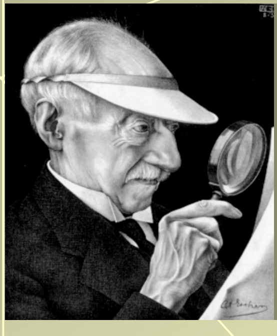


ZADANIA ODWROTNE W METROLOGII

Roman Z. Morawski

Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki I Technik Informacyjnych
Instytut Radioelektroniki i Technik Multimedialnych
r.morawski@ire.pw.edu.pl

PLAN

- Pojęcia podstawowe
- Modelowanie matematyczne
- Meta-model pomiaru
- Niepewność wyników pomiaru
- Wnioski

POJĘCIA PODSTAWOWE
Definicje prowizoryczne

- ***Metrologia*** = nauka o pomiarach, tj. o czynnościach wykonywanych w celu ustalenia miar wielkości fizycznej w postaci iloczynu jednostki miary i liczby określającej wartość tej wielkości

- ***Zadanie odwrotne*** = identyfikacja przyczyn zdarzenia lub zjawiska na podstawie danych o jego skutkach

POJĘCIA PODSTAWOWE
Definicje uściślone

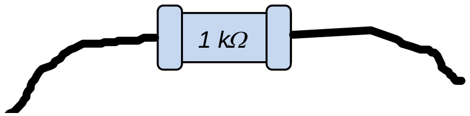
- ***Model matematyczny*** = matematyczna reprezentacja wiedzy (zmienna, równanie, ...) o klasie zdarzeń lub zjawisk będących przedmiotem poznania i/lub badania.

- ***Pomiar*** = estymacja (uogólnionych) parametrów modelu matematycznego obiektu pomiaru.

- ***Zadanie podstawowe*** = estymacja wielkości reprezentujących skutki zdarzenia lub zjawiska na podstawie danych o jego przyczynach oraz modelu matematycznego reprezentującego zależność skutków od przyczyn

- ***Zadanie odwrotne*** = estymacja wielkości reprezentujących przyczyny zdarzenia lub zjawiska na podstawie danych o jego skutkach oraz modelu matematycznego reprezentującego zależność skutków od przyczyn

POJĘCIA PODSTAWOWE
Definicje uściślone

- Przykład: modelowanie rezystora 

- Najprostszy model matematyczny rezystora: równanie $u = Ri$ modelujące zależność napięcia u od prądu i z jednym parametrem skalarnym R

- Pomiar rezystancji: estymacja (wartości) parametru R

- Zadanie podstawowe: wyznaczanie wartości napięcia u na podstawie zmierzonej wartości prądu wymuszającego i oraz modelu podstawowego $u = Ri$

- Zadanie odwrotne: wyznaczanie wartości prądu wymuszającego i na podstawie zmierzonej wartości napięcia u oraz modelu odwrotnego $i = \frac{1}{R}u$

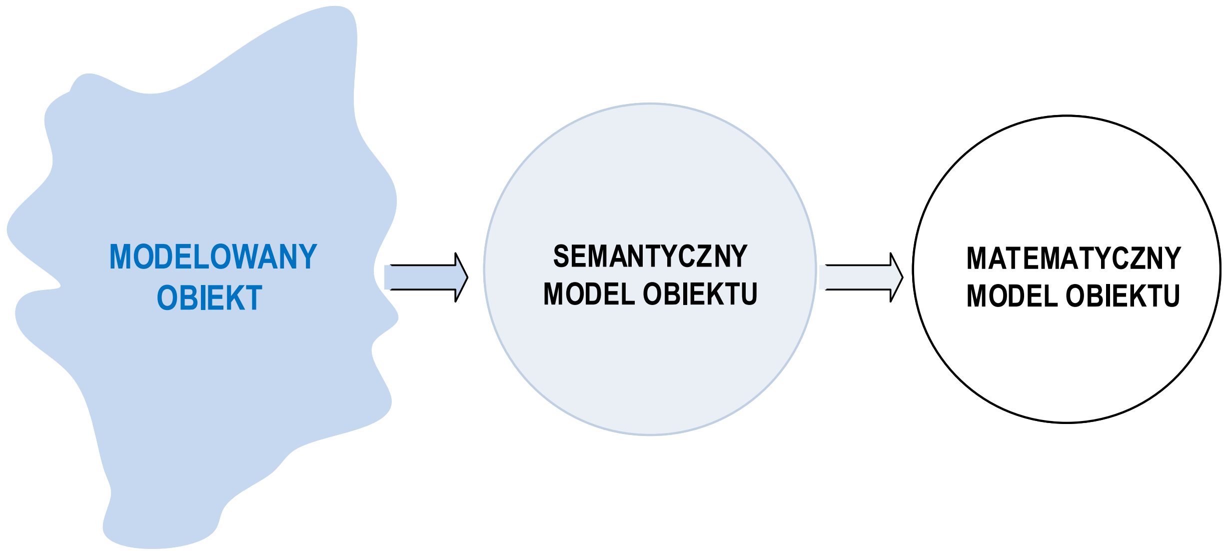
- Komentarz: $i \in [i_{\min}, i_{\max}]$ nie zmienia się w czasie, R nie zależy od i, wpływ temperatury i wilgotności jest nieistotny, *etc.*

POJĘCIA PODSTAWOWE
Paradygmat przyczynowości

- Przyczynowość jako jedna z form powszechnej i koniecznej zależności zdarzeń i zjawisk przyrodniczych
- Historyczna ewolucja pojęcia w aspekcie ontologicznym i epistemologicznym: Arystoteles,…, Św. Tomasz z Akwinu,…, David Hume
- Produktywność paradygmatu przyczynowości w nauce klasycznej, w technice i medycynie
- Wątpliwości formułowane w fizyce kwantowej
- Przykład: przyczynowość w rezystorze: $i \to u \ \left(u = Ri\right)$ lub $u \to i \ \left(i = Gu\right)$

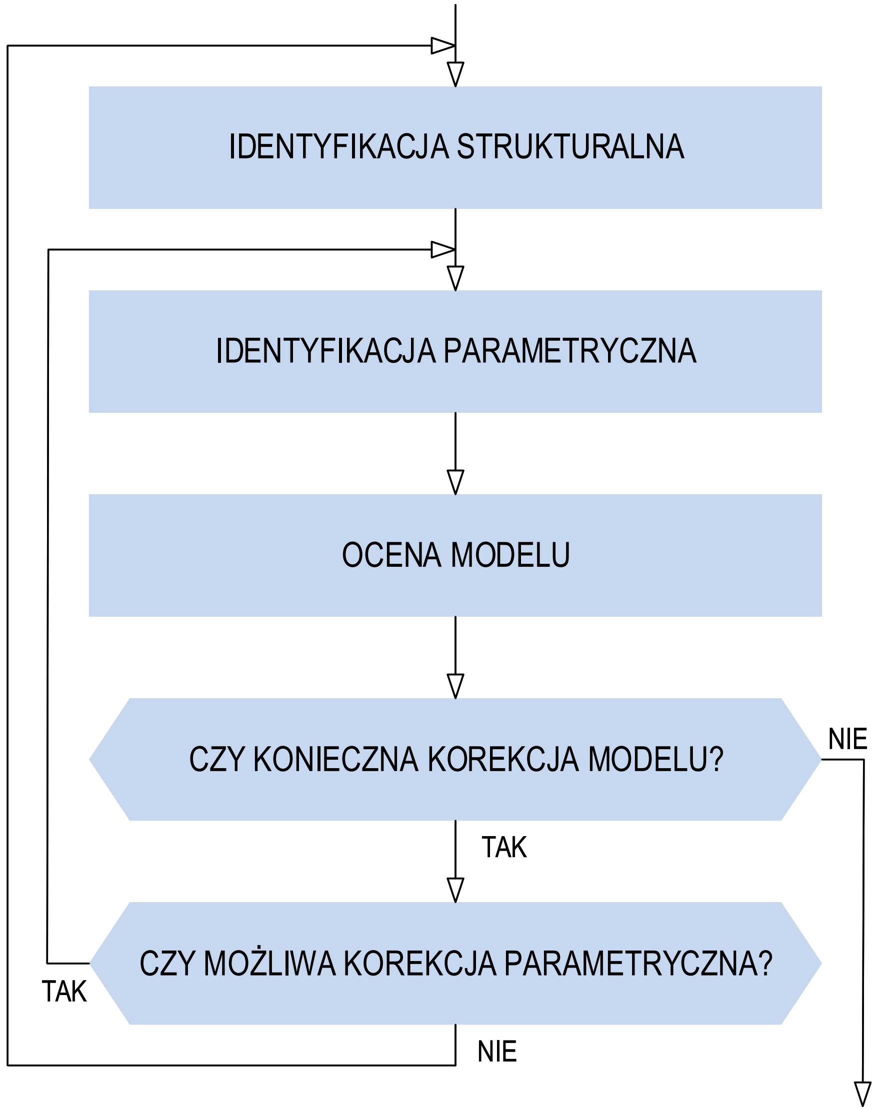
MODELOWANIE MATEMATYCZNE
Modelowanie obiektu lub zjawiska fizycznego

- Modelowanie *semantyczne* jako preludium do modelowania matematycznego *sensu stricto*



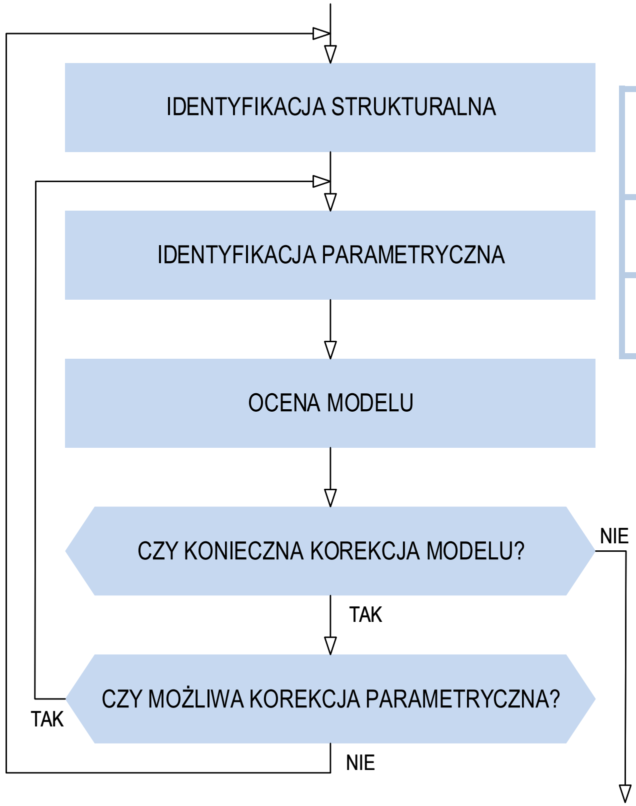
- Heurystyczne znaczenie paradygmatu systemowego

MODELOWANIE MATEMATYCZNE
Modelowanie obiektu lub zjawiska fizycznego



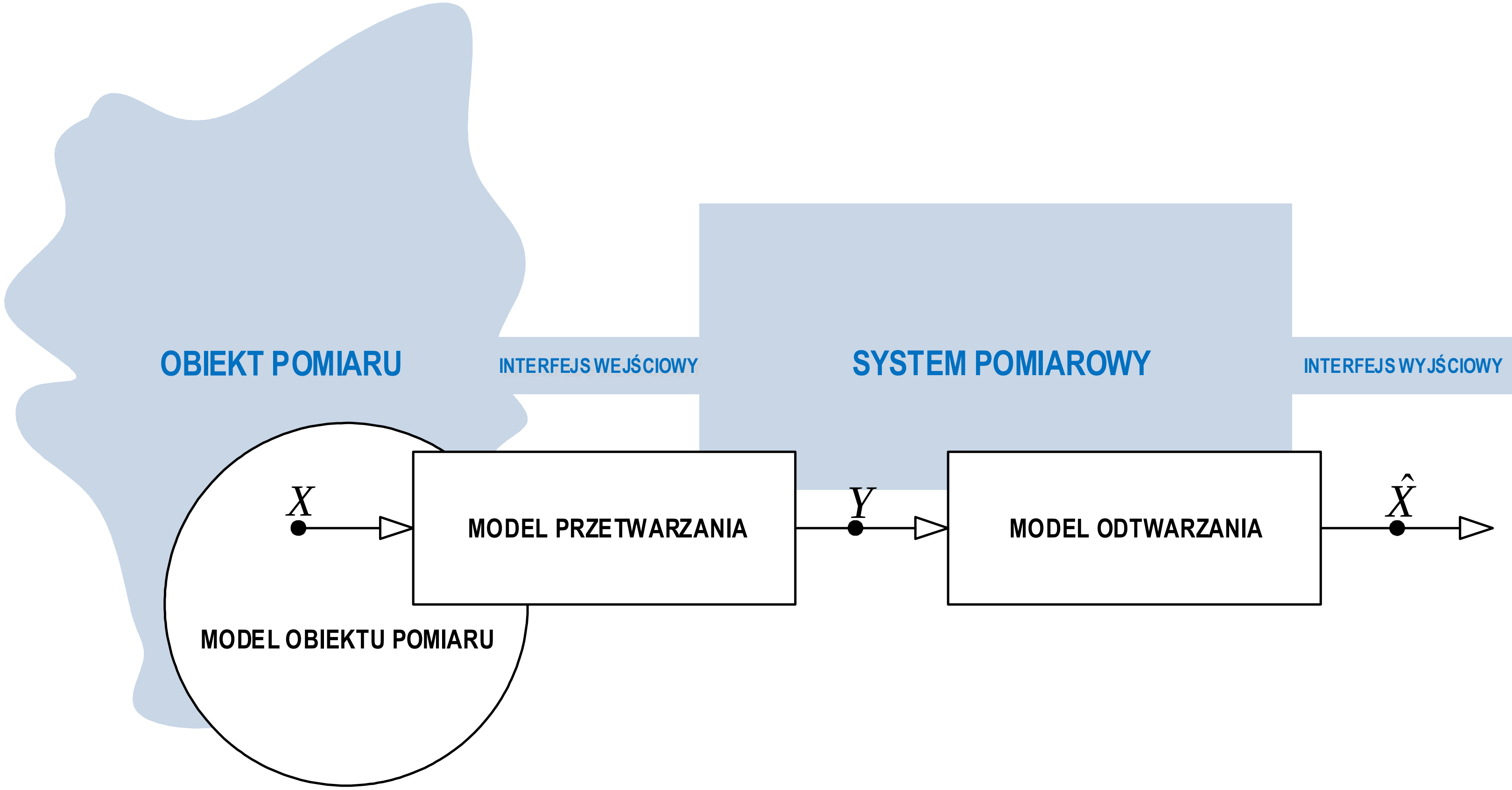
MODELOWANIE MATEMATYCZNE
Modelowanie obiektu lub zjawiska fizycznego

Przykład: modelowanie czujnika temperatury (tj. przetwornika temperatury ϑ na napięcie u)



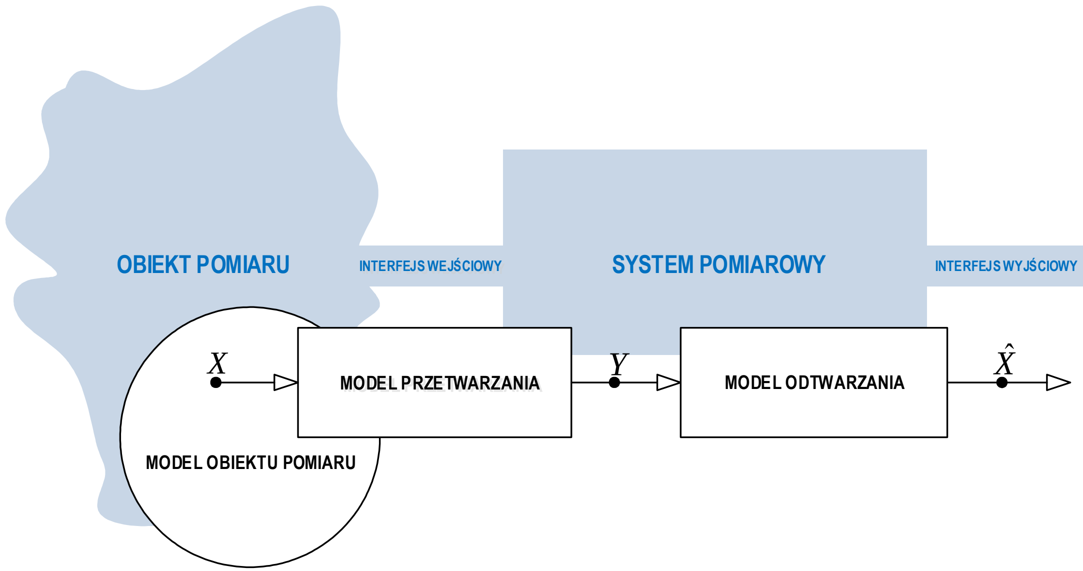
	Zmienność temperatury	
Zakres temperatury	wolna	szybka
wąski	$u = a_1\vartheta$	$Tu'(t) = -u(t) + a_1\vartheta(t)$
szeroki	$u = a_0 + a_1\vartheta + a_2\vartheta^2$	$Tu'(t) = -u(t) + a_0 + a_1\vartheta(t) + a_2\vartheta^2(t)$

META-MODEL POMIARU
Wersja minimalna



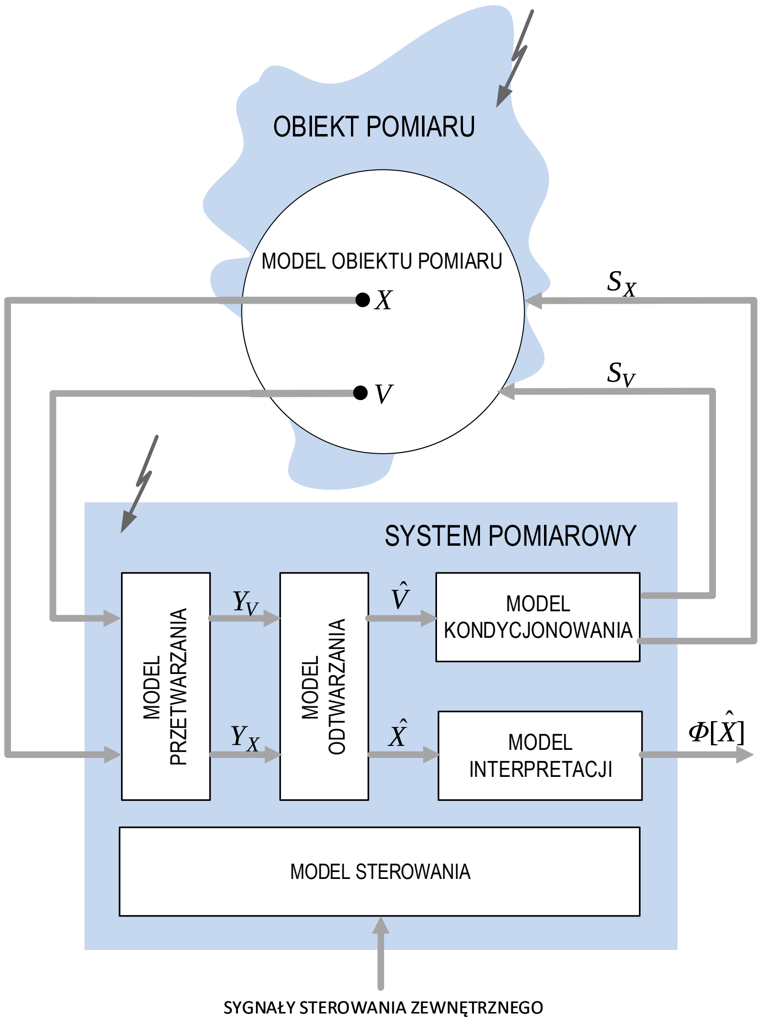
$$\left.\begin{array}{lll} X & – & \text{mezurand} \\ Y & – & \text{surowy wynik pomiaru} \\ \hat{X} & – & \text{ostateczny wynik pomiaru} \end{array}\right\} \text{zmienne uogólnione (skalary, wektory, funkcje,...)}$$

META-MODEL POMIARU
Wersja minimalna



Modele przetwarzania	Modele odtwarzania
$y = f(x)$	$\hat{x} \cong f^{-1}(y)$
$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{x} \cong \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$
$y(t) = f(x(t))$	$\hat{x}(t) \cong f^{-1}(y(t))$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$	$\hat{\mathbf{x}}(t) \cong \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}(t))$
…	…
$\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), \ldots)$	$\hat{\mathbf{x}}(t) \cong \arg_{\mathbf{x}(t)} \{\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t), \ldots)\}$
…	…

META-MODEL POMIARU
Wersja ogólna



Y_X – dane niosące informację o mezurandzie

S_X – sygnał wzbudzający pożądany stan mezurandu

$\hat{X}$ – estymata mezurandu

$\Phi\left[\hat{X}\right]$ – funkcja lub funkcjonał estymaty mezurandu

V – uogólniona wielkość wpływająca

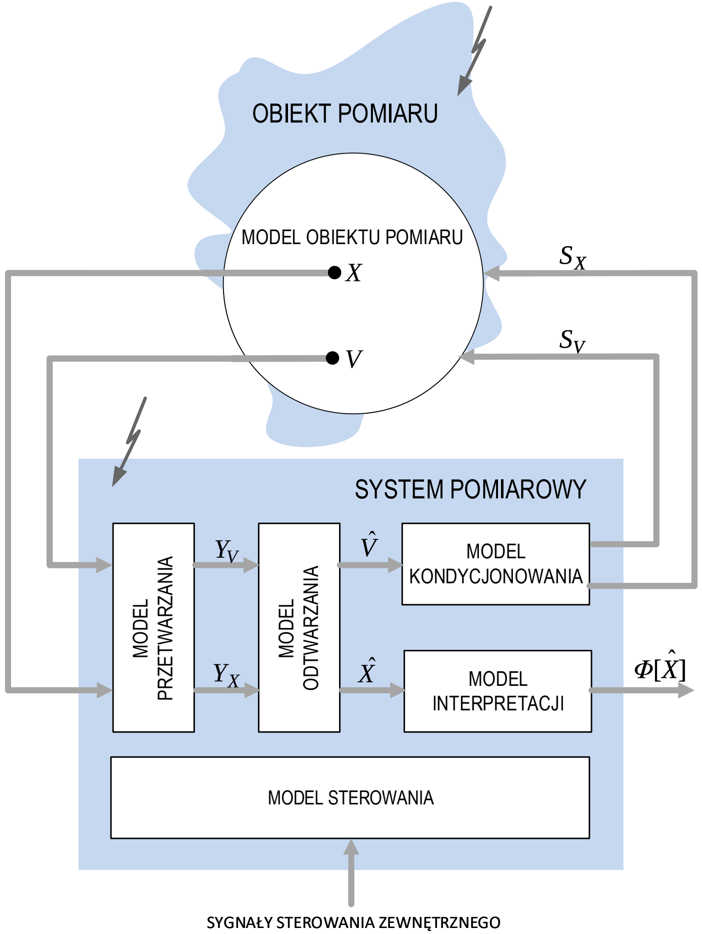
Y_V – dane niosące informację o uogólnionej wielkości wpływającej

S_V – sygnał wzbudzający pożądany stan uogólnionej wielkości wpływającej

$\hat{V}$ – estymata uogólnionej wielkości wpływającej

NIEPEWNOŚĆ WYNIKÓW POMIARU
Źródła niepewności pomiaru

- Wewnętrzne: strukturalna nieadekwatność i parametryczna niedokładność wszystkich modeli matematycznych składających się na meta-model pomiaru



- Zewnętrzne: zakłócenia pochodzące z otoczenia obiektu pomiaru i systemu pomiarowego oraz błędy operatora tego systemu

NIEPEWNOŚĆ WYNIKÓW POMIARU
Krytyczne znaczenie modelu odtwarzania

- Złe postawienie i uwarunkowanie numeryczne zadań odwrotnych: niejednoznaczność rozwiązań i ich nadwrażliwość na błędy danych (Jacques S. Hadamard)

- Mechanizm: wzmacnianie względnych błędów danych podczas wykonywania operacji zawierających odejmowanie liczb o zbliżonych wartościach:

$$\left.\begin{aligned} y &= x_1 - x_2 \\ \tilde{x}_1 &= x_1 + \Delta\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 + \Delta\tilde{x}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \left(x_1 - x_2\right) + \left(\Delta\tilde{x}_1 - \Delta\tilde{x}_2\right) = y + \Delta\tilde{y}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\tilde{y} = \Delta\tilde{x}_1 - \Delta\tilde{x}_2 \\ &\sup\left|\Delta\tilde{x}_1\right| = \sup\left|\Delta\tilde{x}_2\right| = \Delta x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sup\left|\frac{\Delta\tilde{y}}{y}\right| = \frac{\sup\left|\Delta\tilde{y}\right|}{\left|y\right|} = \frac{\sup\left|\Delta x_1 - \Delta x_2\right|}{\left|x_1 - x_2\right|} = \frac{2\Delta x}{\left|x_1 - x_2\right|} \xrightarrow[x_1 \to x_2]{} \infty$$

- Powszechność: (przyczyna) $X \underset{\text{różniczkowanie}}{\overset{\text{calkowanie}}{\rightleftarrows}} Y$ (skutek)

Krytyczne znaczenie modeli odtwarzania

Przykład: odtwarzanie temperatury na podstawie danych z czujnika, którego model ma postać:

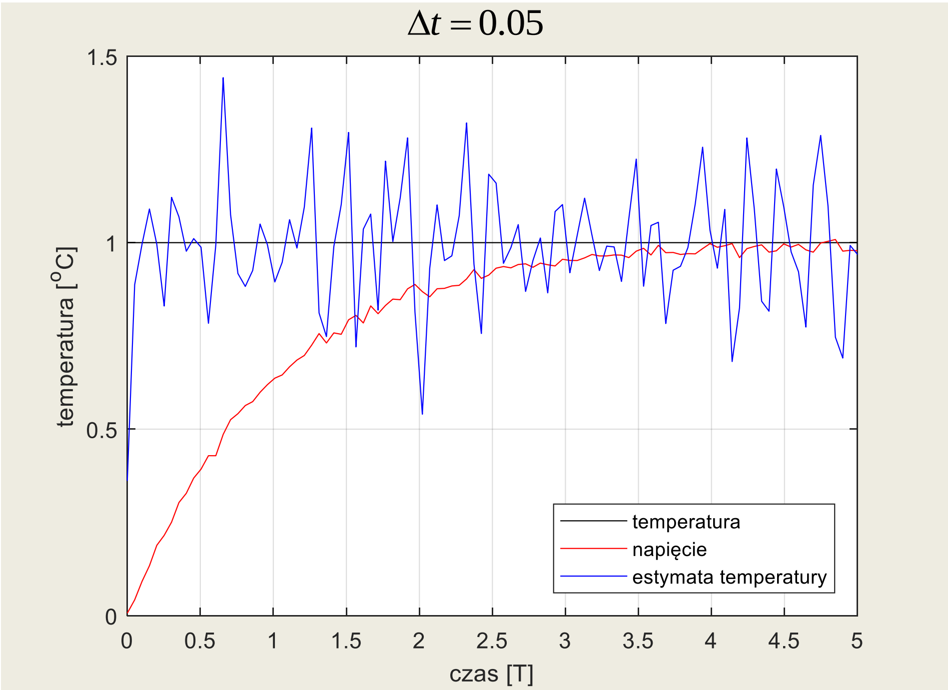
$$Tu'(t) = -u(t) + \vartheta(t)$$

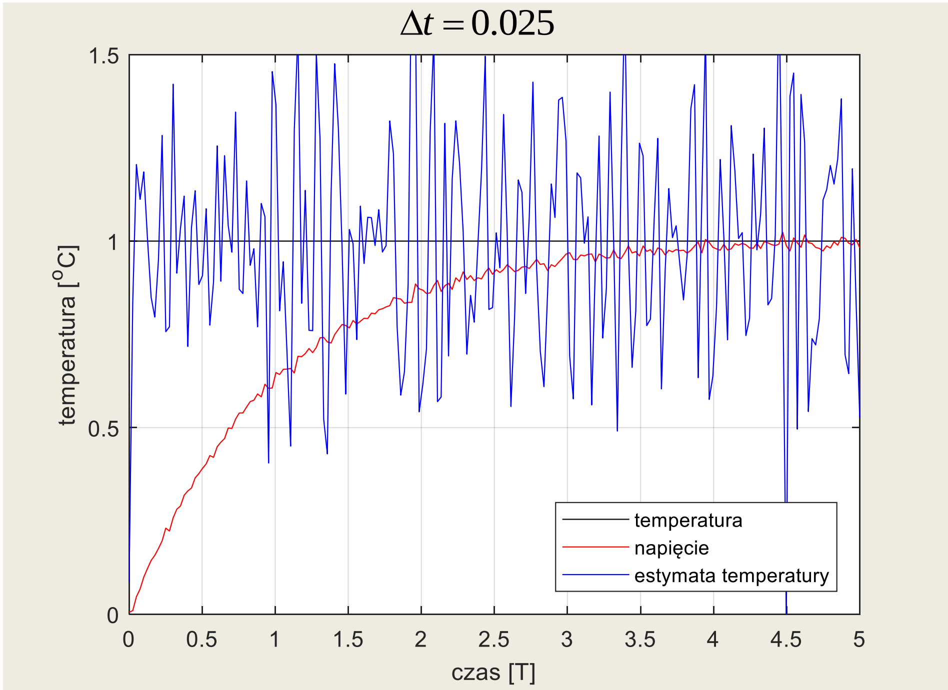
czyli estymacja $\vartheta(t)$ na podstawie modelu odwrotnego:

$$\vartheta(t) = u(t) + Tu'(t)$$

oraz surowych danych pomiarowych:

$$\tilde{u}_n = u(t_n) + \Delta\tilde{u}_n \quad \text{dla } t_n = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots; \ \Delta\tilde{u}_n \sim N(0, 10^{-4})$$



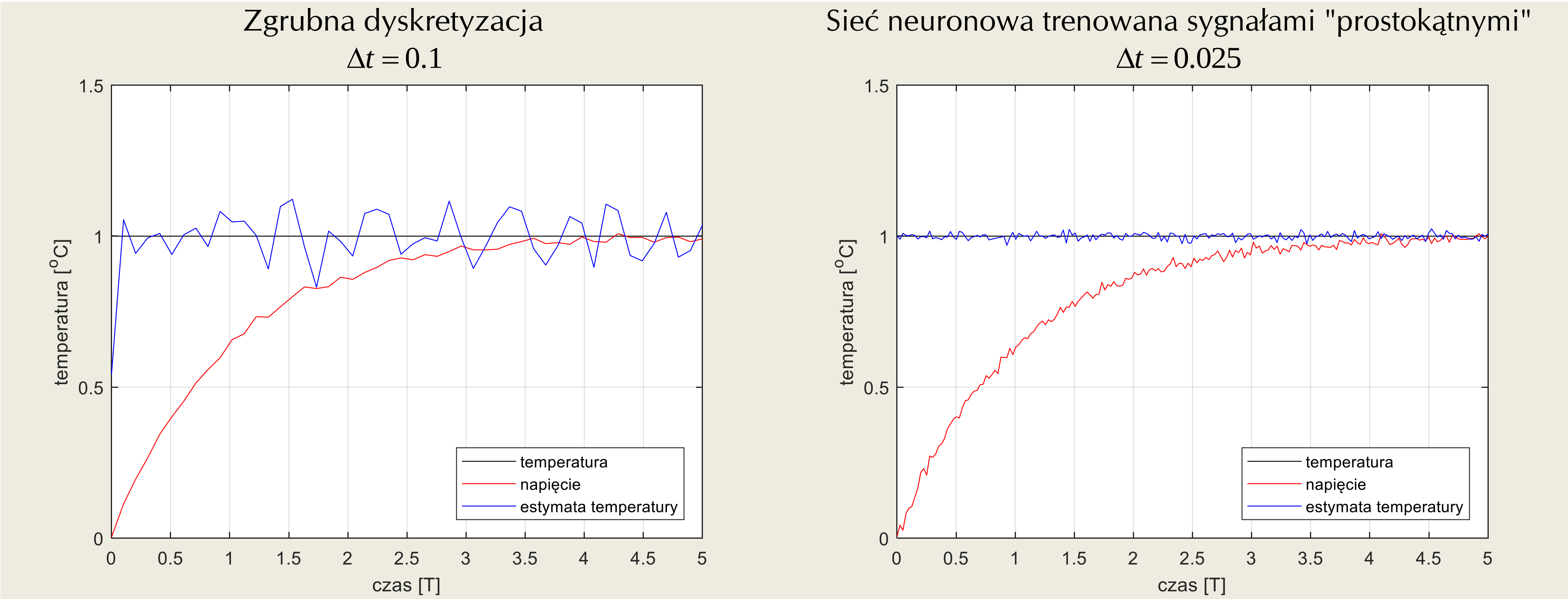


NIEPEWNOŚĆ WYNIKÓW POMIARU
Regularyzacja zadań odwrotnych

- Regularyzacja jako remedium na złe uwarunkowanie zadań odwrotnych (Андрей Н. Тихонов)
- Istota regularyzacji: zmniejszanie wrażliwości na błędy przypadkowe za cenę wprowadzenia kontrolowanego błędu systematycznego
- Metodyka regularyzacji: wykorzystanie apriorycznej informacji o klasie estymowanych wielkości i błędach danych
- Bogactwo metod regularyzacji: metody elementarne (zgrubna dyskretyzacja, ..., reguła Bayesa) i ich kombinacje

NIEPEWNOŚĆ WYNIKÓW POMIARU
Regularyzacja zadań odwrotnych

Przykład: odtwarzanie temperatury (cd.)



WNIOSKI

Fundamentalne znaczenie pomiaru dla nauki i techniki

$\Downarrow$

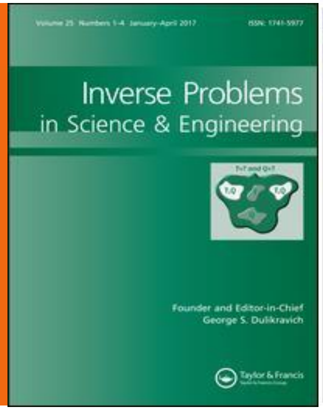
Kluczowe znaczenie zadań odwrotnych dla teorii i techniki pomiaru

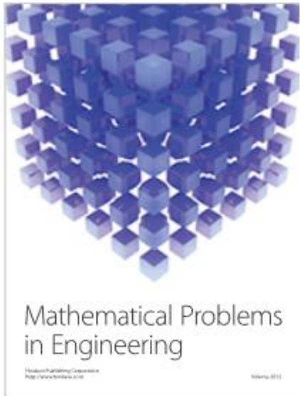
$\Downarrow$

Uniwersalne znaczenie sztuki rozwiązywania zadań odwrotnych dla nauki i techniki

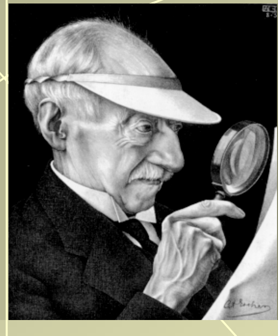
$\Downarrow$

Bogata literatura przedmiotu:





and more…



PODZIĘKOWANIA

Dziękuję wszystkim *PT* elektronikom, automatykom, metrologom, fizykom, chemikom, biologom, medykom, geologom, sejsmologom, ekologom, ..., którzy w ciągu ostatnich 45 lat wystawiali mnie na próbę zadań źle postawionych i źle uwarunkowanych numerycznie.