/4n \leqq b(n) < \tfrac{3}{4}.$$

A better lower bound has been constructed and a better upper bound is conjectured; namely,

$$\text{for } n \text{ odd:} \quad \tfrac{3}{4} - 1/4(n-2) - 1/16(n-2)^2 < b(n) < \tfrac{3}{4}[1 - 2/n(n+1)]$$

$$\text{for } n \text{ even:} \quad \tfrac{3}{4} - 1/4(n-2) < b(n) < \tfrac{3}{4}[1 - 2/n(n+1)].$$

5. Application. Consider n types of steel, numbered 1 to n, the bars of each type having a predetermined distribution of strength along their lengths. Randomly choose a sample bar of each type. Measure relative strength of two bars by pressing one against the other at a random place along the length of each bar—whichever breaks first is weaker. It is quite possible that each randomly chosen bar is stronger than the next and the last is stronger than the first. Let $p_i = P(i\text{th bar is stronger than the } i + 1\text{st})$. Then $b(n) = \max \min_{i=1,\cdots,n} \{p_i\}$.

Co wiadomo o π_n?

Ciąg (π_n) jest rosnący, $\lim_{n\to\infty} \pi_n = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 & \pi_4 &= \frac{2}{3} \\ \pi_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \pi_{10} &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

(równość $\pi_4 = \frac{2}{3}$ oznacza, że kostki Efrona są optymalne)

Co wiadomo o π_n?

Ciąg (π_n) jest rosnący, $\lim_{n\to\infty} \pi_n = \frac{3}{4}$

$$\begin{array}{llll} \pi_3 = & \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 & \pi_4 & = \frac{2}{3} \\ \pi_6 = & \frac{1}{\sqrt{2}} & \pi_{10} & = \sqrt{3} - 1 \end{array}$$

(równość $\pi_4 = \frac{2}{3}$ oznacza, że kostki Efrona są optymalne)

Udowodnię, że

$$\pi_n = 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$$

Co wiadomo o π_n?

Ciąg (π_n) jest rosnący, $\lim_{n\to\infty} \pi_n = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 & \pi_4 &= \frac{2}{3} \\ \pi_6 &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}} & \pi_{10} &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

(równość $\pi_4 = \frac{2}{3}$ oznacza, że kostki Efrona są optymalne)

Udowodnię, że

$$\pi_n = 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$$

W szczególności, $\pi_8 = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$

$\pi_{2^n-2} = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ dla $n \geqslant 2$ ($n-1$ dwójek oraz $n-2$ pierwiastki)

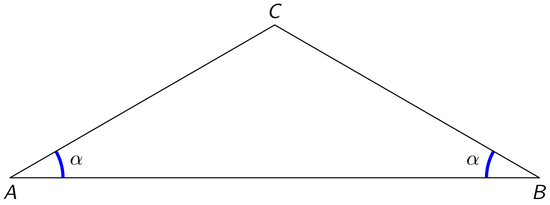
$\pi_{3\cdot 2^n-2} = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{3}}}$ dla $n \geqslant 1$ ($n-1$ dwójek, trójka i $n-1$ pierwiastków)

Tylko $\pi_2 = \frac{1}{2}$ i $\pi_4 = \frac{2}{3}$ (oraz $\pi_1 = 0$) są wymierne

Trochę geometrii na początek

Niech

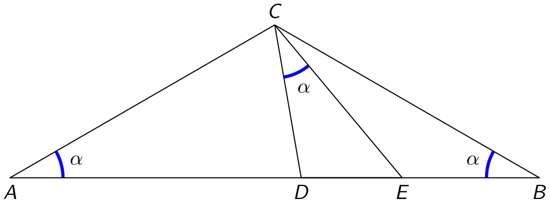
- $\triangle ABC$ – trójkąt równoramienny
- $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha \leqslant 60^\circ$



Trochę geometrii na początek

Niech

- $\triangle ABC$ – trójkąt równoramienny
- $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha \leqslant 60^\circ$
- punkty D oraz E leżą na boku AB, przy czym $AD < AE$
- $\sphericalangle ECD = \alpha$

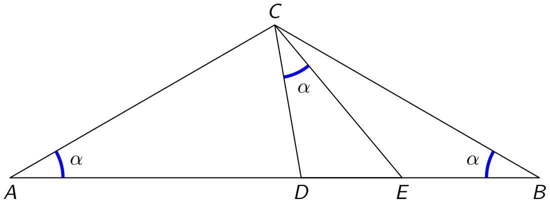


Trochę geometrii na początek

Niech

- $\triangle ABC$ – trójkąt równoramienny
- $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha \leqslant 60^\circ$
- punkty D oraz E leżą na boku AB, przy czym $AD < AE$
- $\sphericalangle ECD = \alpha$

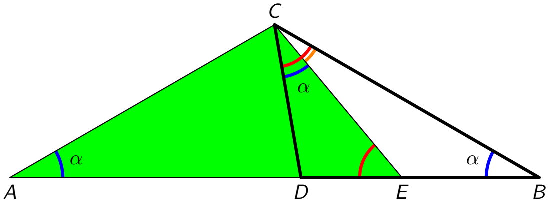
Wówczas $AE \cdot DB = AC^2$



Niech

- $\triangle ABC$ – trójkąt równoramienny
- $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha \leqslant 60^\circ$
- punkty D oraz E leżą na boku AB, przy czym $AD < AE$
- $\sphericalangle ECD = \alpha$

Wówczas $AE \cdot DB = AC^2$

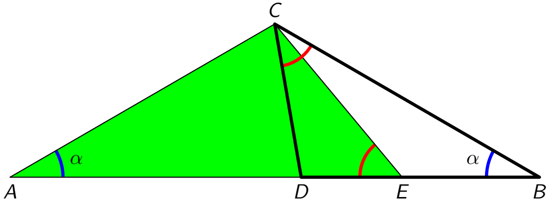


Istotnie, $\triangle AEC \sim \triangle BCD$

Niech

- $\triangle ABC$ – trójkąt równoramienny
- $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha \leqslant 60^\circ$
- punkty D oraz E leżą na boku AB, przy czym $AD < AE$
- $\sphericalangle ECD = \alpha$

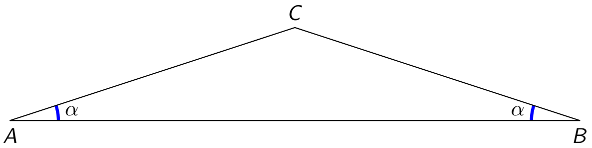
Wówczas $AE \cdot DB = AC^2$



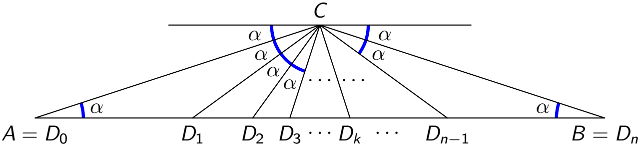
Istotnie, $\triangle AEC \sim \triangle BCD$ oraz $AC = BC$, więc $\frac{AE}{AC} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{DB}$, czyli $AE \cdot DB = AC^2$.

Geometrii ciąg dalszy

Niech $n \geqslant 2$ oraz $\alpha = \frac{180^\circ}{n+2}$ (wówczas $\sphericalangle BCA = n \cdot \alpha$)

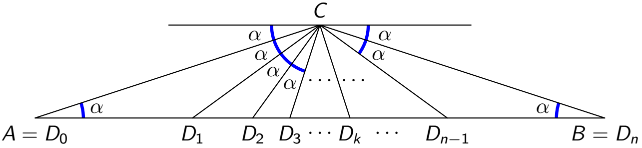


Niech $n \geqslant 2$ oraz $\alpha = \frac{180^\circ}{n+2}$ (wówczas $\sphericalangle BCA = n \cdot \alpha$)



Wybierzmy na boku AB punkty $D_0 = A$, D_1, D_2, ..., $D_n = B$ tak, by $\sphericalangle D_k C D_{k-1} = \alpha$ dla $k = 1, \ldots, n$

Niech $n \geqslant 2$ oraz $\alpha = \frac{180^\circ}{n+2}$ (wówczas $\sphericalangle BCA = n \cdot \alpha$)



Wybierzmy na boku AB punkty $D_0 = A$, D_1, D_2, ..., $D_n = B$ tak, by $\sphericalangle D_k C D_{k-1} = \alpha$ dla $k = 1, \ldots, n$

Wówczas $AD_k \cdot D_{k-1}B = AC^2$ dla $k = 1, \ldots, n$

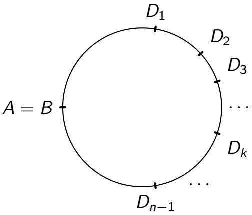
Konstrukcja n zmiennych losowych

Skonstruujmy n przyrządów losujących pozwalających zrealizować $\pi_n = 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$.

Konstrukcja n zmiennych losowych

Skonstruujmy n przyrządów losujących pozwalających zrealizować $\pi_n = 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$.

Nawińmy odcinek AB na koło tak, by stał się on jego obwodem.

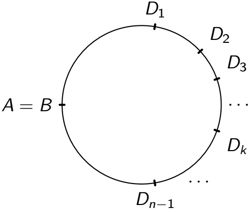


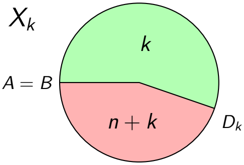
Konstrukcja n zmiennych losowych

Skonstruujmy n przyrządów losujących pozwalających zrealizować $\pi_n = 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$.

Nawińmy odcinek AB na koło tak, by stał się on jego obwodem.

Przyrząd X_k (gdzie $k = 0, 1, \ldots, n$) to ruletka (lub koło fortuny).



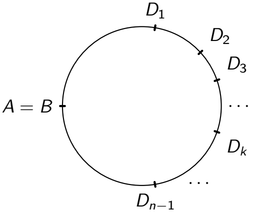


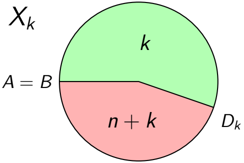
Konstrukcja n zmiennych losowych

Skonstruujmy n przyrządów losujących pozwalających zrealizować $\pi_n = 1 - \frac{1}{4\cos^2\frac{180^\circ}{n+2}}$.

Nawińmy odcinek AB na koło tak, by stał się on jego obwodem.

Przyrząd X_k (gdzie $k = 0, 1, \ldots, n$) to ruletka (lub koło fortuny).





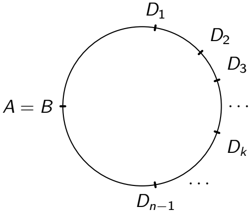
$P(X_k = k) = \frac{AD_k}{AB}$ $\qquad$ $P(X_k = n + k) = \frac{D_k B}{AB}$

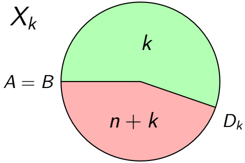
Konstrukcja n zmiennych losowych

Skonstruujmy n przyrządów losujących pozwalających zrealizować $\pi_n = 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$.

Nawińmy odcinek AB na koło tak, by stał się on jego obwodem.

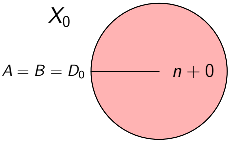
Przyrząd X_k (gdzie $k = 0, 1, \dots, n$) to ruletka (lub koło fortuny).

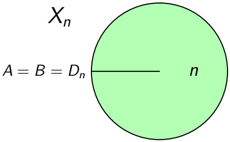




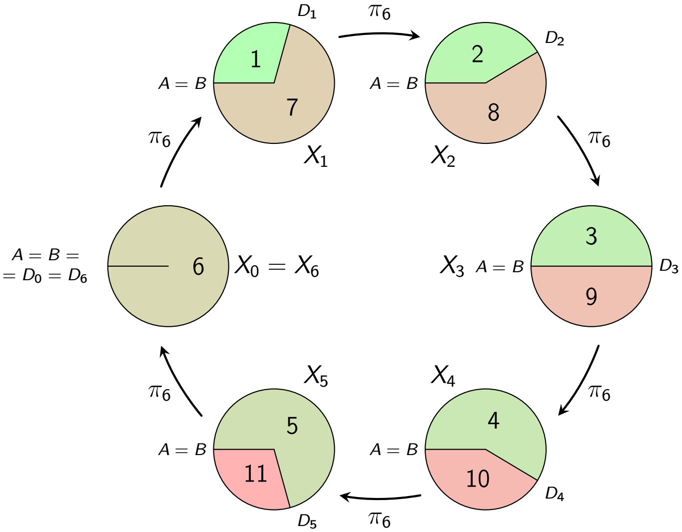
$P(X_k = k) = \frac{AD_k}{AB}$ $\qquad$ $P(X_k = n + k) = \frac{D_k B}{AB}$

Ruletki X_0 oraz X_n są identyczne:





Przykład dla $n = 6$



$$\pi_6 = 1 - \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dlaczego jest dobrze?

Ile wynosi $P(X_{k-1} < X_k)$ dla $k = 1, \ldots, n$?

Dlaczego jest dobrze?

Ile wynosi $P(X_{k-1} < X_k)$ dla $k = 1, \ldots, n$?
Przypomnijmy: $P(X_k = k) = \frac{AD_k}{AB}$, $P(X_k = n + k) = \frac{D_k B}{AB}$,
$AD_k \cdot D_{k-1}B = AC^2$

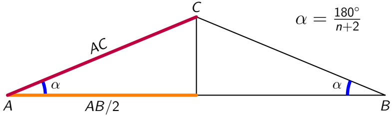
Dlaczego jest dobrze?

Ile wynosi $P(X_{k-1} < X_k)$ dla $k = 1, \ldots, n$?
Przypomnijmy: $P(X_k = k) = \frac{AD_k}{AB}$, $P(X_k = n + k) = \frac{D_k B}{AB}$,
$AD_k \cdot D_{k-1}B = AC^2$
X_{k-1} może przyjąć tylko wartości $k - 1$ lub $k - 1 + n$
X_k może przyjąć tylko wartości k lub $k + n$
Zatem $X_{k-1} < X_k$ zawsze z wyjątkiem sytuacji, gdy $X_k = k$ oraz $X_{k-1} = k - 1 + n$.

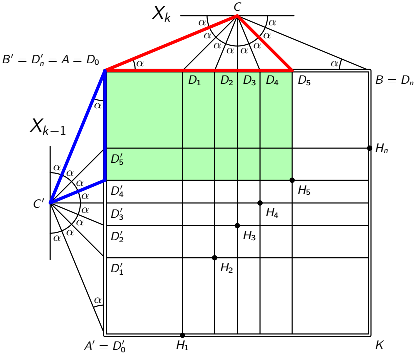
Dlaczego jest dobrze?

Ile wynosi $P(X_{k-1} < X_k)$ dla $k = 1, \ldots, n$?
Przypomnijmy: $P(X_k = k) = \frac{AD_k}{AB}$, $P(X_k = n + k) = \frac{D_k B}{AB}$,
$$AD_k \cdot D_{k-1}B = AC^2$$
X_{k-1} może przyjąć tylko wartości $k-1$ lub $k-1+n$
X_k może przyjąć tylko wartości k lub $k+n$
Zatem $X_{k-1} < X_k$ zawsze z wyjątkiem sytuacji, gdy $X_k = k$ oraz $X_{k-1} = k-1+n$.

$$\begin{aligned} P(X_{k-1} < X_k) &= 1 - P(X_k = k) \cdot P(X_{k-1} = k-1+n) = \\ &= 1 - \frac{AD_k}{AB} \cdot \frac{D_{k-1}B}{AB} = 1 - \frac{AC^2}{AB^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{AB/2}{AC}\right)^2} = 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}} \end{aligned}$$



Ilustracja obliczeń dla $n = 6$ oraz $k = 5$



Prawdopodobieństwo $P(X_{k-1} \geqslant X_k) = 1 - P(X_{k-1} < X_k)$ jest równe stosunkowi pól prostokąta $AD'_{k-1}H_kD_k$ i kwadratu $AA'KB$.
Z podobieństwa zaznaczonych trójkątów wynika, że stosunek ten wynosi $\frac{AD_k \cdot D'_{k-1}B'}{AB \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{AB \cdot A'B'} = \frac{1}{4\cos^2\alpha}$.
Wszystkie prostokąty $AD'_{k-1}H_kD_k$ mają takie samo pole równe AC^2, zaś punkty $H_1, \ldots, H_n$ leżą na jednej hiperboli.

Dlaczego nie da się lepiej?

Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $P(Y_{k-1} < Y_k) > 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$ dla $k = 1, \ldots, n$ $(Y_0 = Y_n)$.

Dlaczego nie da się lepiej?

Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $P(Y_{k-1} < Y_k) > 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$ dla $k = 1, \ldots, n$ $(Y_0 = Y_n)$.

S. Trybuła (a także niezależnie Z. Usiskin i inni) pokazał, że modyfikując odpowiednio nasze zmienne losowe można założyć, że Y_n jest stała (tak, jak w przypadku kostki B w zestawie Efrona oraz ruletki X_n).

Dlaczego nie da się lepiej?

Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $P(Y_{k-1} < Y_k) > 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$ dla $k = 1, \ldots, n$ ($Y_0 = Y_n$).

Można założyć, że Y_n jest stała.

Dlaczego nie da się lepiej?

Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $P(Y_{k-1} < Y_k) > 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$ dla $k = 1, \ldots, n$ ($Y_0 = Y_n$).

Można założyć, że Y_n jest stała.

Niech $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ będą takie, że $P(Y_k \leqslant y_k) \geqslant \frac{AD_k}{AB}$ oraz $P(Y_k \geqslant y_k) \geqslant 1 - \frac{AD_k}{AB} = \frac{D_k B}{AB}$ (y_k to kwantyl rzędu $\frac{AD_k}{AB}$ rozkładu zmiennej losowej Y_k).

Dlaczego nie da się lepiej?

Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $P(Y_{k-1} < Y_k) > 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$ dla $k = 1, \ldots, n$ $(Y_0 = Y_n)$.

Można założyć, że Y_n jest stała.

Niech $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ będą takie, że $P(Y_k \leqslant y_k) \geqslant \frac{AD_k}{AB}$ oraz $P(Y_k \geqslant y_k) \geqslant 1 - \frac{AD_k}{AB} = \frac{D_k B}{AB}$ (y_k to kwantyl rzędu $\frac{AD_k}{AB}$ rozkładu zmiennej losowej Y_k).

Ponieważ $Y_0 = Y_n$ jest stała, więc można liczby y_0 oraz y_n określić tak, by $y_0 = y_n$.

Dlaczego nie da się lepiej?

Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $P(Y_{k-1} < Y_k) > 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$ dla $k = 1, \ldots, n$ ($Y_0 = Y_n$).

Można założyć, że Y_n jest stała.

Niech $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ będą takie, że $P(Y_k \leqslant y_k) \geqslant \frac{AD_k}{AB}$ oraz $P(Y_k \geqslant y_k) \geqslant 1 - \frac{AD_k}{AB} = \frac{D_kB}{AB}$ (y_k to kwantyl rzędu $\frac{AD_k}{AB}$ rozkładu zmiennej losowej Y_k).

Ponieważ $Y_0 = Y_n$ jest stała, więc można liczby y_0 oraz y_n określić tak, by $y_0 = y_n$.

Niech $y_j = \min(y_1, \ldots, y_n)$. Wówczas $y_{j-1} \geqslant y_j$.

Jeśli $Y_j \leqslant y_j$ oraz $Y_{j-1} \geqslant y_{j-1}$, to $Y_{j-1} \geqslant Y_j$.

Dlaczego nie da się lepiej?

Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $P(Y_{k-1} < Y_k) > 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$ dla $k = 1, \ldots, n$ $(Y_0 = Y_n)$.
Można założyć, że Y_n jest stała.
Niech $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ będą takie, że $P(Y_k \leqslant y_k) \geqslant \frac{AD_k}{AB}$ oraz $P(Y_k \geqslant y_k) \geqslant 1 - \frac{AD_k}{AB} = \frac{D_k B}{AB}$ (y_k to kwantyl rzędu $\frac{AD_k}{AB}$ rozkładu zmiennej losowej Y_k).
Ponieważ $Y_0 = Y_n$ jest stała, więc można liczby y_0 oraz y_n określić tak, by $y_0 = y_n$.
Niech $y_j = \min(y_1, \ldots, y_n)$. Wówczas $y_{j-1} \geqslant y_j$.
Jeśli $Y_j \leqslant y_j$ oraz $Y_{j-1} \geqslant y_{j-1}$, to $Y_{j-1} \geqslant Y_j$.

$$P(Y_{j-1} < Y_j) = 1 - P(Y_{j-1} \geqslant Y_j) \leqslant 1 - P(Y_j \leqslant y_j, Y_{j-1} \geqslant y_{j-1}) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \frac{AD_j}{AB} \cdot \frac{D_{j-1}B}{AB} = 1 - \frac{1}{4\cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Wynika stąd, że takie zmienne losowe nie istnieją.

A jak to jest bez niezależności?

Porzućmy założenie o niezależności zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$

A jak to jest bez niezależności?

Porzućmy założenie o niezależności zmiennych losowych $X_1, \dots, X_n$

Z jednej strony mamy:

$$\min_k P(X_{k-1} < X_k) = 1 - \max_k P(X_{k-1} \geqslant X_k) \leqslant 1 - \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(X_{k-1} \geqslant X_k) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \tfrac{1}{n} P(\exists_k \; X_{k-1} \geqslant X_k) = 1 - \tfrac{1}{n}$$

A jak to jest bez niezależności?

Porzućmy założenie o niezależności zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$

Z jednej strony mamy:

$$\min_k P(X_{k-1} < X_k) = 1 - \max_k P(X_{k-1} \geqslant X_k) \leqslant 1 - \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(X_{k-1} \geqslant X_k) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \tfrac{1}{n} P(\exists_k \; X_{k-1} \geqslant X_k) = 1 - \tfrac{1}{n}$$

A z drugiej strony:
Jeśli wektor losowy $(X_1, \ldots, X_n)$ przyjmuje wartości

$$(1, 2, \ldots, n), (2, 3, \ldots, n, 1), (3, 4, \ldots, n, 1, 2), \ldots, (n, 1, 2, \ldots, n-1),$$

każdą z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$, to $P(X_{k-1} < X_k) = 1 - \frac{1}{n}$ dla $k = 1, \ldots, n$

A jak to jest bez niezależności?

Porzućmy założenie o niezależności zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$

Z jednej strony mamy:

$$\min_k P(X_{k-1} < X_k) = 1 - \max_k P(X_{k-1} \geqslant X_k) \leqslant 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(X_{k-1} \geqslant X_k) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \frac{1}{n} P(\exists_k \; X_{k-1} \geqslant X_k) = 1 - \frac{1}{n}$$

A z drugiej strony:
Jeśli wektor losowy $(X_1, \ldots, X_n)$ przyjmuje wartości

$$(1, 2, \ldots, n), (2, 3, \ldots, n, 1), (3, 4, \ldots, n, 1, 2), \ldots, (n, 1, 2, \ldots, n-1),$$

każdą z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$, to $P(X_{k-1} < X_k) = 1 - \frac{1}{n}$
dla $k = 1, \ldots, n$

Zatem $\sup \min_{1 \leqslant k \leqslant n} P(X_{k-1} < X_k) = 1 - \frac{1}{n}$

Co to ma wspólnego z wyborami? Paradoks Condorceta

Załóżmy, że w wyborach kandyduje 5 osób: K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

Co to ma wspólnego z wyborami? Paradoks Condorceta

Załóżmy, że w wyborach kandyduje 5 osób: K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

Preferencje wyborców są takie:
20% wyborców: $K_1 \prec K_2 \prec K_3 \prec K_4 \prec K_5$
20% wyborców: $K_2 \prec K_3 \prec K_4 \prec K_5 \prec K_1$
20% wyborców: $K_3 \prec K_4 \prec K_5 \prec K_1 \prec K_2$
20% wyborców: $K_4 \prec K_5 \prec K_1 \prec K_2 \prec K_3$
20% wyborców: $K_5 \prec K_1 \prec K_2 \prec K_3 \prec K_4$

Co to ma wspólnego z wyborami? Paradoks Condorceta

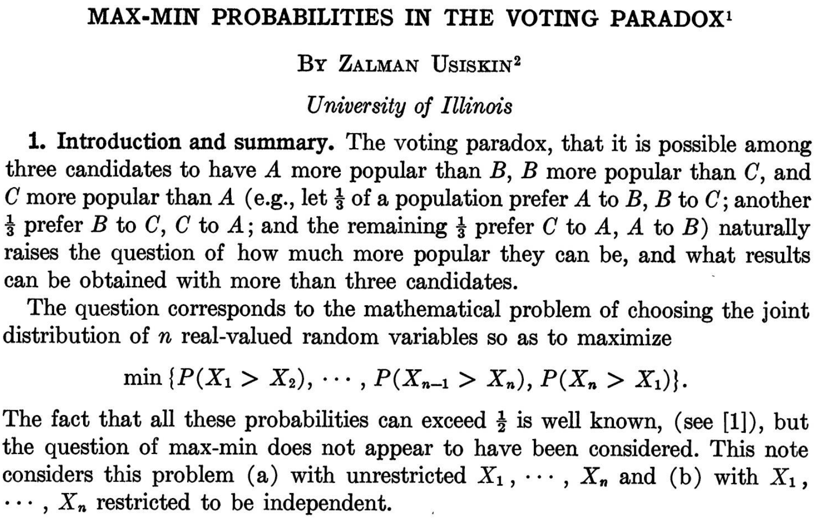
Załóżmy, że w wyborach kandyduje 5 osób: K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

Preferencje wyborców są takie:
20% wyborców: $K_1 \prec K_2 \prec K_3 \prec K_4 \prec K_5$
20% wyborców: $K_2 \prec K_3 \prec K_4 \prec K_5 \prec K_1$
20% wyborców: $K_3 \prec K_4 \prec K_5 \prec K_1 \prec K_2$
20% wyborców: $K_4 \prec K_5 \prec K_1 \prec K_2 \prec K_3$
20% wyborców: $K_5 \prec K_1 \prec K_2 \prec K_3 \prec K_4$

Efekt:
80% wyborców woli kandydata K_2 od K_1
80% wyborców woli kandydata K_3 od K_2
80% wyborców woli kandydata K_4 od K_3
80% wyborców woli kandydata K_5 od K_4
80% wyborców woli kandydata K_1 od K_5

!!!

Fragment pracy Z. Usiskina z roku 1964:



MAX-MIN PROBABILITIES IN THE VOTING PARADOX[1]

By Zalman Usiskin[2]

University of Illinois

1. Introduction and summary. The voting paradox, that it is possible among three candidates to have A more popular than B, B more popular than C, and C more popular than A (e.g., let $\frac{1}{3}$ of a population prefer A to B, B to C; another $\frac{1}{3}$ prefer B to C, C to A; and the remaining $\frac{1}{3}$ prefer C to A, A to B) naturally raises the question of how much more popular they can be, and what results can be obtained with more than three candidates.

The question corresponds to the mathematical problem of choosing the joint distribution of n real-valued random variables so as to maximize

$$\min\{P(X_1 > X_2), \cdots, P(X_{n-1} > X_n), P(X_n > X_1)\}.$$

The fact that all these probabilities can exceed $\frac{1}{2}$ is well known, (see [1]), but the question of max-min does not appear to have been considered. This note considers this problem (a) with unrestricted $X_1, \cdots, X_n$ and (b) with $X_1, \cdots, X_n$ restricted to be independent.

A jak to będzie dla prawdopodobieństwa kwantowego?

Okazuje się, że dla prawdopodobieństwa kwantowego wyniki są jeszcze bardziej zaskakujące.

A jak to będzie dla prawdopodobieństwa kwantowego?

Okazuje się, że dla prawdopodobieństwa kwantowego wyniki są jeszcze bardziej zaskakujące. Oto jeden z nich:

Twierdzenie

Gdy przestrzeń stanów jest co najmniej 3-wymiarowa, wówczas dla każdego stanu kwantowego (czystego) (≈ rozkładu p-stwa), dla każdego $n \geqslant 3$ *oraz* $\epsilon > 0$
istnieją obserwable (≈ zmienne losowe) $A_1, \ldots, A_n$ *takie, że*

A jak to będzie dla prawdopodobieństwa kwantowego?

Okazuje się, że dla prawdopodobieństwa kwantowego wyniki są jeszcze bardziej zaskakujące. Oto jeden z nich:

Twierdzenie

Gdy przestrzeń stanów jest co najmniej 3-wymiarowa, wówczas dla każdego stanu kwantowego (czystego) ($\approx$ rozkładu p-stwa), dla każdego $n \geqslant 3$ oraz $\epsilon > 0$ istnieją obserwable ($\approx$ zmienne losowe) $A_1, \ldots, A_n$ takie, że

$$P(A_n < A_1) > 1 - \epsilon$$

$$P(A_1 < A_2) = P(A_2 < A_3) = \cdots = P(A_{n-1} < A_n) = 1 \text{ !!!}$$

A jak to będzie dla prawdopodobieństwa kwantowego?

Okazuje się, że dla prawdopodobieństwa kwantowego wyniki są jeszcze bardziej zaskakujące. Oto jeden z nich:

Twierdzenie

Gdy przestrzeń stanów jest co najmniej 3-wymiarowa, wówczas dla każdego stanu kwantowego (czystego) (≈ rozkładu p-stwa), dla każdego $n \geqslant 3$ oraz $\epsilon > 0$ istnieją obserwable (≈ zmienne losowe) $A_1, \ldots, A_n$ takie, że

$$P(A_n < A_1) > 1 - \epsilon$$

$$P(A_1 < A_2) = P(A_2 < A_3) = \cdots = P(A_{n-1} < A_n) = 1 \text{ !!!}$$

Gdy $n = 2$, wówczas coś takiego jest niemożliwe, gdyż $P(A_1 < A_2) + P(A_1 = A_2) + P(A_1 > A_2) = 1$

Wybrana literatura

• H. Steinhaus, S. Trybuła, *On a paradox in applied probabilities*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 7 (1959), 67–69.

• S. Trybuła, *On the paradox of three random variables*, Zastos. Mat. 5 (1961), 321–332.

• C. Li-chien, *On the minimum probability of cyclic random inequalities*, Scientia Sinica 10 (1961), 499–504.

• Z. Usiskin, *Max-min probabilities in the voting paradox*, Ann. Math. Stat. 35 (1964), 857–862.

• S. Trybuła, *On the paradox of n random variables*, Zastos. Mat. 8 (1965), 143–156.

• M. Gardner, *The paradox of the nontransitive dice and the elusive principal of indifference*, Scientific American 223 (1970, No. 6), 110–114.

• M. Gardner, *On the paradoxical situations that arise from non-transitive relations*, Scientific American 231 (1974, No. 4), 120–125.

• M. Gardner, *The Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles, Paradoxes, and Problems*, (Ch. 22: *Nontransitive dice and other paradoxes*, 286–296), Norton, New York, 2001.

• C. Blyth, *Some probability paradoxes in choice from among random alternatives*, Journal of the American Statistical Association 67 (1972) 366–373.

• R. L. Tenney, C. C. Foster, *Non-transitive dominance*, Math. Mag. 49 (1976, No. 3), 115–120.

• R. P. Savage, *The paradox of nontransitive dice*, Amer. Math. Monthly 101 (1994, No. 5), 429–436.

Wybrana literatura c.d.

• R. Suck, *Independent random utility representations*, Math. Social Sci. 43 (2002), 371–389.

• И. И. Богданов, *Нетранзитивные рулетки*, Математическое просвещение, сер. 3, вып. 14 (2010), 240–255.

• Z. L. Nagy, *A multipartite version of the Turán problem – density conditions and eigenvalues*, Electron. J. Combin. 18 (2011), no. 1, Paper 46, 15 pp.

• L. Batakci, K. Singer, *Paradox of nontransitive dice*, J. Recreat. Math., 34 (2008, No. 2), 83–88.

• S. Bozóki, *Nontransitive dice sets realizing the Paley tournaments for solving Schütte's tournament problem*, Miskolc Math. Notes, 15 (2014, No. 1), 39–50.

• B. Conrey, J. Gabbard, K. Grant, A. Liu, K. E. Morrison, *Intransitive Dice*, Math. Mag. 89 (2016, No. 2), 133–143.

• C. Cooley, W. Ella, M. Follett, E. Gilson, L. Traldi, *Tied dice. II. Some asymptotic results*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 90 (2014), 241–248.

• T. Gowers, *A potential new Polymath project: intransitive dice*, Gowers's Weblog, 2017, `goo.gl/Acihb6`.

• G. J. Székely, *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest, Hungary, 1986.

• I. Peterson, *Tricky dice revisited*, Science News Online, 161 (2002, No. 15).

• C. Rump, *Strategies for rolling the Efron dice*, Math. Mag. 74 (2001, No. 3), 212–216.

• G. Hetyei, *Efron's Coins and the Linial Arrangement*, Discrete Mathematics, 339 (2016, No. 12), 2998–3004.