Perelman i hipoteza Poincarégo

Paweł Strzelecki
Instytut Matematyki UW

LVI Szkoła Matematyki Poglądowej, 26 sierpnia 2017

Plan

- Sformułowanie HP i preprinty Perelmana
- O składnikach i praźródłach dowodu Perelmana dla każdego
    - Równanie ciepła
    - Przykłady potoków geometrycznych
    - Naiwna opowieść o hipotezie geometryzacyjnej Thurstona
    - Potok Ricciego z chirurgiami
- Reakcja społeczności matematycznej na prace Perelmana
- Rzut oka wstecz

Sformułowanie HP i preprinty Perelmana

Hipoteza Poincarégo

Hipoteza. *Jeśli* $M = M^3$ *jest trójwymiarową rozmaitością zamkniętą i* $\pi_1(M) = 0$*, to* M *jest homeomorficzna ze sferą* $\mathbb{S}^3$*.*

- Sformułowanie: Henri Poincaré, 1904
- Od 2000 r. jeden z problemów milenijnych Instytutu Clay'a
- Anons dowodu: Grigorij J. Perelman, trzy preprinty (XI.2002–VII.2003; łącznie **68 stron**)
- Pełna akceptacja dowodu przez ekspertów w ciągu ok. 2 lat
- Perelman nie przyjął
    - Medalu Fieldsa w 2006 roku,
    - Nagrody Instytutu Claya w 2010 roku.

Pierwszy preprint Perelmana

Cornell University Library

arXiv.org > math > arXiv:math/0211159

Search or A
(Help | Advanc

Mathematics > Differential Geometry

The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications

Grisha Perelman

(Submitted on 11 Nov 2002)

We present a monotonic expression for the Ricci flow, valid in all dimensions and without curvature assumptions. It is interpreted as an entropy for a certain canonical ensemble. Several geometric applications are given. In particular, (1) Ricci flow, considered on the space of riemannian metrics modulo diffeomorphism and scaling, has no nontrivial periodic orbits (that is, other than fixed points); (2) In a region, where singularity is forming in finite time, the injectivity radius is controlled by the curvature; (3) Ricci flow can not quickly turn an almost euclidean region into a very curved one, no matter what happens far away. We also verify several assertions related to Richard Hamilton's program for the proof of Thurston geometrization conjecture for closed three-manifolds, and give a sketch of an eclectic proof of this conjecture, making use of earlier results on collapsing with local lower curvature bound.

Comments:	39 pages
Subjects:	**Differential Geometry (math.DG)**
MSC classes:	53C
Cite as:	arXiv:math/0211159 **[math.DG]**
	(or arXiv:math/0211159v1 **[math.DG]** for this version)

Submission history

From: Grisha Perelman [view email]
[v1] Mon, 11 Nov 2002 16:11:49 GMT (33kb)

Drugi preprint Perelmana

Cornell University
Library

arXiv.org > math > arXiv:math/0303109

Mathematics > Differential Geometry

Ricci flow with surgery on three-manifolds

Grisha Perelman

(Submitted on 10 Mar 2003)

This is a technical paper, which is a continuation of math.DG/0211159. Here we construct Ricci flow with surgeries and verify most of the assertions, made section 13 of that e-print; the exceptions are (1) the statement that manifolds that can collapse with local lower bound on sectional curvature are graph m this is deferred to a separate paper, since the proof has nothing to do with the Ricci flow, and (2) the claim on the lower bound for the volume of maximal the smoothness of solutions from some time on, which turned out to be unjustified and, on the other hand, irrelevant for the other conclusions.

Comments:	22 pages
Subjects:	**Differential Geometry (math.DG)**
MSC classes:	53C
Cite as:	**arXiv:math/0303109 [math.DG]**
	(or **arXiv:math/0303109v1 [math.DG]** for this version)

Submission history

From: Grisha Perelman [view email]
[v1] Mon, 10 Mar 2003 16:44:35 GMT (24kb)

Trzeci preprint Perelmana

Cornell University Library

arXiv.org > math > arXiv:math/0307245

Mathematics > Differential Geometry

Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds

Grisha Perelman

(Submitted on 17 Jul 2003)

Let M be a closed oriented three-manifold, whose prime decomposition contains no aspherical factors. We show that for any initial riemannian metr
solution to the Ricci flow with surgery, defined in our previous paper math.DG/0303109, becomes extinct in finite time. The proof uses a version of
argument from 1999 paper by Richard Hamilton, and a regularization of the curve shortening flow, worked out by Altschuler and Grayson.

Comments:	7 pages
Subjects:	**Differential Geometry (math.DG)**
MSC classes:	53C
Cite as:	**arXiv:math/0307245 [math.DG]**
	(or **arXiv:math/0307245v1 [math.DG]** for this version)

Submission history

From: Grisha Perelman [view email]
[v1] Thu, 17 Jul 2003 15:26:38 GMT (8kb)

O składnikach i prażródłach dowodu Perelmana dla każdego

Równanie przewodnictwa ciepła w jednorodnym pręcie

Temperatura $u = u(x,t)$ spełnia równanie

$$u_t = u_{xx} \qquad \text{dla} \qquad x \in (0,\pi), \quad t > 0,$$

z warunkiem poczatkowym $u(x,0) = f(x)$ (dany jest **początkowy rozkład temperatury**) i warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

(końce pręta mają stałą temperaturę).

Technika Fouriera: rozdzielanie zmiennych

Jeśli $u(x,t) = v(t)w(x)$ spełnia równanie

$$u_t = u_{xx},$$

to wówczas

$$v_t \cdot w = v \cdot w_{xx}$$

tzn. (o ile $v, w \neq 0$)

$$\frac{v_t}{v} = \frac{w_{xx}}{w} = \textbf{const}, \qquad\qquad x \in (0,\pi), \quad t > 0.$$

Obie strony powyższego równania są **funkcjami stałymi**, bo każda zależy od **innej** zmiennej

Postać v, w; warunki brzegowe

1. Jeśli $w''(x) = c \cdot w(x)$ i $w(0) = w(\pi) = 0$, to

$$w(x) = \sin nx, \quad c = -n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Jeśli $v'(t) = c \cdot v(t)$ i $c = -n^2$, to

$$v(t) = e^{-n^2 t}.$$

3. **Wniosek:** równanie ciepła $u_t = u_{xx}$ spełniają funkcje

$$e^{-n^2 t} \sin nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a także – dzięki liniowości równania – ich sumy

$$u(x, t) = \sum_n b_n \cdot e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Ostatnia sprawa: warunek poczatkowy

Jeśli

$$u(x,t) = \sum_n b_n \cdot \underbrace{e^{-n^2 t}}_{=1 \text{ dla } t=0} \cdot \sin nx\,.$$

i w chwili $t = 0$ ma być $u(x,0) = f(x)$, to

$$f(x) = \sum_n b_n \cdot \sin nx\,, \qquad x \in (0,\pi).$$

Morały:

- Dla (b_n) ograniczonych szereg $u(x,t)$ określa funkcję klasy C^∞;
- Dla **bardzo dużych** czasów $u \simeq b_1 e^{-t} \sin t$;
- Równanie ciepła w szybkim tempie wygładza początkowe nierówności rozkładu temperatury;
- Równanie wskazuje konkretną izotopię między wykresem f a odcinkiem.

Potok krzywiznowy na płaszczyźnie

- Dana w chwili $t = 0$: gładka krzywa zamknięta $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$;
- Przepis na ruch: $\vec{\mathbf{v}} = \kappa \cdot \vec{\mathbf{n}}$, gdzie κ oznacza krzywiznę ze znakiem, a $\vec{\mathbf{n}}$ jest wektorem normalnym *wewnętrznym*

Najprostsze własności:

- To jest potok gradientowy funkcjonału $\mathcal{F}[\gamma] =$ długość γ;
- Lokalne istnienie rozwiązań, Γ_t dla $t \in [0, t_\dagger)$;
- "Zakaz wyprzedzania" (zasada maksimum) ;
- Okrąg pozostaje okręgiem; $R' = -1/R \Rightarrow R^2(t) = R_0^2 - 2t$;
- Pole ograniczone krzywą maleje w stałym tempie:

$$\frac{dA}{dt} = -\int_{\Gamma_t} \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\int_{\Gamma_t} \kappa = 2\pi\,.$$

Zachowanie rozwiązań dla dużych czasów

Twierdzenie (Gage, Hamilton). Krzywe zamknięte **wypukłe** kurczą się w skończonym czasie do tzw. *okrągłych punktów*.

Twierdzenie (Grayson). Każda krzywa zamknięta po skończonym czasie stanie się **wypukła**.

Morał: nie pojawiają się osobliwości; potok krzywiznowy można traktować jako poglądową ilustrację istnienia homeomorfizmu, o którym mowa w w twierdzeniu Jordana o krzywych.

Inny przykład: potok średniokrzywiznowy

- Dana w chwili $t = 0$: zamknięta gładka powierzchnia $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^3$;
- Przepis na ruch: $\vec{\mathbf{v}} = H \cdot \vec{\mathbf{n}}$, gdzie H oznacza krzywiznę średnią, a $\vec{\mathbf{n}}$ jest wektorem normalnym *wewnętrznym*

Własności:

- Lokalne istnienie rozwiązań, Γ_t dla $t \in [0, t_\dagger)$;
- "Zakaz wyprzedzania" (zasada maksimum) ;
- Sfera pozostaje sferą;
- **Twierdzenie (Huisken).** Powierzchnie zamknięte **wypukłe** kurczą się w skończonym czasie do tzw. *okrągłych punktów*.

Istotna różnica: mogą pojawiać się osobliwości

Osobliwości potoku średniokrzywiznowego: hantelek Graysona

- Powierzchnia początkowa Σ_0: dwa duże, zbliżone do sfer bąble, połączone długą i cienką rurką;
- Pomysł: umieścić Σ_0 wewnątrz **obrotowej** powierzchni okresowej Γ_0;
- Ruch **generatora** powierzchni Γ_0 opisuje równanie

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} - \frac{1}{u}$$

- Pole przekroju rurki to

$$P(t) = \int_0^L u(x,t)\,dx$$

- Okazuje się, że $P'(t)$ nie zależy od wielkości bąbli!

Kiedy i jak pęka hantelek Graysona?

1. Jeśli dla $t = 0$ rurka mieści się w walcu dł. L i promieniu r, to

$$
\begin{aligned}
P'(t) = \int_0^L u_t(x,t)\,dx &= \int_0^L \left(\frac{u_{xx}}{1+u_x^2} - \frac{1}{u} \right) dx \\
&\leqslant \int_{\text{wykres } u} \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}\,ds - \frac{L}{r} \\
&\leqslant \pi - \frac{L}{r} < \text{np. } -10^{2017} \quad \text{dla } L \ggg 1 \ggg r > 0.
\end{aligned}
$$

2. Z drugiej strony, okrągłe bąble nie mogą się skurczyć szybciej, niż zawarte w ich wnętrzu duże sfery ('zakaz wyprzedzania').
3. Zatem: gdzieś na rurce pojawi się osobliwość, zanim bąble znikną.

Klasyfikacja powierzchni zamkniętych, orientowalnych

- Wiadomo: decyduje o niej rodzaj (genus) powierzchni, tzn. liczba rączek doklejonych do sfery.

Geometria pozwala dostrzegać **'lepsze od innych'** modele powierzchni każdego rodzaju:

- Jeśli $g = 0$, to na powierzchni istnieje metryka o krzywiźnie Gaussa $K \equiv 1$;
- Jeśli $g = 1$, to na powierzchni istnieje metryka z $K \equiv 0$ (płaski torus, z geometrią stołu bilardowego);
- Jeśli $g \geqslant 2$, to na powierzchni istnieje metryka z $K \equiv -1$ (iloraz dysku Łobaczewskiego przez pewną grupę jego izometrii)

Geometria wg. Williama Thurstona

Geometria to jednorodna i jednospójna rozmaitość Riemannowska X, która ma dyskretną grupę izometrii G taką, że iloraz X/G jest zwarty.

Przykład: $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}^2$; iloraz X/G jest torusem.

Geometrie dwuwymiarowe są trzy: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ i $\mathbb{H}^2$.

Geometrie trójwymiarowych jest osiem:

- trzy oczywiste $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ i $\mathbb{H}^3$;
- dwie w miarę oczywiste $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$;
- trzy wyjątkowe, bardziej egzotyczne.

Struktura geometryczna: zupełna, lokalnie jednorodna metryka.

Rozkład 3-rozmaitości na części i hipoteza geometryzacyjna

Rozkład Knesera–Milnora na czynniki pierwsze ('cięcia wzdłuż sfer')

$$M^3 = (K_1 \# \ldots \# K_p) \# (L_1 \# \ldots \# L_q) \# \left(\mathop{\#}_{i=1}^{r} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \right)$$

- K_j to części o nieskończonej π_1, z $\pi_k \equiv 0$ dla $k \geqslant 2$;
- L_i to części o skończonej π_1, dla których nakryciem uniwersalnym jest $\mathbb{S}^3$;
- Każda sfera $\mathbb{S}^2$ w częściach typu K, L jest brzegiem 3-dysku w M.

Rozkład Johannsena na czynniki proste ('cięcia wzdłuż nieściśliwych torusów')

- K_j mogą zawierać 'nieściśliwe torusy', po skończonej liczbie dalszych cięć wzdłuż nich otrzymujemy części, w których *nie ma* oczywistych przeszkód do istnienia struktury geometrycznej.

HG W. Thurstona: Na każdej składowej otrzymywanej z tych rozkładów można wprowadzić strukturę geometryczną.

Potok Ricciego

Definicja: Rodzina metryk na danej rozmaitości M^3 taka, że

$$g'(t) = -2\mathrm{Ric}(g(t))$$

Lokalnie, w odpowiednich współrzędnych:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g, \nabla g)\,,$$

gdzie Q zależy kwadratowo od ∇g (tzn. mamy równanie ciepła, ale z dodatkową kwadratową nieliniowością).

Twierdzenie (Hamilton, 1983). Hipoteza Poincarégo zachodzi dla rozmaitości M^3, na których istnieje metryka riemannowska o dodatniej krzywiźnie Ricciego.

Pomysł Hamiltona: wykorzystać potok Ricciego do dowodu HP w pełnej ogólności. **Główny kłopot:** analizaosobliwości…

Co zrobił Perelman?

1. Możliwe są **tylko standardowe osobliwości** Potoku Ricciego (rurka lub czapeczka)
2. **Metoda przewidywania nadchodzących osobliwości** (analiza rejonów, gdzie krzywizna rośnie)
3. **Chirurgie:** wyciąć wąskie części, zastąpić dobrze dobranymi czapkami sferycznymi o ograniczonej krzywiźnie, obserwować ruch otrzymanych części.
4. **Kontrola liczby niezbędnych chirurgii:** Liczba chwil czasu T_i, gdzie dochodzi do wybuchu krzywizny, jest lokalnie skończona w $[0, \infty)$
5. Po skończonej liczbie chirurgii, początkowa rozmaitość rozpada się na części, które potrafimy 'dostatecznie dobrze' rozpoznać

Reakcja społeczności matematycznej na prace Perelmana

Reakcja społeczności matematycznej na prace Perelmana

Kilka niezależnych zespołów, czytających preprinty Perelmana i uzupełniających usterki ekspozycji, m.in.

- Bruce Kleiner i John Lott (Michigan)
- John Morgan i Gang Tian (Stony Brook / Princeton)

Efekty: m.in. monografia Morgana i Tiana (ponad 500 str.), długi (ponad 250 str.) artykuł Kleinera i Lotta w *Geometry and Topology*.

2006: Science uznaje wyniki Perelmana za najważniejsze osiągnięcie roku **całej** nauce. Perelman nie przyjmuje medalu Fieldsa.

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

William Thurston o Perelmanie (laudacja z lata 2010):

Perelman, dzięki olbrzymiej koncentracji i wirtuozerii, skonstruował piękny dowód tam, gdzie mnie samemu ani innym to się nie udało. Jest to dowód, którego ja nie mógłbym przeprowadzić, gdyż niektóre z mocnych stron Perelmana są moimi słabymi stronami. To, że hipoteza geometryzacyjna jest prawdziwa, nie jest niespodzianką.

Nie jest także niespodzianką dowód, w jakimś sensie bardzo właściwy i nieunikniony; o takim dowodzie wiele osób, w tym ja, marzyło od dawna. Cudowną i zdumiewającą niespodzianką jest to, że ktomuś – Perelmanowi – udało się, mimo wielu przeszkód, wyzwań i pułapek, ściśle przeanalizować i poddać kontroli ten proces. (…)

Thurston o Perelmanie, część II

Awersja, jaką Perelman darzy publiczne spektakle, zaszczyty i bogactwo, jest dla wielu osób zagadką. Nie rozmawiałem z nim o tym nigdy i z pewnością nie mam prawa wypowiadać się w jego imieniu, ale chcę powiedzieć, że darzę pełną empatią i podziwem jego wewnętrzną siłę i jasność myśli oraz zdolność świadomego dochowania wierności samemu sobie.

Nasze prawdziwe potrzeby są głębsze – jednak we współczesnym świecie większość z nas odruchowo i nieustępliwie walczy o bogactwo, dobra doczesne i podziw innych. Uczyliśmy się od Perelmana matematyki. Może powinniśmy zatrzymać się na chwilę, zastanowić nad sobą i wynieść lekcję także ze stosunku Perelmana do życia.

Dziękuję!