Równania Naviera-Stokesa

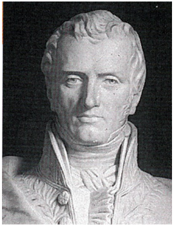
Model a rzeczywistość

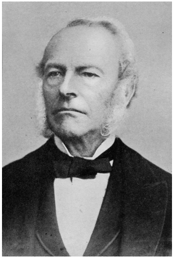
Grzegorz Łukaszewicz

SMP Wola Ducka. 26 sierpień, 2017

Plan referatu

- Model a rzeczywistość. Hydrodynamika a hydraulika.
- Paradoksy równań Eulera. Przykład.
- Równania Naviera-Stokesa. "Ten sam" przykład.
- Model a rzeczywistość. Związki. Podstawowe pytania, hipotezy.





Claude-Louis Navier (1785–1836) i George Stokes (1819–1903)

Model a rzeczywistość, hydrodynamika a hydraulika

Model a rzeczywistość, hydrodynamika a hydraulika

HYDRODYNAMIKA wyjaśnia zjawiska, które nie mogą być obserwowane,

(w ramach teoretycznych modeli, nie mających bezpośredniego związku z obserwacjami ruchu płynu; przykład książki H.Lamba)

HYDRODYNAMIKA wyjaśnia zjawiska, które nie mogą być obserwowane,

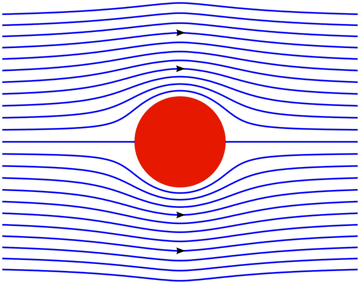
(w ramach teoretycznych modeli, nie mających bezpośredniego związku z obserwacjami ruchu płynu; przykład książki H.Lamba)

a

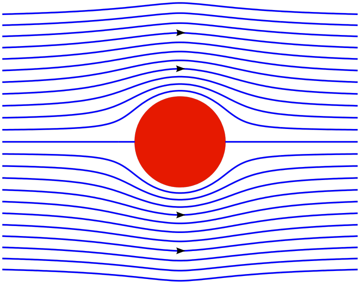
HYDRAULIKA obserwuje zjawiska, które nie mogą być wyjaśnione.

(w ramach doświadczeń z rzeczywistymi płynami, bez pełnej podbudowy teoretycznej; książki o turbulencji bez wspomnienia o równaniu N-S).

Potencjalny, nieściśliwy, nielepki opływ cylindra kołowego.



Potencjalny, nieściśliwy, nielepki opływ cylindra kołowego.



Ruch stacjonarny, opisany równaniami Eulera,

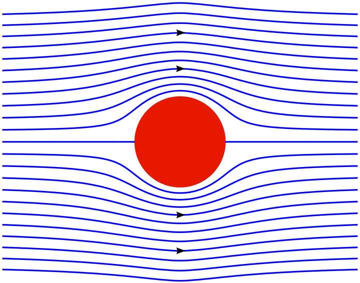
$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \ \text{ na } \ S,$$

$$\vec{u}(\infty) = \vec{a}$$

Potencjalny, nieściśliwy, nielepki opływ cylindra kołowego.



Ruch stacjonarny, opisany równaniami Eulera,

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$
$$\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$$

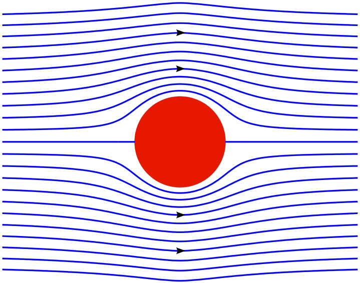
$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \;\; \mathrm{na} \;\; S,$$

$$\vec{u}(\infty) = \vec{a}$$

Mamy tu dwa paradoksy (niezależnie od symetrii):

- paradoks odwracalności.

Potencjalny, nieściśliwy, nielepki opływ cylindra kołowego.



Ruch stacjonarny, opisany równaniami Eulera,

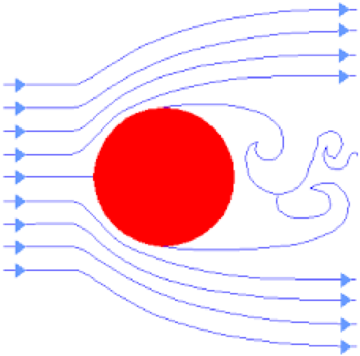
$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$
$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \ \text{ na } \ S,$$

$$\vec{u}(\infty) = \vec{a}$$

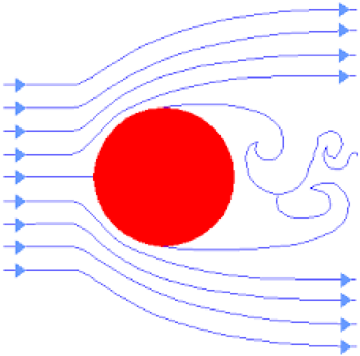
Mamy tu dwa paradoksy (niezależnie od symetrii):

- paradoks odwracalności.
- paradoks d'Alemberta, 1752 (opływany przedmiot nie stawia oporu).



Płyn przykleja się do ścianki cylindra, może się oderwać.

Opływ cylindra kołowego - efekt lepkości.

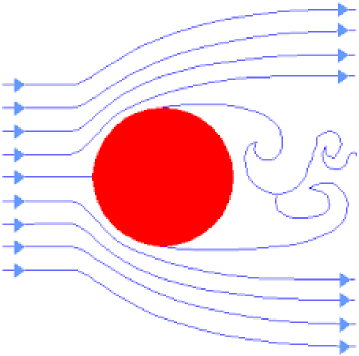


Płyn przykleja się do ścianki cylindra, może się oderwać.

Następujące sensowne założenia (przypuszczenia) nie są spełnione:

- Symetryczne przyczyny produkują symetryczne skutki (nieprawda, widać gołym okiem).

Opływ cylindra kołowego - efekt lepkości.

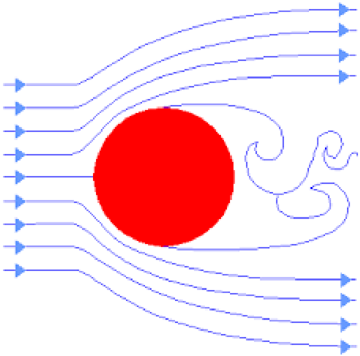


Płyn przykleja się do ścianki cylindra, może się oderwać.

Następujące sensowne założenia (przypuszczenia) nie są spełnione:

- Symetryczne przyczyny produkują symetryczne skutki (nieprawda, widać gołym okiem).
- Małe zaburzenia produkują małe skutki (nieprawda, np. zjawisko bifurkacji).

Opływ cylindra kołowego - efekt lepkości.

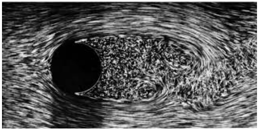


Płyn przykleja się do ścianki cylindra, może się oderwać.

Następujące sensowne założenia (przypuszczenia) nie są spełnione:

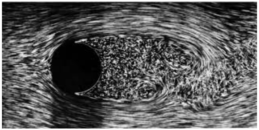
- Symetryczne przyczyny produkują symetryczne skutki (nieprawda, widać gołym okiem).
- Małe zaburzenia produkują małe skutki (nieprawda, np. zjawisko bifurkacji).
- Topologia przepływu może być odgadnięta (nie może, np. z powyższych przyczyn).

Opływ cylindra kołowego - zdjęcia.



Przepływ za opływanym obiektem jest turbulentny.

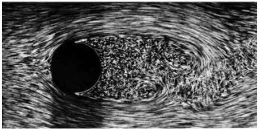
Opływ cylindra kołowego - zdjęcia.

Przepływ za opływanym obiektem jest turbulentny.
Pytania:

- Jak można go opisać? Jakimi narządziami?

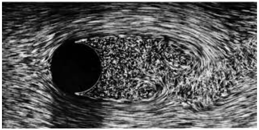
Opływ cylindra kołowego - zdjęcia.



Przepływ za opływanym obiektem jest turbulentny.
Pytania:

- Jak można go opisać? Jakimi narządziami?
- Jak można go zmierzyć?

Opływ cylindra kołowego - zdjęcia.



Przepływ za opływanym obiektem jest turbulentny.
Pytania:

- Jak można go opisać? Jakimi narządziami?
- Jak można go zmierzyć?

Teoria układów dynamicznych, atraktory, miary niezmiennicze, rozwiązania statystyczne,... "W tym szaleństwie jest metoda".

Prawo zachowania pędu:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho\vec{u}dx = \int_{\Omega(t)} \rho\vec{f}dx + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{t}_n dS$$

(prawo Newtona $ma = F$, $a = \dot{u}$; $\vec{t}_n = \vec{t}_n(x, t, \vec{n}) = \vec{n} \cdot T(x, t)$)

Prawo zachowania pędu:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho\vec{u}dx = \int_{\Omega(t)} \rho\vec{f}dx + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{t}_n dS$$

(prawo Newtona $ma = F$, $a = \dot{u}$; $\quad \vec{t}_n = \vec{t}_n(x,t,\vec{n}) = \vec{n}\cdot T(x,t)$)

$$\Longrightarrow \quad \int_{\Omega(t)} \rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right)dx + \int_{\Omega(t)} \rho\vec{f}dx + \int_{\Omega(t)} \mathrm{div}\, T dx$$

Równania hydrodynamiki klasycznej to prawa zachowania

Prawo zachowania pędu:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho\vec{u}dx = \int_{\Omega(t)} \rho\vec{f}dx + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{t}_n dS$$

(prawo Newtona $ma = F$, $a = \dot{u}$; $\quad \vec{t}_n = \vec{t}_n(x, t, \vec{n}) = \vec{n} \cdot T(x, t)$)

$$\Longrightarrow \quad \int_{\Omega(t)} \rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right)dx + \int_{\Omega(t)} \rho\vec{f}dx + \int_{\Omega(t)} \mathrm{div}\, T dx$$

W klasycznej hydrodynamice (Naviera-Stokesa)

$$T_{ij} = (-p + \lambda \mathrm{div}\, u)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

Powyżej korzystaliśmy z prawa zachowania masy, które dla $\rho = const$ wygląda tak,

$$\mathrm{div}\, u = 0.$$

Równania Naviera-Stokesa.

Prawa zachowania: pędu i masy, odpowiednio, dla płynu o stałej gęstości, lepkiego.

$$\frac{\partial \vec{u}(x,t)}{\partial t} + (\vec{u}(x,t)\cdot\nabla)\vec{u}(x,t) = -\nabla p(x,t) + \nu \triangle \vec{u}(x,t) + \vec{f}(x,t),$$

$$div\,\vec{u}(x,t) = 0.$$

Prawa zachowania: pędu i masy, odpowiednio, dla płynu o stałej gęstości, lepkiego.

$$\frac{\partial \vec{u}(x,t)}{\partial t} + (\vec{u}(x,t)\cdot\nabla)\vec{u}(x,t) = -\nabla p(x,t) + \nu\triangle\vec{u}(x,t) + \vec{f}(x,t),$$

$$div\,\vec{u}(x,t) = 0.$$

- $\vec{u}(x,t)$ - wektor **prędkości**, $p(x,t)$ - **ciśnienie** płynu, odpowiednio, w miejscu $x \in R^3$ i w chwili $t > 0$; $\nu = \mu/\rho > 0$ - **lepkość** płynu ($\nu = 0$ – r.**Eulera**).

Równania Naviera-Stokesa.

Prawa zachowania: pędu i masy, odpowiednio, dla płynu o stałej gęstości, lepkiego.

$$\frac{\partial \vec{u}(x,t)}{\partial t} + (\vec{u}(x,t)\cdot\nabla)\vec{u}(x,t) = -\nabla p(x,t) + \nu\triangle\vec{u}(x,t) + \vec{f}(x,t),$$

$$div\,\vec{u}(x,t) = 0.$$

- $\vec{u}(x,t)$ - wektor **prędkości**, $p(x,t)$ - **ciśnienie** płynu, odpowiednio, w miejscu $x \in R^3$ i w chwili $t > 0$; $\nu = \mu/\rho > 0$ - **lepkość** płynu ($\nu = 0$ – r.**Eulera**).
- Zagadnienie początkowe: dla danego wektora prędkości początkowej $\vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x)$ w chwili $t = 0$ oraz zadanego pola sił $\vec{f}(x,t)$ pytamy o istnienie rozwiązania $(\vec{u}(x,t), p(x,t))$ dla $t > 0$, $x \in R^3$.

Podstawowe pytania:

- Co rozumiemy przez "rozwiązanie" równań Naviera-Stokesa?

Podstawowe pytania:

- Co rozumiemy przez "rozwiązanie" równań Naviera-Stokesa?
- Czy interesujące rozwiązania (klasyczne, uogólnione) istnieją? Czy są jednoznacze?

Podstawowe pytania:

- Co rozumiemy przez "rozwiązanie" równań Naviera-Stokesa?
- Czy interesujące rozwiązania (klasyczne, uogólnione) istnieją? Czy są jednoznacze?
- Czy znając odpowiednie rozwiązania r. N-S możemy się dowiedzieć czegoś nowego o rzeczywistym zachowaniu się płynu?

Model a rzeczywistość. Związki. Podstawowe pytania.

Podstawowe pytania:

- Co rozumiemy przez "rozwiązanie" równań Naviera-Stokesa?
- Czy interesujące rozwiązania (klasyczne, uogólnione) istnieją? Czy są jednoznacze?
- Czy znając odpowiednie rozwiązania r. N-S możemy się dowiedzieć czegoś nowego o rzeczywistym zachowaniu się płynu?

Odpowiedzi dotyczące związków modelu i rzeczywistości:

- Nie ma uniwersalnej teorii zgodnej z doświadczeniem. Jest sporo wyników cząstkowych potwierdzających użyteczność równań N-S.

Model a rzeczywistość. Związki. Podstawowe pytania.

Podstawowe pytania:

- Co rozumiemy przez "rozwiązanie" równań Naviera-Stokesa?
- Czy interesujące rozwiązania (klasyczne, uogólnione) istnieją? Czy są jednoznacze?
- Czy znając odpowiednie rozwiązania r. N-S możemy się dowiedzieć czegoś nowego o rzeczywistym zachowaniu się płynu?

Odpowiedzi dotyczące związków modelu i rzeczywistości:

- Nie ma uniwersalnej teorii zgodnej z doświadczeniem. Jest sporo wyników cząstkowych potwierdzających użyteczność równań N-S.
- Stan badań przedmiotu przypomina stan badań nad elektrycznością i magnetyzmem przed Maxwellem.

- (H1) Istnieje uniwersalna teoria turbulencji opisująca cały zakres zjawisk dotyczących turbulencji.

Model a rzeczywistość. Hipotezy dotyczące turbulencji

- (H1) Istnieje uniwersalna teoria turbulencji opisująca cały zakres zjawisk dotyczących turbulencji.
- (H2) Równania Naviera-Stokesa opisują przepływy turbulentne.

- (H1) Istnieje uniwersalna teoria turbulencji opisująca cały zakres zjawisk dotyczących turbulencji.
- (H2) Równania Naviera-Stokesa opisują przepływy turbulentne.
- (H3) Osobliwości rozwiązań równań Naviera-Stokesa tłumaczą turbulencję.

Model a rzeczywistość. Hipotezy dotyczące turbulencji

- (H1) Istnieje uniwersalna teoria turbulencji opisująca cały zakres zjawisk dotyczących turbulencji.
- (H2) Równania Naviera-Stokesa opisują przepływy turbulentne.
- (H3) Osobliwości rozwiązań równań Naviera-Stokesa tłumaczą turbulencję.
- (H4) Turbulencję można opisać w ramach teorii chaosu deterministycznego.

Model a rzeczywistość. Hipotezy dotyczące turbulencji

- (H1) Istnieje uniwersalna teoria turbulencji opisująca cały zakres zjawisk dotyczących turbulencji.
- (H2) Równania Naviera-Stokesa opisują przepływy turbulentne.
- (H3) Osobliwości rozwiązań równań Naviera-Stokesa tłumaczą turbulencję.
- (H4) Turbulencję można opisać w ramach teorii chaosu deterministycznego.
- (H5) Przepływy turbulentne można opisać przy pomocy skończonej liczby parametrów.

Literatura

1. Tomasz Dłotko: *Teoria stabilności w sensie Lapunowa i globalne atraktory*, Delta, Styczeń 2005.

2. Grzegorz Łukaszewicz: *Hydrodynamika a hydraulika*, Delta, Sierpień 2017.

3 Witold Sadowski: *Dowody i obliczenia*, Delta, Styczeń 2017.

4. Witold Sadowski: *Równania Naviera-Stokesa*, Delta, Grudzień 2014.

5. Witold Sadowski: *Niezbędna persona non grata*, Delta, Lipiec, 2013.

DZIĘKUJĘ!