LVII Szkoła Matematyki Poglądowej

Nie uwierzę, póki nie zobaczę

Ośrodek Kultury Matematycznej

OKM

26-30 stycznia 2018, Wola Ducka

Warsaw Center of Mathematics and Computer Science

UNIWERSYTET PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Ponoć Cantor, po stwierdzeniu równoliczności odcinka i kwadratu, napisał: *Udowodniłem to, ale w to nie wierzę!* Mimo restrykcyjnej metodologii matematyki niejednokrotnie czujemy jakiś niedosyt, a może nawet niepewność, gdy dowiadujemy się o jakimś fakcie, który właśnie udowodniono, ale który odpowiada naszemu przekonaniu, że „tak być nie powinno". Powstaje pytanie, skąd czerpiemy nasze przekonania o tym, jak powinno być. Teoretycznie powinna nas o tym przekonać filozofia. Ale ta matematyków obchodziła z daleka. Kiedy Kartezjusz stwierdzał: *jedni tylko matematycy zdołali znaleźć jakieś dowody*, to znaczy jakieś racje pewne i oczywiste, znaczyło to, iż o matematyce w swojej „Rozprawie o metodzie" wypowiadać się nie będzie, co Leibniz złośliwie skomentował, pisząc, że kartezjański racjonalizm radzi matematykom: *weź co trzeba, rób jak należy, a otrzymasz to, czego potrzebujesz.*

Niezbędność odpowiedzi na pytanie, jak zapewnić sobie, by matematyka była taka, jak chcemy, pchnęła matematyków przed stu kilkudziesięciu laty do sformułowania na swój użytek przeróżnych konkretnych założeń metodologicznych. Największą furorę zrobiła koncepcja formalistyczna, gdzie matematyka stała się grą napisów, tworzonych w myśl zadeklarowanych na początku każdej teorii sztywnych zasad bez oglądania się na jakąkolwiek realność. Hilbert na pytanie, czy płaszczyzny, proste i punkty z jego „Grundlagen der Geometrie" mogą być stołami, krzesłami i kuflami z piwem, odpowiedział: *tak, o ile tylko spełniają aksjomaty.* Brouwer, realizując zaproponowaną przez Poincarégo ideę intuicjonizmu, zabronił szeregu naturalnych działań, jak np. stosowania zasady wyłączonego środka (z takich pomysłów zrodziła się potem bardzo restrykcyjna metodologia computer science). Russell i Whitehead usiłowali prawdziwą matematykę wywieść z logiki. I dopiero mniej lub bardziej przykre konsekwencje tych wszystkich sztucznych pomysłów kazały większości dzisiejszych matematyków przyjąć za jedyne słuszne poglądy Zermeli, iż matematyk jest jak buszmen, dla którego jedyną naprawdę pewną rzeczą jest busz, a jaki jest busz, każdy widzi i może się na własnej skórze przekonać. I tak jedni przedzierają się przez ciernie rachunku lambda, inni galopują po preriach przestrzeni Banacha, jeszcze inni wspinają się na szczyty pierścieni nieprzemiennych itp.

No i wtedy pytanie, jak uwierzyć w prawdy tych, którzy żyją w zupełnie innych matematycznych ekosystemach, staje się nie do uchylenia. I dlatego każdy z nas powinien próbować pokazywać „obcokrajowcom" urodę swojego miejsca na matematycznej ziemi.

Co też mamy zamiar robić na naszej Szkole.

ORGANIZATORZY

	Liczby piątek, 26 stycznia chairman: Łukasz Pańkowski	Analiza z różnych stron sobota, 27 stycznia chairman: Ryszard Rudnicki	Teoria mnogości niedziela, 28 stycznia chairman: Piotr Zakrzewski	Geometria & Topologia poniedziałek, 29 stycznia chairman: Krzysztof Ciesielski	Nieprawdopodobieństwo wtorek, 30 stycznia chairman: Przemysław Biecek
8:15–9:00	śniadanie	śniadanie		śniadanie	śniadanie
9:00–9:45	Andrzej Komisarski *Wykład otwierający 57. Szkołę*	Ryszard Rudnicki *Bilard stochastyczny i jego dziwne własności*	śniadanie	Krzysztof Ciesielski *Taka ryba nie istnieje*	Joanna Karłowska-Pik *O losowości w świecie grafów, pól i obrazów. Wykład pamięci Tomasza Schreibera.*
10:00–10:45	Łukasz Pańkowski *Jak wygenerować liczby pierwsze?*	Tomasz Cieślak *Okres drgań nieliniowego wahadła*		Krzysztof Ziemiański *Topologia algebraiczna w informatyce*	Łukasz Rajkowski *Ostatni odkryty wierzchołek*
10:45–11:15	przerwa kawowa	przerwa kawowa		przerwa kawowa	przerwa kawowa
11:15–12:00	Jarosław Grytczuk *Problem samotnego biegacza*	Adam Bobrowski *Półgrupy są stateczne, a kosinusy robią psikusy*	Zbigniew Marciniak *Czwarty wymiar*	Tomasz Cieśla *Kwadratura koła*	*O tym, co było i co będzie*
12:15–13:00	Bartłomiej Bzdęga *Twierdzenie Elekesa*	Grzegorz Łukaszewicz *Czemu służą i o czym mówią atraktory w hydrodynamice? Model, intuicja, empiria*	Tomasz Cieśla *Jak podwoić kulę?*	Joanna Jaszuńska *Podróż do wnętrza sześcianu*	obiad
13:15–14:00	obiad	obiad	obiad	obiad	
16:15–17:00	Piotr Zarzycki *Liczbowe wizualizacje*	Łukasz Płociniczak *Klimatyczna matematyka*	Piotr Koszmider *Księga tysiąca i jednego światów matematycznych*	Marek Kordos *Pana Jowialskiego bajki o przestrzeni (Znacie? tak? – to posłuchacie!)*	
17:15–18:00	Maciej Grześkowiak Monika Kędziora Piotr Niewiedział *Muzyka i liczby*	Radosław Wieczorek *O owadach okresowych*	Piotr Koszmider *Jak udowodnić, że nie da się udowodnić?*	Zdzisław Pogoda *Niemożliwe*	
18:15–19:00	kolacja		kolacja	kolacja	
19:30–∞	Mariusz Skałba *Jak zgarnąć dwa miliony z milenijnego stołu?*	BAL	Jan Kalinowski *Zobaczyć w fizyce*	Konkurs na Wzorowego Słuchacza	

Twierdzenie Elekesa

Bartłomiej Bzdęga

Do szczególnie pięknych należą te matematyczne dowody, które wymagają zaangażowania kilku różnych, z pozoru rozłącznych, gałęzi matematyki. Do udowodnienia tytułowego twierdzenia, zaliczanego do klasyki addytywnej teorii liczb, potrzeba geometrii oraz rachunku prawdopodobieństwa.

Addytywna teoria liczb zajmuje się w ogólności zbiorami sum. Ich definicja jest bardzo naturalna i intuicyjna. Dla danych zbiorów liczbowych A i B określamy $A+B$ jako zbiór liczb postaci $a+b$, w której $a \in A$ oraz $b \in B$. Analogiczne definicje można napisać również dla odejmowania, mnożenia i innych działań. Erdös i Szemerédi badali zależność pomiędzy liczbami elementów zbiorów $A+A$ oraz $A \cdot A$ dla skończonych zbiorów A. W roku 1983 postawili hipotezę, że zawsze przynajmniej jeden z nich ma liczbę elementów rzędu $|A|^{2-\varepsilon}$. Twierdzenie Elekesa z 1997 roku daje oszacowanie rzędu $|A|^{5/4}$. Choć ten wynik został od tamtego czasu poprawiony, hipoteza jest wciąż otwarta i raczej daleka od rozwiązania.

Jak podwoić kulę?

Tomasz Cieśla

Czy można kulę podzielić na skończenie wiele kawałków, z których można złożyć dwie kule identyczne z wyjściową? Intuicja podpowiada, że nie, przecież nie można stworzyć czegoś z niczego... Okazuje się jednak, że jest to możliwe! To zaskakujące twierdzenie nosi nazwę „paradoksu Banacha-Tarskiego”. Na wykładzie naszkicujemy dowód tego paradoksu. Zajmiemy się także jego związkami z aksjomatem wyboru oraz pokrewnymi problemami.

Kwadratura koła

Tomasz Cieśla

Alfred Tarski zadał w 1925 roku następujące pytanie: czy kwadrat można podzielić na skończenie wiele kawałków, z których można złożyć koło o tym samym polu? Próba rozcięcia nożyczkami kwadratowej kartki papieru na kilka części i złożenia z nich koła pozwala przypuszczać, że nie jest to możliwe. Rzeczywiście – w 1963 roku udowodniono, że taki podział nie jest możliwy, jeśli założymy, że części podziału da się wyciąć nożyczkami. Z drugiej strony, okazuje się, że dowolny wielokąt można rozciąć na trójkąty, z których można złożyć kwadrat o tym samym polu.

Problem kwadratury koła Tarskiego (w ogólnej wersji, bez narzucania warunków na elementy podziału) został pozytywnie rozstrzygnięty w 1990 roku przez M. Laczkovicha. Przyjrzymy się także niedawno udowodnionym wzmocnieniom twierdzenia Laczkovicha, w których na elementy podziału narzucono warunki takie jak mierzalność w sensie Lebesgue’a, posiadanie własności Baire’a czy borelowskość.

Okres drgań nieliniowego wahadła

Tomasz Cieślak

Jak wszyscy wiemy (na przykład z lekcji fizyki w szkole średniej), okres wahań (drgań) *wahadła matematycznego* (przykład oscylatora harmonicznego) nie zależy od wychylenia początkowego. Jednak model wahadła ze szkoły średniej przyjmuje założenie, że wychylenia są małe. Co, jeśli takie założenie nie jest spełnione?

Obliczymy okres wahań prawdziwego wahadła i kilku przykładów oscylatorów nieliniowych. Ponadto zajmiemy się szacowaniem okresu w modelu Lotki-Volterry.

Taka ryba nie istnieje

Krzysztof Ciesielski

Słowo „continuum” używane jest w matematyce w dwóch znaczeniach. Jedno, to najbardziej znane, to liczba kardynalna – moc zbioru liczb rzeczywistych. Drugie związane jest z topologią – tak określa się zbiór, który jest jednocześnie zwarty i spójny.

Czy, gdy mówimy o continuum zawartym w płaszczyźnie, możemy napotkać jakieś większe niespodzianki? Wydawałoby się, że nie. Zwarty podzbiór płaszczyzny to zbiór jednocześnie domknięty i ograniczony, a zbiór spójny to – zgodnie z intuicją – zbiór „jednokawałkowy”. Jeśli te warunki mają zajść jednocześnie, to można byłoby pomyśleć, że z niczym dziwnym nie możemy się spotkać. Tymczasem... Okazuje się, że nieraz może przyjść do głowy myśl „nie uwierzę, póki nie zobaczę”.

Problem samotnego biegacza

Jarosław Grytczuk

Dokoła stadionu w kształcie okręgu jednostkowego biegnie N biegaczy, każdy z inną, ale stałą prędkością. Jest głucha, ciemna noc, choć oko wykol. Każdy biegacz ma na głowie lampkę, która świeci na odległość mniejszą niż $1/N$. Jeżeli w pewnej chwili biegacz nie widzi przed sobą żadnego innego biegacza, ani żaden inny biegacz nie oświetla go z tyłu – czuje się on samotny. Złowieszcza hipoteza głosi, że każdy biegacz odczuje kiedyś dojmującą samotność.

Opowiem o tym, co wiemy, a czego nie wiemy, choć bardzo chcielibyśmy wiedzieć, w kwestii samotności biegaczy. Przedstawię, na przykład, twierdzenie o niewidzialnym biegaczu, a także zdumiewające twierdzenie o wielkiej samotności biegaczy losowych. Napomknę również o wariancie nieskończonym oraz o spektakularnej redukcji problemu do skończonej liczby różnych prędkości.

Muzyka i liczby

Maciej Grześkowiak, Monika Kędziora, Piotr Niewiedział

Niektóre elementy dzieła muzycznego mogą być reprezentowane przez zbiory lub ciągi liczb. Na przykład melodii może odpowiadać pewien skończony zbiór liczb, a rytmowi muzycznemu możemy przypisać pewien ciąg binarny. Komponowanie utworu nieformalnie można rozumieć jako przekształcenia na zdefiniowanych obiektach liczbowych, które w pewnym sensie mogą odpowiadać przekształceniom geometrycznym. Podczas naszego wykładu przeanalizujemy fragment znanego dzieła muzycznego oraz opowiemy o pewnych klasach rytmów muzycznych.

Podróż do wnętrza sześcianu

Joanna Jaszuńska

W trakcie wykładu zwiedzać będziemy wnętrze sześcianu. Sprawdzimy, co się w nim da zmieścić i zobaczymy, co zaskakującego się tam ukryło. Będziemy w tym celu kroić, wiercić, dziurawić, rozpłaszczać, połowić i na inne sposoby defasonować liczne sześciany i kilka innych brył.

Zobaczyć w fizyce

Jan Kalinowski

Nie uwierzę póki nie zobaczę. Ale co to znaczy zobaczyć? Jeszcze nie tak dawno oznaczało to „dotknąć", „zobaczyć na własne oczy". Dramatyczny rozwój technik obserwacyjnych i detekcyjnych znacznie wzbogacił sposoby „zobaczenia". Na kilku przykładach z fizyki cząstek elementarnych i astrofizyki postaram się pokazać, jak zobaczono, lub zamierza się zobaczyć, „niewidzialne": cząstki elementarne, bozon Higgsa, ciemną materię, fale grawitacyjne, wnętrze Ziemi.

O losowości w świecie grafów, pól i obrazów. Wykład pamięci Tomasza Schreibera.

Joanna Karłowska-Pik

Teoria prawdopodobieństwa uczniom kończącym naukę w szkołach średnich kojarzy się zasadniczo z zadaniami o kostkach, kartach bądź urnach i kulkach. Świat probabilistyki jest jednak dużo bogatszy, a jej metody znajdują różnorakie zastosowania. Jednym z ciekawszych obiektów są losowe pola Markowa, będące zbiorami zmiennych losowych posiadających tzw. własność Markowa, czyli własność braku pamięci, a indeksowanymi wierzchołkami grafów nieskierowanych. Każda krawędź takiego grafu obrazuje zależność pomiędzy zmiennymi znajdującymi się w jego wierzchołkach, przy czym zmienne znajdujące się w dwóch wierzchołkach A i B są niezależne pod warunkiem, że znamy wartości zmiennych z wierzchołków, przez które przechodzą wszystkie ścieżki z A do B. Jeszcze inną koncepcją są wielokątne pola Markowa, które należy sobie wyobrażać jako zespoły nieprzecinających się konturów (wieloboków) na płaszczyźnie. Jedną z ich istotnych cech jest to, że takim wielobokom można w sposób losowy przypisać kolorowanie, w najprostszym przypadku czarno-białe, ale paleta kolorów może być bogatsza.

Wspomniane obiekty znajdują liczne zastosowania m.in. w fizyce, ale także w detekcji faktury lub segmentacji obrazów, czego przykłady pokażemy. Niniejszy wykład będzie także okazją do wspomnienia postaci Tomasza Schreibera — toruńskiego matematyka, który miał swój wkład m.in. w rozwój teorii wielokątnych pól Markowa. Mimo tego, że zmarł młodo, w wieku 35 lat, zdążył opublikować ponad 50 artykułów naukowych w znaczących czasopismach zagranicznych i stać się jednym z pionierów geometrii stochastycznej.

Pana Jowialskiego bajki o przestrzeni (Znacie? Tak? – to posłuchacie!)

Marek Kordos

Na kilkunastu przykładach postaram się uświadomić słuchaczom, jak wiele z tego, co widzimy, pochodzi z naszej poprzednio zdobytej świadomości i przyzwyczajeń, oraz jak często bez wahania uznajemy różnie wyglądające rzeczy za tożsame.

Księga tysiąca i jednego światów matematycznych

Piotr Koszmider

Czy istnieje funkcja z odcinka na kwadrat, dla której w każdym punkcie co najmniej jedna ze współrzędnych ma pochodną? Czy w twierdzeniu Fubiniego można zakładać jedynie, iż całki iterowane istnieją? Czy istnieje przestrzeń Banacha mocy continuum, gdzie zanurzają się wszystkie przestrzenie Banacha o tej mocy? Czy każdy homomorfizm algebry Banacha $\mathcal{C}(X)$ funkcji ciągłych na zwartej przestrzeni Hausdorffa jest ciągły? Odpowiedzi na te pytania brzmią, iż w różnych światach matematycznych jest różnie. Postaramy się sprecyzować te określenia i omówić te i podobne przykłady naturalnych pytań, na które nie może być jednoznacznej odpowiedzi z powyższych powodów.

Jak udowodnić, że się nie da udowodnić?

Piotr Koszmider

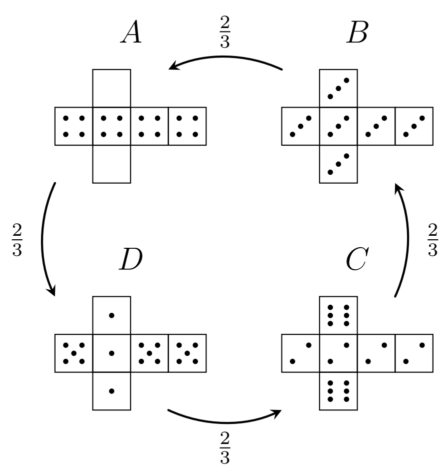
Spróbujemy opisać główne idee *metody forcingu*, która służy do dowodzenia, iż dane zdanie nie może być udowodnione w standardowym systemie aksjomatów matematyki. Gdy udaje się pokazać, iż ani dane zdanie, ani jego negacja nie mogą być udowodnione za pomocą takich aksjomatów, oznacza to, iż istnieją zarówno modele matematyki, gdzie zdanie jest prawdziwe, jak i modele, gdzie to zdanie jest fałszywe.

Nieprzechodniość w porządkach zmiennych losowych

Andrzej Komisarski

Na ogół spóźniam się do pracy bardziej niż mój kolega, Krzysztof. On z kolei spóźnia się zwykle bardziej niż nasz szef. Czy jest możliwe, by jednocześnie nasz szef spóźniał się na ogół bardziej niż ja? Okazuje się, że tak i to nawet wtedy, gdy nasze spóźnienia są od siebie niezależne.

Podobny paradoks przedstawił Martin Gardner w dziale matematycznym czasopisma *Scientific American*. W roku 1970 opisał on kostki do gry, odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona. Są te cztery kostki: A, B, C oraz D, mające tę własność, że gdy nimi rzucimy, to z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ na kostce A uzyskamy więcej oczek niż na kostce B, z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ na kostce B uzyskamy więcej oczek niż na C, z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ na C uzyskamy więcej oczek niż na D, oraz z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ na D uzyskamy więcej oczek niż na A.



Próba uporządkowania kostek od najlepszej do najgorszej kończy się niepowodzeniem ze względu na brak przechodniości. Nieprzechodniość ta od początku fascynowała nie tylko matematyków, ale również ekonomistów, którzy powiązali ją z teorią wyboru: próba wyboru najlepszego produktu poprzez dokonywanie porównań w parach może zakończyć się niepowodzeniem (to właśnie od ekonomistów po raz pierwszy usłyszałem o tym zagadnieniu).

Opowiem więcej o tego typu paradoksach, wskażę ich związki z geometrią. Spróbuję też opowiedzieć o ich związkach z wyborami (elekcją) i o tym, że w przypadku prawdopodobieństwa kwantowego wszystko staje się jeszcze bardziej zaskakujące.

Czemu służą i o czym mówią atraktory w hydrodynamice. Model, intuicja, empiria.

Grzegorz Łukaszewicz

Pojęcie atraktora należy do modelu i teorii, turbulencja jest zjawiskiem fizycznym. Będziemy starali się uzasadnić, kierując się intuicją i przeprowadzając pewne eksperymenty matematyczne, że wymiar atraktora jest dobrym kandydatem na miernik poziomu chaosu w turbulentnym ruchu płynu. Zastanowimy się także, co by to mogło znaczyć, gdyby kandydat wypadł słabo lub beznadziejnie. To pytanie należy już do dziedziny filozofii nauki, stojącej na straży sensu naszych poczynań w zakresie fizyki matematycznej i nie tylko.

Czwarty wymiar

Zbigniew Marciniak

Celem wykładu jest przekonanie słuchaczy, że ich siła wyobraźni jest całkowicie wystarczająca do tego, by doświadczyć takiej przestronności przestrzeni 4-wymiarowej, o jakiej w naszym ciasnym trójwymiarze możemy tylko pomarzyć.

Jak wygenerować liczby pierwsze?

Łukasz Pańkowski

Liczy pierwsze są niczym atomy, z których za pomocą mnożenia zbudowane są wszystkie liczby naturalne. Jednak ich „prostota” jest tylko pozorna, gdyż istnieje wiele wciąż nierozstrzygniętych zagadnień i hipotez dotyczących liczb pierwszych, z którymi matematycy zmagają się od stuleci. Zagadkowość tak elementarnych obiektów budziła zainteresowanie już w starożytności, kiedy to Euklides uzasadnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. Co ciekawe, dowód zaproponowany przez Euklidesa kryje w sobie sposób wygenerowania nieskończenie wielu liczb pierwszych. Wciąż jednak nie wiadomo, czy tak wyznaczony ciąg zwiera wszystkie liczby pierwsze. Podczas wykładu omówimy pewne modyfikacje tego rozumowania pozwalające poprawić tę niedoskonałość i wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze. Co więcej, poznamy inne zaskakujące metody znajdowania liczb pierwszych. Mianowicie zastanowimy się, czy istnieje jakakolwiek liczba, której odpowiednie potęgi będą zawsze liczbami pierwszymi. Odpowiemy również na pytanie, czy jest możliwe, aby skończony ciąg ułamków krył w sobie wszystkie liczby pierwsze.

Niemożliwe

Zdzisław Pogoda

Rysunek odgrywa bardzo ważną pomocną rolę przy wielu rozważaniach matematycznych. Sam w sobie rysunek nie jest dowodem, ale może dowód istotnie wspomóc. Może też wyprowadzić dowodzącego na manowce, gdy jest źle wykonany lub interpretowany. A o to nietrudno, gdyż odwzorowanie przestrzeni na płaszczyznę może prowadzić do nieporozumień i pomyłek. Jakich? I co to ma wspólnego z matematyką? O tym na wykładzie.

Klimatyczna Matematyka

Łukasz Płociniczak

Wykład zacznę od opowiedzenia, jak przedziwne warunki klimatyczne mogły panować podczas całej historii Ziemi oraz jej podobnych planet. Później wspólnie zastanowimy się nad istotą oscylacji temperatury w epoce lodowcowej oraz poświęcimy kilka minut na refleksję nad działalnością człowieka oraz jej wpływem na naszą planetę. Przyjdzie wtedy pora na sformalizowanie myśli za pomocą modeli matematycznych. Omówię kilka z nich, a ciężar położę na tzw. modele koncepcyjne. Zobaczymy, jak w dosyć prosty sposób za pomocą układów dynamicznych można opisać ewolucję klimatu na przestrzeni wielu milionów lat.

Ostatni odkryty wierzchołek

Łukasz Rajkowski

Aby poczuć satysfakcję z odkrycia ostatniego wierzchołka, trzeba najpierw pobłądzić, w dodatku nie byle jak, bo losowo. Szczęśliwie, nie czekają nas żadne niebezpieczeństwa, bo błądzić będziemy nie w żadnych górach, a na grafach. Takie beztroskie błądzenie ma pewne własności, w które czasem dość trudno jest uwierzyć – przynajmniej dopóki nie „zobaczy” się ich uzasadnienia, co spróbuję uczynić podczas referatu.

Bilard stochastyczny i jego dziwne własności

Ryszard Rudnicki

Wyobraźmy sobie cząsteczkę poruszającą się między dwiema równoległymi płytami ze stałą prędkością, przy czym kąt odbicia zależy losowo od kąta padania. Opis takiego ruchu można sprowadzić do jednowymiarowego bilardu, a więc ruchu punktu po odcinku, w którym prędkość zmienia się losowo po odbiciu od końców odcinka. Pokażemy jak zachowuje się rozkład prędkości punktu, gdy czas zmierza do nieskończoności.

Okaże się, że przy pewnych zasadach odbicia, zachowanie rozkładu prędkości może być nieco zaskakujące. Przy okazji przedstawię pewne narzędzia z analizy funkcjonalnej i probabilistyki wygodne w badaniu różnorodnych modeli matematycznych pochodzących zarówno z fizyki, jak i biologii.

O owadach okresowych

Radosław Wieczorek

Jednym z podstawowych zastosowań matematyki w zagadnieniach biologicznych jest dynamika populacyjna, czyli opis zmian liczebności i struktury populacji. W dynamice populacyjnej występują rozmaite typy modeli sięgające do wielu dziedzin matematyki. Zajmiemy się najprostszymi z nich, używającymi teorii dyskretnych układów dynamicznych, gdzie ewolucja rozkładu populacji opisana jest pojedynczą transformacją. Chociaż pozornie proste, modele takie mogą wykazywać bardzo skomplikowane i nieoczekiwane zachowania. Opowiemy o odwzorowaniu logistycznym i o modelach ze strukturą wiekową. W szczególności pokażemy model populacji owadów, których cykl życiowy trwa ściśle określoną liczbę lat.

Liczbowe wizualizacje

Piotr Zarzycki

Liczbowe wizualizacje pojawiają się już w najwcześniejszych latach edukacji matematycznej. Przypomnimy klocki Cuisenaire'a i zabawki Dienesa. W dalszej części opowiemy o wizualizacjach niektórych pojęć teorii liczb i wizualnych ilustracjach ważnych twierdzeń teorii liczb.

Topologia algebraiczna w informatyce

Krzysztof Ziemiański

Opowiem o przestrzeniach skierowanych – są to przestrzenie topologiczne z dodatkową strukturą, która pozwala na opisywanie zachowania programów komputerowych. Opiszę ich niezmienniki i porównam je z klasycznymi niezmiennikami homotopijnymi przestrzeni topologicznych, m.in. z grupami homotopii.
