56 Szkoła Matematyki Poglądowej, 26 sierpnia 2017

Jak Erdős rzucając monetą twierdzenia dowodził...

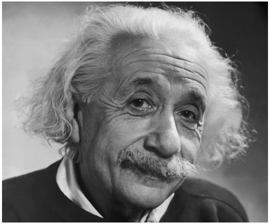
Tomasz Łuczak

Zagajenie

Istnieją dwie drogi
zdobywania wiedzy:

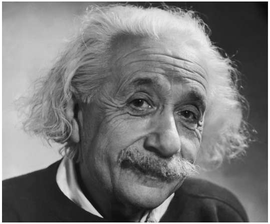
- rozwijanie teorii
- rozwiązywanie problemów

Dwie drogi



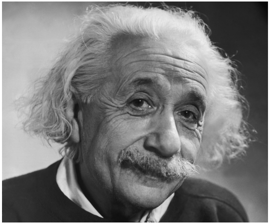
Albert Einstein
1879-1955

Dwie drogi

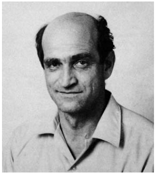


Albert Einstein
1879-1955

Pál Erdős
1913-1996



Albert Einstein
1879-1955

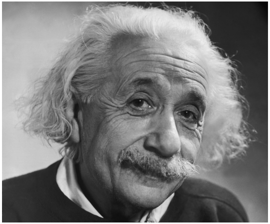


Ernst Straus
1922-1983

Pál Erdős
1913-1996

Dwie drogi

Sir Galahad



Albert Einstein
1879-1955

Don Juan

Pál Erdős
1913-1996

PROBLEM

Przypuśćmy, że mamy rodzinę $\mathcal{F}$ składającą się z 2017 podzbiorów 12-elementowych 1000-elementowego zbioru A.
Czy zawsze da się pokolorować elementy zbioru A dwoma kolorami tak, by żaden ze zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$ nie miał wszystkich elementów pokolorowanych jednym kolorem?

Problem

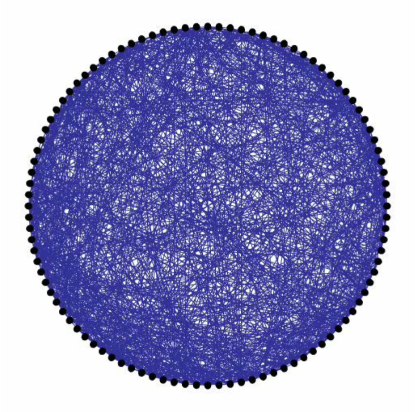
Przypuśćmy, że mamy rodzinę $\mathcal{F}$ składającą się z 2017 podzbiorów 12-elementowych 1000-elementowego zbioru A.
Czy zawsze da się pokolorować elementy zbioru A dwoma kolorami tak, by żaden ze zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$ nie miał wszystkich elementów pokolorowanych jednym kolorem?

A cóż to za . . . niemądre pytanie!?!

Gdybyśmy widzieli taką rodzinę, to jakoś byśmy sobie z nią poradzili!

A CÓŻ TO ZA . . . NIEMĄDRE PYTANIE!?!

Gdybyśmy widzieli taką rodzinę, to jakoś byśmy sobie z nią poradzili!



A CÓŻ TO ZA . . . NIEMĄDRE PYTANIE!?!

1000 i 2017 to nieduże liczby, więc komputer może łatwo sprawdzić, czy istnieje takie kolorowanie!

A CÓŻ TO ZA ... NIEMĄDRE PYTANIE!?!

1000 i 2017 to nieduże liczby, więc komputer może łatwo sprawdzić, czy istnieje takie kolorowanie!

Liczba kolorowań: $2^{1000} \sim 10^{100}$

Liczba atomów w naszej galaktyce $\sim 10^{68}$
Liczba operacji na sekundę dla procesora 10GHz: 10^{10}
Wiek naszej Galaktyki: $\sim 10^{17} s$

$$10^{68} \cdot 10^{10} \cdot 10^{17} \ll 10^{100}$$

Zamieńmy nasz problem na mniejszy...

Problem

Przypuśćmy, że mamy rodzinę $\mathcal{F}$ składającą się z 2017 podzbiorów 12-elementowych 1000-elementowego zbioru A.

Czy zawsze da się pokolorować elementy zbioru A dwoma kolorami tak, by żaden ze zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$ nie miał wszystkich elementów pokolorowanych jednym kolorem?

Zamieńmy nasz problem na mniejszy...

Problem

Przypuśćmy, że mamy rodzinę $\mathcal{F}$ składającą się z **2017** podzbiorów **12**-elementowych **1000**-elementowego zbioru A.
Czy zawsze da się pokolorować elementy zbioru A **dwoma** kolorami tak, by żaden ze zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$ nie miał wszystkich elementów pokolorowanych jednym kolorem?

Zamieńmy nasz problem na mniejszy...

Problem

Przypuśćmy, że mamy rodzinę $\mathcal{F}$ składającą się z **2017** zbiorów **12**-elementowych ~~1000-elementowego zbioru A~~.
Czy zawsze da się pokolorować elementy zbiorów z $\mathcal{F}$ dwoma kolorami tak, by żaden ze zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$ nie miał wszystkich elementów pokolorowanych jednym kolorem?

Zamieńmy nasz problem na mniejszy...

Definicja

Niech $m = m(n)$ będzie **najmniejszą** liczbą taką, że dla pewnej rodziny $\mathcal{F}$ składającej się z m zbiorów n-elementowych, która **nie da się** dobrze pokolorować,

Zamieńmy nasz problem na mniejszy...

Definicja

Niech $m = m(n)$ będzie **najmniejszą** liczbą taką, że dla pewnej rodziny $\mathcal{F}$ składającej się z m zbiorów n-elementowych, która **nie da się** dobrze pokolorować, tzn. dla każdego kolorowania elementów zbiorów rodziny $\mathcal{F}$ dwoma kolorami istnieje zbiór $F \in \mathcal{F}$ którego wszystkie elementy pokolorowane są jednym kolorem.

Zamieńmy nasz problem na mniejszy...

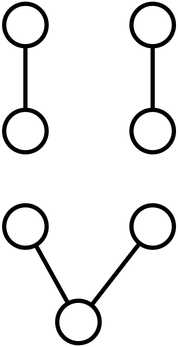
Definicja

Niech $m = m(n)$ będzie **najmniejszą** liczbą taką, że dla pewnej rodziny $\mathcal{F}$ składającej się z m zbiorów n-elementowych, która **nie da się** dobrze pokolorować, tzn. dla każdego kolorowania elementów zbiorów rodziny $\mathcal{F}$ dwoma kolorami istnieje zbiór $F \in \mathcal{F}$ którego wszystkie elementy pokolorowane są jednym kolorem.

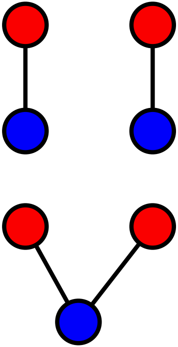
Nasz początkowy problem jest równoważny pytaniu:

$$m(12) < 2017\,?$$

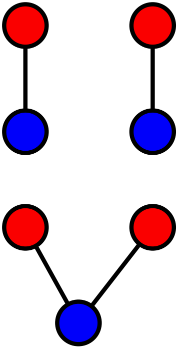
$m(2) = 3$



$m(2) = 3$

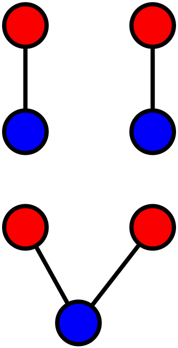


$m(2) = 3$

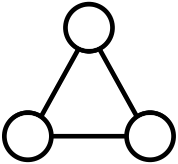


$m(2) > 2$

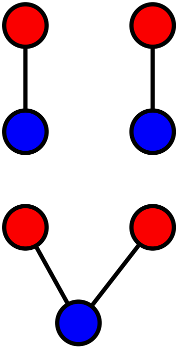
$m(2) = 3$



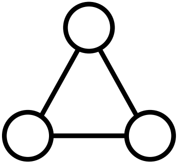
$m(2) > 2$



$m(2) = 3$

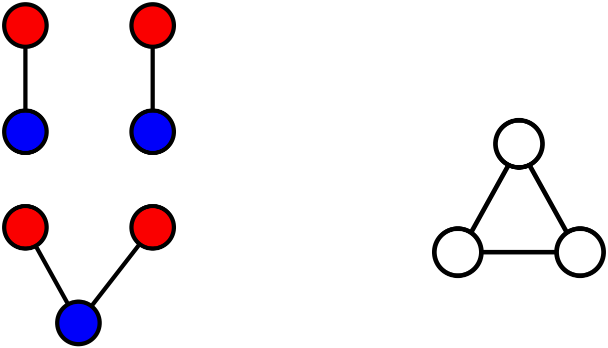


$m(2) > 2$



$m(2) \leq 3$

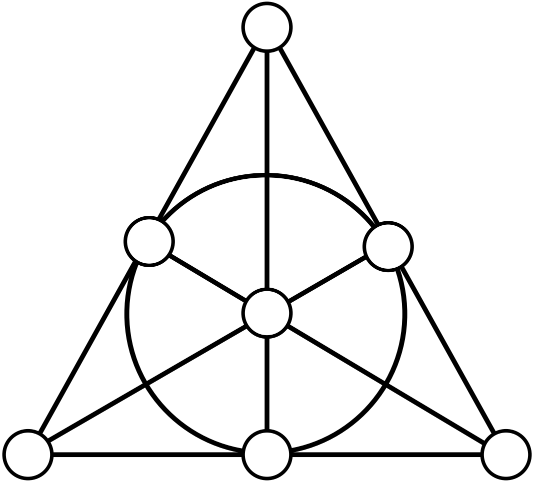
$m(2) = 3$



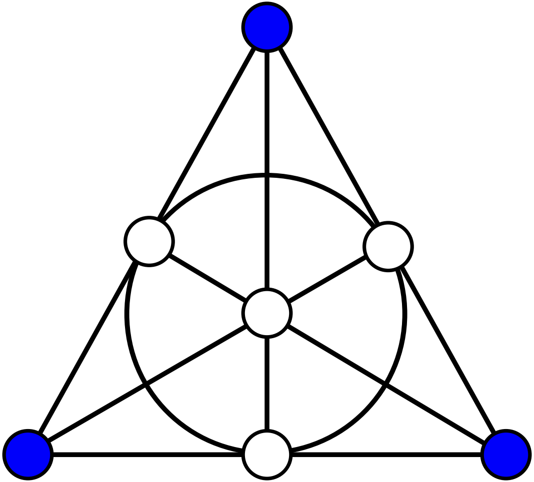
$m(2) > 2$ $\quad$ $m(2) \leq 3$

$m(2) = 3$

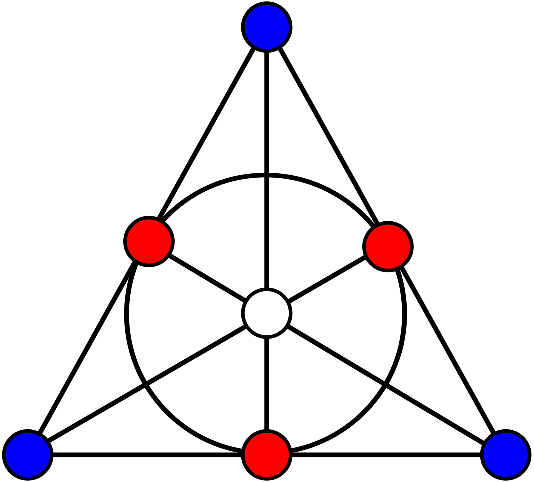
$m(3) \leq 7$



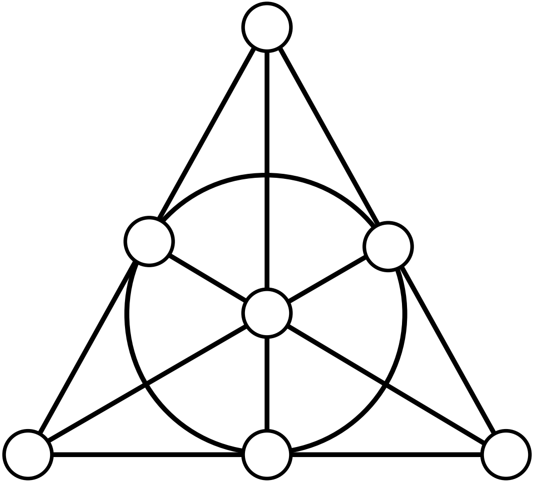
$m(3) \leq 7$



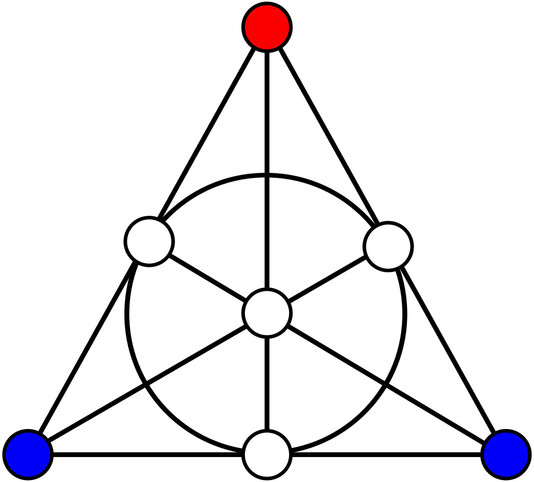
$m(3) \leq 7$



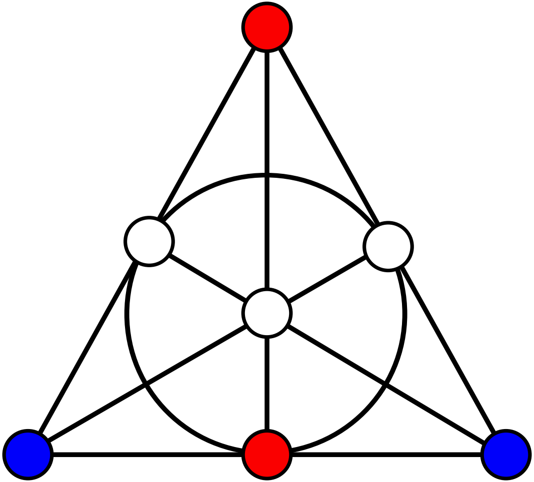
$m(3) \leq 7$



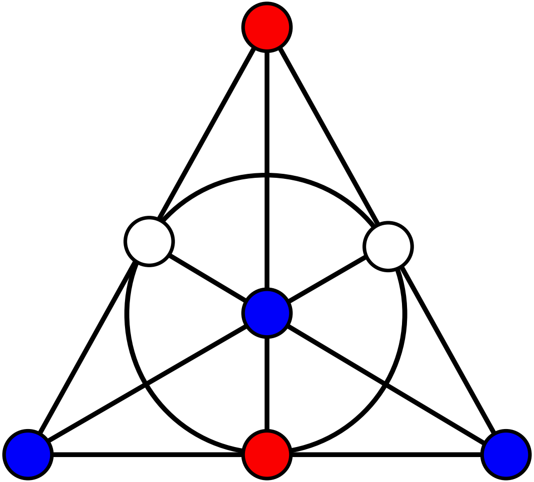
$m(3) \leq 7$



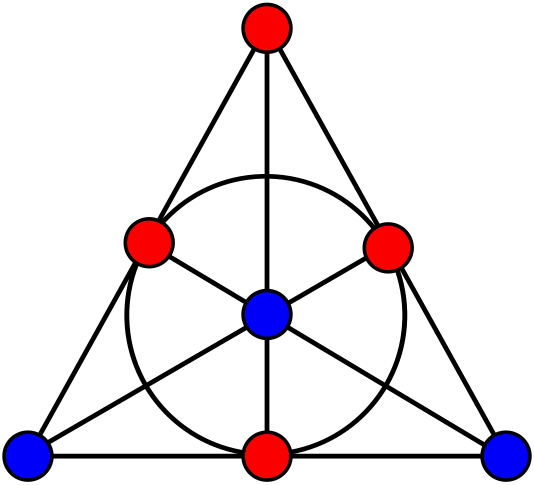
$m(3) \leq 7$



$m(3) \leq 7$



$m(3) \leq 7$



Revenons à nos moutons

Problem

Przypuśćmy, że mamy rodzinę $\mathcal{F}$ składającą się z 2017 podzbiorów 12-elementowych 1000-elementowego zbioru A.
Czy zawsze da się pokolorować elementy zbioru A dwoma kolorami tak, by żaden ze zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$ nie miał wszystkich elementów pokolorowanych jednym kolorem?

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo!

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo!

Dla każdego z 1000 elementów rzućmy monetą, jeśli wypadnie reszka kolorujemy go na czerwono, jeśli orzeł na niebiesko.

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo!

Dla każdego z 1000 elementów rzućmy monetą, jeśli wypadnie reszka kolorujemy go na czerwono, jeśli orzeł na niebiesko.

W taki sposób łatwo będzie zobaczyć,
że można uniknąć zbiorów jednokolorowych!

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo!

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo!

Cóż, wygląda to dość podejrzanie...

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo!

Cóż, wygląda to dość podejrzanie...

Po pierwsze, jeśli mamy pecha, to wszystkie elementy pokolorujemy jednym kolorem.

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo!

Cóż, wygląda to dość podejrzanie...

Po pierwsze, jeśli mamy pecha, to wszystkie elementy pokolorujemy jednym kolorem.

Po drugie mieliśmy **uzasadnić**, że da się **zawsze** pokolorować taką rodzinę zbiorów.

Pomysł Erdősa: rozwinięcie

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo

Pomysł Erdősa: rozwinięcie

Pokolorujmy elementy zbiorów losowo i policzmy ile **średnio** otrzymamy zbiorów jednokolorowych.

Pomysł Erdősa: rozwinięcie

Oznaczmy przez $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ wszystkie kolorowania zbioru 1000-elementowego (zauważmy, że $N = 2^{1000}$).

Pomysł Erdősa: rozwinięcie

Oznaczmy przez $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ wszystkie kolorowania zbioru 1000-elementowego (zauważmy, że $N = 2^{1000}$).

$X(\omega_i)$ - liczba zbiorów jednokolorowych w kolorowaniu ω_i.

Pomysł Erdősa: rozwinięcie

Oznaczmy przez $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ wszystkie kolorowania zbioru 1000-elementowego (zauważmy, że $N = 2^{1000}$).

$X(\omega_i)$ - liczba zbiorów jednokolorowych w kolorowaniu ω_i.

$$\mathbb{E}X = \frac{X(\omega_1) + X(\omega_2) + \cdots + X(\omega_N)}{N}.$$

$\mathbb{E}X$ MOŻNA OBLICZYĆ W INNY SPOSÓB...

Prawdopodobieństwo ρ, że ustalony zbiór 12-elementowy A jest jednokolorowy jest równe:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \Pr(A \text{ jest czerwony}) + \Pr(A \text{ jest niebieski}) \\
&= \Pr(\textcolor{red}{\bullet})\Pr(\textcolor{red}{\bullet})\cdots\Pr(\textcolor{red}{\bullet}) + \Pr(\textcolor{blue}{\bullet})\Pr(\textcolor{blue}{\bullet})\cdots\Pr(\textcolor{blue}{\bullet}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{1}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{2048}\,.
\end{aligned}
$$

$\mathbb{E}X$ można obliczyć w inny sposób...

Ponieważ mamy 2017 zbiorów 12-elementowych, więc średnio

$$\mathbb{E}X = 2017 \cdot \rho = 2017 \cdot \frac{1}{2048} = \frac{2017}{2048}$$

z nich będzie jednokolorowych.

$\mathbb{E}X$ MOŻNA OBLICZYĆ W INNY SPOSÓB...

Ponieważ mamy 2017 zbiorów 12-elementowych, więc średnio

$$\mathbb{E}X = 2017 \cdot \rho = 2017 \cdot \frac{1}{2048} = \frac{2017}{2048}$$

z nich będzie jednokolorowych.

Korzystamy tu z liniowości wartości oczekiwanej.

Ponieważ $\mathbb{E}X < 1$ ...

Czyli

$$\mathbb{E}X = \frac{X(\omega_1) + X(\omega_2) + \cdots + X(\omega_N)}{N} = \frac{2017}{2048} < 1 \,.$$

Ponieważ $\mathbb{E}X < 1\ldots$

Czyli

$$\mathbb{E}X = \frac{X(\omega_1) + X(\omega_2) + \cdots + X(\omega_N)}{N} = \frac{2017}{2048} < 1\,.$$

Zatem istnieje takie kolorowanie ω, że liczba $X(\omega)$ jednokolorowych zbiorów w tym kolorowaniu wynosi 0! $\square$

Oszacowania na $m(n)$

Twierdzenie Erdős'64

$$2^{n-1} \leq m(n)$$

Oszacowania na $m(n)$

Twierdzenie Erdős'64

$$2^{n-1} \leq m(n) \leq 2n^2 2^n.$$

Oszacowania na $m(n)$

Twierdzenie Erdős'64

$$2^{n-1} \leq m(n) \leq 2n^2 2^n.$$

Twierdzenie Radhakrishnan & Srinivasan'00

$$\sqrt{\frac{n}{\log n}} \leq \frac{m(n)}{2^n} \leq 2n^2\,.$$

Liczby Ramseya

Definicja

Niech $R = R(n)$ będzie najmniejszą liczbą N taką, że dla każdego pokolorowania zbioru par

$$\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq N\}$$

dwoma kolorami zawsze istnieje zbiór $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ taki, że $|S| = n$ i wszystkie pary wewnątrz S są pokolorowane jednym kolorem.

$R(3)$

Definicja

$R(3)$ to najmniejsza liczba N taka, że jeśli pokolorujemy wszystkie pary

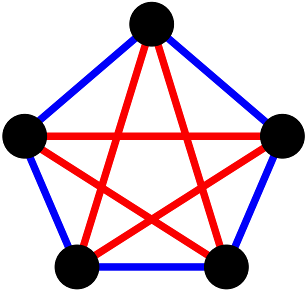
$$\{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq N\}$$

dwoma kolorami to zawsze znajdziemy zbiór $S = \{x,y,z\} \subseteq \{1,2,\dots,N\}$, w którym wszystkie trzy pary $\{x,y\}$, $\{x,z\}$, $\{x,z\}$ są pokolorowane jednym kolorem.

R(3)=6

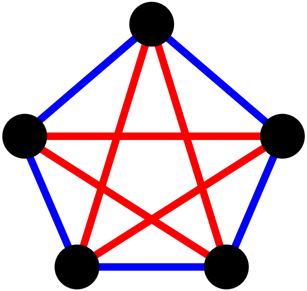
$R(3) > 5$

R(3)=6



$R(3) > 5$

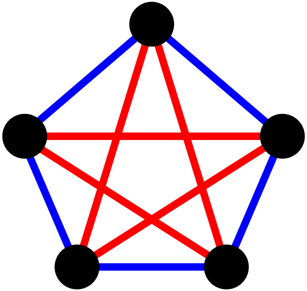
R(3)=6



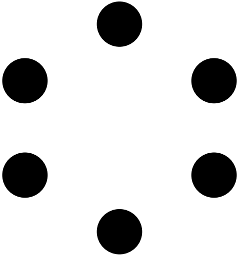
$R(3) > 5$

$R(3) \leq 6$

R(3)=6

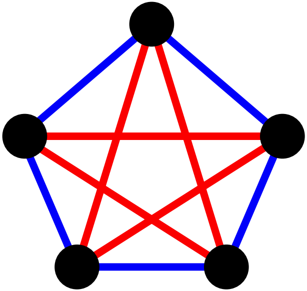


$R(3) > 5$

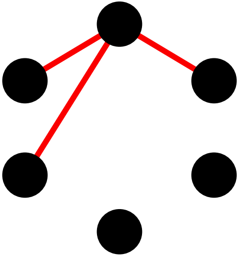


$R(3) \leq 6$

$R(3) = 6$

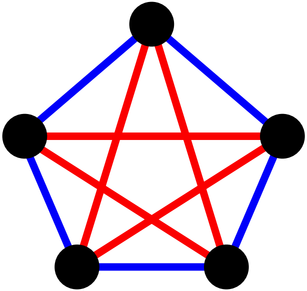


$R(3) > 5$

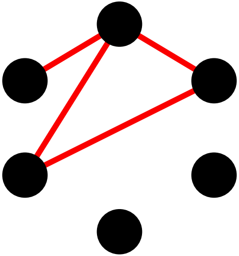


$R(3) \leq 6$

$R(3) = 6$

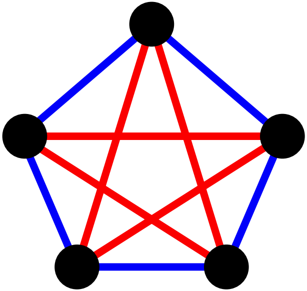


$R(3) > 5$

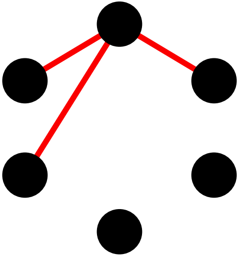


$R(3) \leq 6$

$R(3) = 6$

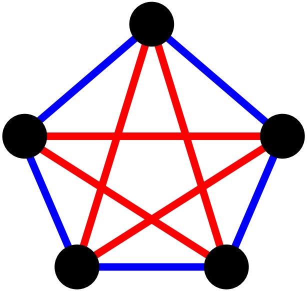


$R(3) > 5$

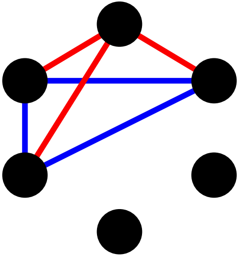


$R(3) \leq 6$

$R(3) = 6$

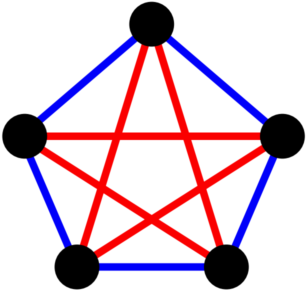


$R(3) > 5$

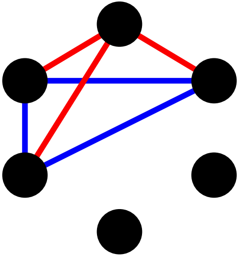


$R(3) \leq 6$

$R(n) = ?$



$R(n) > ?!?$



$R(n) \leq 4^n$

Oszacowania na R(n)

Twierdzenie Erdős'47

$$2^{n/2} < R(n) \leq 4^n .$$

Oszacowania na R(n)

Twierdzenie Erdős'47

$$2^{n/2} < R(n) \leq 4^n .$$

Dowód dolnego oszacowania

Oszacowania na R(n)

Twierdzenie Erdős'47

$$2^{n/2} < R(n) \leq 4^n \,.$$

Dowód dolnego oszacowania

Pokoloruj pary $\{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq 2^{n/2}\}$ rzucając monetą. Wtedy średnia liczba zbiorów n-elementowych, w których wszystkie pary pokolorowane są jednym kolorem, jest mniejsza niż 1.

Oszacowania na R(n)

Twierdzenie Erdős'47

$$2^{n/2} < R(n) \leq 4^n .$$

Oszacowania na R(n)

Twierdzenie Erdős'47

$$2^{n/2} < R(n) \leq 4^n .$$

Mimo, iż wiemy, że $R(n) > 2^{n/2}$, nie potrafimy udowodnić, że

$$R(n) > 1.00000000001^n$$

nie rzucając monetą!

Oszacowania na R(n)

Twierdzenie Erdős'47

$$2^{n/2} < R(n) \leq 4^n .$$

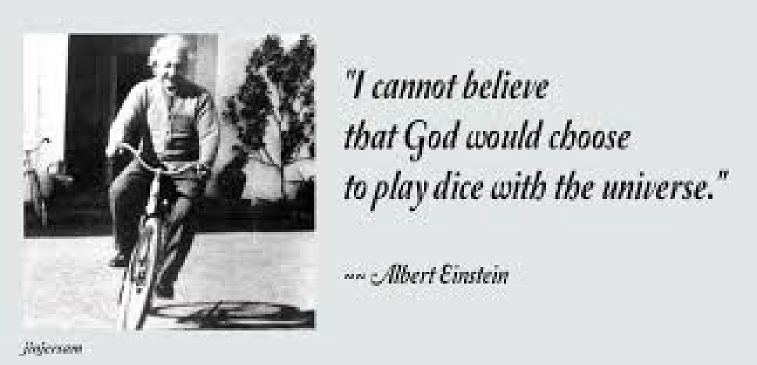
Mimo, iż wiemy, że $R(n) > 2^{n/2}$, nie potrafimy udowodnić, że

$$R(n) > 1.00000000001^n$$

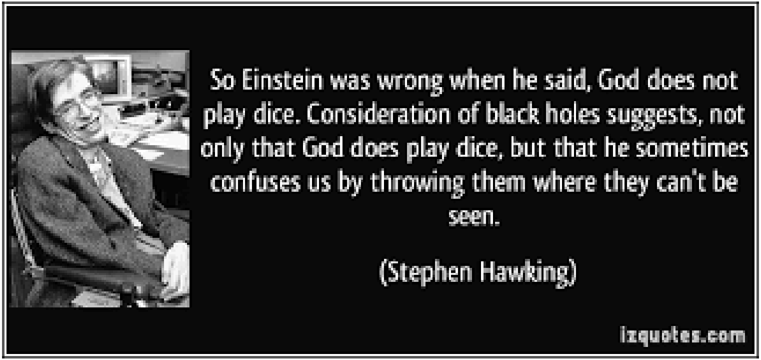
nie rzucając monetą!

Dlaczego?!?

Czy Bóg gra w kości?



W FIZYCE BÓG GRA W KOŚCI!



A w matematyce?!?

Czy Bóg gra w kości w matematyce (i logice)?

Czy Bóg gra w kości w matematyce (i logice)?

Św. Tomasz z Akwinu

Zdecydowanie nie gra!

Czy Bóg gra w kości w matematyce (i logice)?

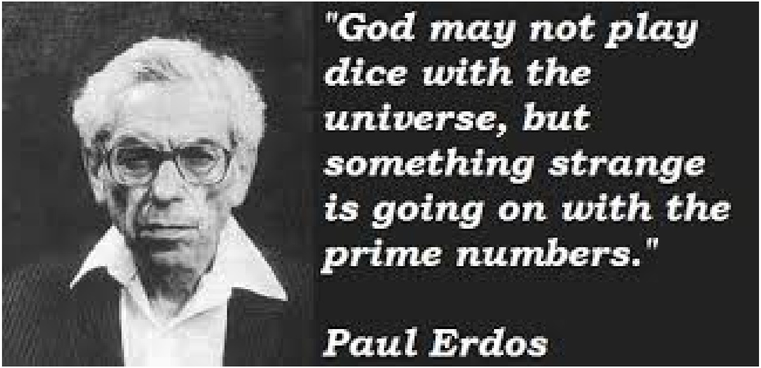
Św. Tomasz z Akwinu

Zdecydowanie nie gra!

Św. Augustyn

Może i nie gra, a może i gra...

ERDŐS RÓWNIEŻ MIAŁ NA TEN TEMAT SWOJE ZDANIE



Hipoteza Riemanna

Hipoteza Riemanna, postawiona w 1859 roku, jest jednym z najważniejszych nierozstrzygniętych problemów matematycznych

Hipoteza Riemanna

Hipoteza Riemanna, postawiona w 1859 roku, jest jednym z najważniejszych nierozstrzygniętych problemów matematycznych (i jako jeden z siedmiu problemów milenijnych warta 1 000 000$)!

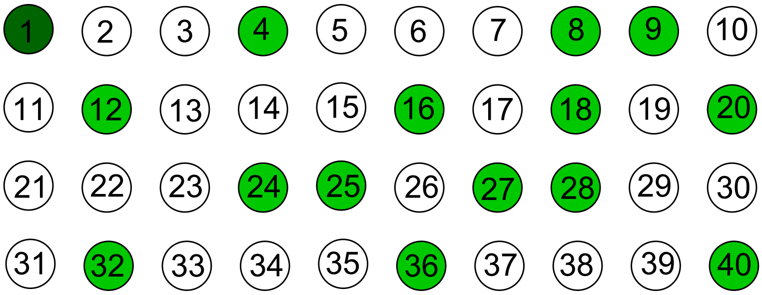
Hipoteza Riemanna

Hipoteza Riemanna, postawiona w 1859 roku, jest jednym z najważniejszych nierozstrzygniętych problemów matematycznych (i jako jeden z siedmiu problemów milenijnych warta 1 000 000$)!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

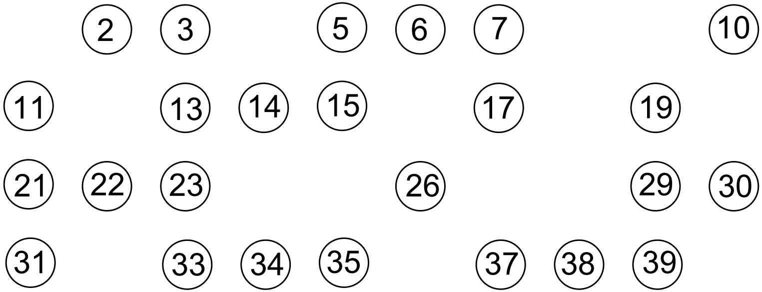
HIPOTEZA RIEMANNA

Hipoteza Riemanna, postawiona w 1859 roku, jest jednym z najważniejszych nierozstrzygniętych problemów matematycznych (i jako jeden z siedmiu problemów milenijnych warta 1 000 000$)!



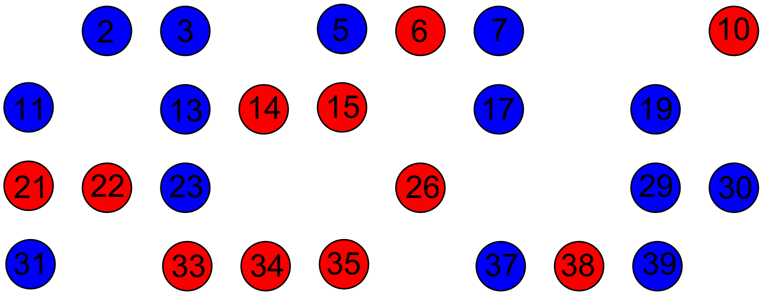
Hipoteza Riemanna

Hipoteza Riemanna, postawiona w 1859 roku, jest jednym z najważniejszych nierozstrzygniętych problemów matematycznych (i jako jeden z siedmiu problemów milenijnych warta 1 000 000$)!



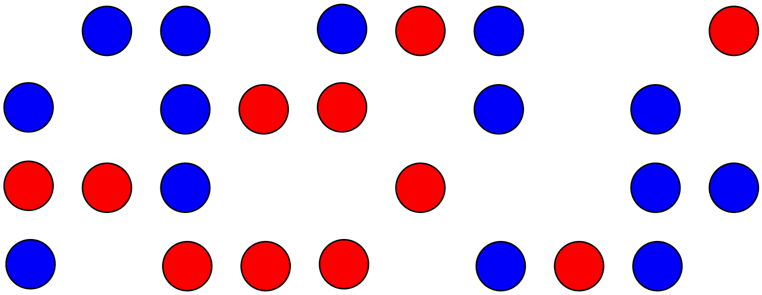
Hipoteza Riemanna

Hipoteza Riemanna, postawiona w 1859 roku, jest jednym z najważniejszych nierozstrzygniętych problemów matematycznych (i jako jeden z siedmiu problemów milenijnych warta 1 000 000$)!



Hipoteza Riemanna

Hipoteza Riemanna, postawiona w 1859 roku, jest jednym z najważniejszych nierozstrzygniętych problemów matematycznych (i jako jeden z siedmiu problemów milenijnych warta 1 000 000$)!



LOSOWOŚĆ, PSEUDOLOSOWOŚĆ I INNE OSOBLIWOŚCI

Oprócz Hipotezy Riemanna, jest wiele innych przesłanek na to, że liczby pierwsze są, w pewnym sensie, “losowo” rozłożone wśród pozostałych liczb.

Jednym wielu twierdzeń związanych z tym intrygującym zachowaniem liczb pierwszych, jest wynik Erdősa i Kaca z 1940 roku, w którym pojawia się rozkład normalny.

Losowość, pseudolosowość i inne osobliwości

Oprócz Hipotezy Riemanna, jest wiele innych przesłanek na to, że liczby pierwsze są, w pewnym sensie, “losowo” rozłożone wśród pozostałych liczb.

Jednym wielu twierdzeń związanych z tym intrygującym zachowaniem liczb pierwszych, jest wynik Erdősa i Kaca z 1940 roku, w którym pojawia się rozkład normalny.

Czasami możemy ten fakt wykorzystać do konstrukcji struktur “pseudolosowych”!

Dziękuję za uwagę!